SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

BÉNALI BENZAGHOU

Algèbres de Hadamard

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 16, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A16_0>

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie des Nombres (J. LESCA)
Année 1968/1969 , n° 17

23 Mai 1969

ALGEBRES DE HADAMARD

par

Bénali BENZAGHOU

-:-:-:-:-:-:-

Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. L'algèbre de Hadamard $\mathcal{H}(K)$ est le K-module des séries formelles à coefficients dans K muni du produit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \quad .$$

Les séries $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ telles que les a_n satisfont à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (qui dépend de $\mathcal{A}$) forment une sous-algèbre $\mathcal{R}(K)$.

$$\{\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)\} \Leftrightarrow \{\mathcal{A} = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X) \ , \ Q(0) \neq 0 \text{ et } d^oP < d^oQ\}$$

$$\Leftrightarrow \{a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n \ , \ P_i \in K'[X] \ , \ K' \text{ extension algébrique de } K \ , \ \alpha_i \in K'\} .$$

Si $E \subset K$, nous notons

$$\mathcal{R}(E,K) = \{\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \ , \ a_n \in E \text{ pour tout } n\} .$$

L'étude de $\mathfrak{R}(K)$ est celle de la conservation de la rationnalité d'une série de Taylor par des opérations algébriques sur les coefficients de la série.

Soit A un anneau commutatif, intègre, unitaire, K son corps des quotients.

Désignons par $\mathfrak{R}(A)$ l'ensemble des séries formelles

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{s} a_n X^n , \quad a_n \in A \quad \text{et} \quad a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n ,$$

$q_i \in A$, la relation de récurrence (qui dépend de $\mathcal{A}$) étant de longueur minimum.

Anneaux de Fatou

Un anneau commutatif unitaire intègre sera dit de Fatou si $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A, K)$. Ce qui équivaut à :

quel que soit $\dfrac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$, $(P, Q) = 1$, $d^oP < d^oQ$, $Q(0) = 1$;

$\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ la série de Taylor à l'origine ,

alors $a_n \in A$ pour tout n implique $Q(X) \in A[X]$.

$\mathbb{Z}$ satisfait à cette propriété ("lemme de Fatou" [2]) , un anneau d'entiers algèbriques aussi [3] . Plus généralement :

THEOREME. Un anneau intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est un anneau de Fatou.

En particulier, un anneau de Krull est un anneau de Fatou. Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos. Pour un anneau de valuation A :

A est de Fatou $\Leftrightarrow$ la valuation est de hauteur 1 .

Nous avons

anneau intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1. $\Rightarrow$ anneau de Fatou $\Rightarrow$ anneau complètement intégralement clos

Le prolbème reste ouvert de savoir si la classe des anneaux de Fatou est disctincte des deux classes qui l'encadrent ci-dessus.

Si A est un anneau de Fatou, alors $A[X]$ est encore de Fatou ; de même un anneau d'entiers A' d'une extension algébrique de K . Par contre, le problème reste ouvert pour $A[\,[X]\,]$.

Unités de $\mathfrak{R}(K)$

THEOREME. Un élément $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathfrak{R}(K)$ est inversible dans $\mathfrak{R}(K)$ si et seulement si il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ dans K^* , $m \geq 1$, tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$a_\mu \in K^*$$

$$a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t \quad , \quad t \in \mathbb{N} \ .$$

Un théorème de division dans $\mathfrak{R}(K)$

Une suite (a_n) de $\mathbb{Q}$ sera dite de Pólya si presque toute valuation de $\mathbb{Q}$ est triviale sur la suite (a_n) .

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Pólya si la suite $(N(a_n))$, où $N(x)$ est la norme absolue de x, est de Pólya.

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ telle qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$, tels que pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $a_{\mu+t_m} = a_\mu \alpha_\mu^t$, sera dite une fonction de Pólya.

THEOREME. Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro (contenant $\mathbb{Q}$). Soient $\mathcal{A} = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $\mathcal{B} = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et supposons $I(\mathcal{B}) = \{n, b_n = 0\} \subset I(\mathcal{A})$. Posons $a_n = b_n c_n$, en convenant $c_n = 1$ lorsque $b_n = 0$.

Si c_n est une suite de Pólya de $\mathbb{Q}$, alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ et est une fonction de Pólya.

Pólya avait étudié le cas $b_n = 1$ pour tout n et $a_n \in \mathbb{Z}$ [4].

Pour une suite (a_n) de Pólya dans $\mathbb{Q}$, nous avons le critère de localisation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout } p \text{ premier, } \sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \\ \text{et } \sum_n \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \end{cases}$$

Le théorème de division est seulement conjecturé lorsque (c_n) est une suite de Pólya d'un corps de nombres. En combinant le théorème de division et la caractérisation des unités, nous obtenons cette généralisation d'un résultat de Pólya :

Soit (a_n) une suite de Pólya d'un corps de nombres k. Alors

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ est une fonction de Pólya.}$$

Comme application, nous avons le résultat suivant :

Soit (α_n) une suite d'unités algébriques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe des unités algébriques $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ telles que pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $\alpha_{\mu+t_m} = a_\mu \alpha_\mu^t$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Définissons $\mathfrak{S}_j(K) = \{ \sum a_n X^n , \exists P_o, \ldots, P_{m-1} \in K[X] ,$

$$d^o P_\mu \leq j \text{ et } a_{\mu+t_m} = P_\mu(t) \text{ pour } \mu = 0, 1, \ldots, m-1 ; t \in \mathbb{N} \} .$$

Alors nous avons le résultat suivant analogue au théorème de Dirichlet sur les unités algébriques.

Soit k une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}$. $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités.

a) $\mathfrak{R}(k)$ est une $\mathfrak{R}(\mathbb{Q})$-algèbre entière, de type fini,

b) $\mathfrak{R}(\mathcal{O})$ est une $\mathfrak{R}(\mathbb{Z})$-algèbre entière, de type fini,

c) $\mathfrak{R}(\mathcal{U}, k)$ est le groupe d'unités de $\mathfrak{R}(\mathcal{O})$ et

$$\mathfrak{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathfrak{S}'_o \times \mathfrak{S}_1^r$$

où

- $\mathfrak{S}'_o$ est un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre inférieur ou égal à l'ordre du groupe des racines de l'unité de k
- $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\mathbb{Z})$
- r est le nombre de Dirichlet de k.

Si k_s est le groupes des S-unités de k, $\mathfrak{R}(k_s, k)$ est un groupe multiplicatif isomorphe à $\mathfrak{S}'_o \times \mathfrak{S}_1^m$, où m est le nombre de S-unités fondamentales de k_s.

Signalons également l'application suivante : soit (a_n) une suite d'entiers algébriques non nuls. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \quad .$$

Les démonstrations des résultats signalés ont été publiées dans quatre notes aux comptes-rendus de l'Ac. des Sc. de Paris [1] et exposées au Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1967-68 et 1968-69). Une étude plus systématique des Algèbres de Hadamard paraîtra dans le Bulletin des Sciences Mathématiques.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU B. - Comptes rendus Ac. Sc. Paris, série A , t. 266, (1968), p. 652-654. t. 267 (1968) p. 212-214. t. 267 (1968), p. 913-915. t. 268 (1969) p. 1235-1237.

[2] FATOU P. - Acta Math. Uppsala - t. 30 (1906) p. 335-400.

[3] PISOT Ch. - Ann. Sc. Sup. Pisa - série 2, t. 7 (1938) p. 205-248.

[4] POLYA G. - J. Für reine and angew. Math. t. 151, (1921) p. 1-31.

-:-:-:-:-:-:-