Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Dacunha-Castelle

Ultraproduits d'espaces de Banach

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 9, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A9_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

ULTRAPRODUITS D'ESPACES DE BANACH

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N° IX

8 Décembre 1971

Définition 1 : Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach. On définit $\hat{B}$ par :

$\hat{B} = \{(f_i)_{i\in I},\ f_i \in B_i,$ il existe M tel que $\|f_i\| < M$ pour tout $i\in I\}$.

On pose $\|(f_i)_{i\in I}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|f_i\|$, (1) ,

$\mathfrak{U}$ étant un ultrafiltre non trivial sur I.

Soit

$$\mathfrak{N} = \{(f_i)_{i\in I},\ \|(f_i)_{i\in I}\| = 0\}$$

Par définition l ultraproduit $\Pi_{i\in I} B_i/\mathfrak{U}$ des espaces $(B_i)_{i\in I}$ suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ est le quotient $\hat{B}/\mathfrak{N}$.

Proposition 1 : $\prod_{i\in I} B_i/\mathfrak{U}$ est un espace de Banach.

Démonstration : Il est clair que (1) définit une semi-norme. $\hat{B}/\mathfrak{N}$ est donc normé.

Soit une suite $(f_i^n)_{i\in I}$ d'éléments tels que $\|(f_i^n)_{i\in I}\| \le \frac{1}{2^n}$. Il suffit de montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (f_i^n)_{i\in I}$ converge dans $\hat{B}/\mathfrak{N}$. A_n fixé, on peut trouver $(g_i^n) \sim (f_i^n)$ (mod $\mathfrak{N}$) avec $\|g_i^n\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout i. (prendre $g_i^n = f_i^n$ lorsque $\|f_i^n\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $g_i^n = 0$ si $\|f_i^n\| > \frac{1}{2^{n-1}}$).

Alors pour tout i, on pose $g_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_i^n$, $g_i\in B_i$ et $\sum_1^n (f_i^k)_{i\in I}$ converge vers $(g_i)_{i\in I}$, puisque $\sum_i^n (g_i^k)_{i\in I} \sim \sum_i^n (f_i^k)_{i\in I}$ modulo $\mathfrak{N}$. cqfd.

L'exemple d'ultraproduit qui suit nous sera utile. Soit B un Banach. $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de B; si $P \in \mathcal{P}$, soit B_P le sous-espace de Banach de B engendré par P

Sur $\mathcal{P}$, on considère un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ tel que pour tout P, $\{P', P' \in \mathcal{P},\ P' \supset P\} \in \mathfrak{U}$.

Proposition 2 : Avec les notations ci-dessus, il existe une isométrie (canonique) $B \to \prod_{P \in \mathcal{P}} B_P/\mathfrak{U}$.

Démonstration : Soit $x \in B$. Posons

$$\hat{x} = (x_P)_{P \in \mathcal{P}} \text{ où } x_P = x \text{ si } x \in B_P$$

$$x_P = 0 \text{ si } x \notin B_P.$$

L'application $x \to \hat{x}$ est clairement une isométrie.

Définition 2 : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach,

a) $\mathcal{C}$ est dite stable par sous-espace si $B \in \mathcal{C}$ et C sous-espace de B implique $C \in \mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}$ est dite stable par isométrie si B est un Banach tel qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ et une isométrie de B sur C alors $B \in \mathcal{C}$.

c) $\mathcal{C}$ est dite stable par ultraproduit, si $(C_i)_{i \in I}$ étant une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{C}$, $\prod_{i \in I} B_i/\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$.

Exemple de classes stables par sous-espace, isométrie, ultraproduit.

1- $\mathcal{C} = \{$sous-espace de $\mathbb{R}^n$, n fixé$\}$ (trivial)

2- $\mathcal{C} = \{$classe L^2 des espaces de Hilbert$\}$

3- Soit B un Banach, $\mathcal{C} = \{B^{I/\mathfrak{U}}$ des ultrapuissances de B$\}$ (facile).

Théorème 3 : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1- $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit, sous-espace, isométrie

2- $\mathcal{C}$ est caractérisée par un ensemble Γ de conditions du type.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \left[\left(\left\| x_i + x_j + x_k \right\|,\ 1 \leq i, j\ k \leq n \right) \in C_n \right]$$

où C_n est un cône fermé de $\mathbb{R}^{n^3}$.

La condition 2 signifie que $\mathcal{C}$ est la seule classe telle que pour tout n-uplet $(x_1 \ldots x_n)$ d'éléments de $B \in \mathcal{C}$, toutes les conditions Γ sont vraies.♦

Démonstration : $2 \rightarrow 1$ est trivial.

Pour montrer que $1 \rightarrow 2$, considérons l'ensemble Γ' des conditions satisfaites pour tout $B \in \mathcal{C}$ du type suivant :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\bigvee [\ \|x_i + x_j + x_k\| \neq b_{ijk}\ ]\ 1 \leq i,j,k, \leq n)$$

où $b,i,j,k \in \mathbb{R}$; (Γ peut être vide, par exemple si $\mathcal{C}$ est la classe SL^∞ des sous-espaces de L^∞), et $\bigvee$ signifie la disjonction♦♦.

Soit C un Banach vérifiant Γ'. Soit $P = \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ une partie finie de C. Il existe alors un espace $B \in \mathcal{C}$, une partie finie $\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n\}$ de B telle que

(2) $\|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| = \|\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j + \bar{\alpha}_k\|$, $1 \leq i,j,k \leq n$

En effet s'il n'existait pas $\{\bar{\alpha}_i, \ldots, \bar{\alpha}_n\}$ vérifiant (2), on aurait

(3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\bigvee [\|x_i + x_j + x_k\| \neq \|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\|], \quad 1 \leq i,j,k, \leq n)$.

Donc (3) serait une des conditions de Γ' elle serait vérifiée par C ce qui est faux (faire $x_i = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$).

$P = \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ étant fixé, soit V_p le sous-espace de Banach engendré par $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$.

♦ Remarque : Toute classe $\mathcal{C}$ caractérisée par un ensemble de formules du type

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\ \| \sum_{i=1}^{n} a_i^j \ x_i \|_{j=1, \ldots, m} \in C_m)$$

où $(a_i^j)_{\substack{i=1 \ldots n \\ j=1 \ldots m}}$ est une matrice réelle, est stable par ultraproduit, sous-espace et isométrie. Nous avons choisi des matrices les plus amples possibles pour énoncer le théorème.

♦♦ C est-à-dire $\bigvee \|x_i + x_j + x_k\| \neq b_{ijk}$ $1 \leq i,j,k \leq n$ signifie que la formule est vérifiée si et seulement si l'une au moins des formules $\|x_i + x_j + x_k\| = b_{ijk}$ est vérifiée.

Il est facile de vérifier que la condition

$$\|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| = \|\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j + \bar{\alpha}_k\| \quad , \quad 1 \leq i ; j \; k \leq n$$

implique que l'application $\alpha_i \to \bar{\alpha}_i$ définit une isométrie linéaire de l'espace engendré par P sur V_P.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties finies de C tel que pour tout P, $\{P', P' \supset P\} \in \mathfrak{U}$. Alors $\prod_{P \in \mathcal{P}} V_P/\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit. L'application $\alpha \to (\bar{\alpha}_P)_{P \in \mathcal{P}}$ de $C \to \prod_{P \in \mathcal{P}} V_P/\mathfrak{U}$, où $\bar{\alpha}_P$ est définie plus haut si $\alpha \in P$ et $\bar{\alpha}_P = 0$ si $\alpha \notin P$ est une isométrie, puique linéaire et que $\|(\bar{\alpha}_P)_{P \in \mathcal{P}}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|\bar{\alpha}_P\| = \|\alpha\|$ d'après la propriété de $\mathfrak{U}$ $\mathcal{C}$ étant stable par isométrie, et sous-espace, on a donc $C \in \mathcal{C}$.

Soit maintenant F_n l'ensemble des points (b_{ijk}) $\quad 1 \leq i, j, k \leq n$ de $\mathbb{R}^{n^3}$ apparaissant dans Γ'.

Soit C_n le complémentaire de F_n.

C_n est un cône. Il suffit de montrer que C_n est fermé. Soit (b^m_{ijk}) une suite de points de $\mathbb{R}^{n^3}$ convergeant vers (b_{ijk})

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un espace $B_m \in \mathcal{C}$ et $\{\alpha^m_1, \ldots \alpha^m_n\} \subset B_m$ tels que

$\|\alpha^m_i + \alpha^m_j + \alpha^m_k\| = b^m_{ijk}$ pour tout $1 \leq i, j, k \leq n$ (puisque $(b^m_{ijk}) \in \mathbb{R}^{n^3} - F_n$ d'après la définition même de F_n). Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ non trivial et $B = \prod_{m \in \mathbb{N}} B_m/\mathfrak{U}$. B est dans $\mathcal{C}$ (stable par ultraproduit).

Soit $\alpha_i = (\alpha^m_i)_{m \in \mathbb{N}}$ On a

$$\begin{aligned} \|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| &= \lim_{\mathfrak{U}} \| \alpha^m_i + \alpha^m_j + \alpha^m_k\| \\ &= \lim_{\mathfrak{U}} b^m_{ijk} \\ &= b_{ijk}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \end{aligned}$$

donc la condition

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n (\forall [\|x_i + x_j + x_k\| \neq b_{ijk}], \quad 1 \leq i, j, k \leq n)$$

n est pas vérifiée par B donc $(b_{ijk}) \in C_n$. cqfd

Définition 3 : Une classe $\mathcal{C}$ de Banach est dite stable par quotient si pour tout $B \in \mathcal{C}$, tout quotient B/R de B par sous-espace fermé $R \in \mathcal{C}$.

Proposition 4 : Si $\mathcal{C}$ est une classe stable par ultraproduit, sous-espace isométrie, $Q\mathcal{C}$ la classe des quotients a les mêmes propriétés.

Démonstration : Il est facile de montrer que l'on a

$$\prod_{i\in I} B_i/R_i\Big/\mathcal{U} = \prod_{i\in I} B_i/\mathcal{U}\Big/\prod_{i\in I} R_i/\mathcal{U}$$

(il existe une isométrie canonique triviale entre les deux espaces).
Il est intéressant de remarquer qu'un ultraproduit de quotients (non trivial) est toujours un quotient fort c'est-à-dire un quotient dans lequel il existe un élément de chaque classe d'équivalence ayant même norme que sa classe).

Définition 5 :

a) Deux espaces de Banach B et C sont dits λ-isomorphes s'il existe un isomorphisme $T : B \to C$ tel que $\|T\| \, \|T^{-1}\| \leq \lambda \quad (\lambda \geq 1)$.

b) Si $\mathcal{C}$ est une classe de Banach stable par isométrie, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la classe des Banach tels qu'il existe $B \in \mathcal{C}$, C et B étant λ-isomorphes.

Théorème 5 : Si $\mathcal{C}$ est stable par sous-espace, ultraproduit, isométrie. $\mathcal{C}_\lambda$ a les mêmes propriétés et admet donc une caractérisation par des formules T_λ du type de celles introduites au théorème 3.

Démonstration : Soit $T_i : B_i \to C_i$ un λ-isomorphisme pour tout $i \in I$. L'application $\prod_{i\in I} T_i/\mathcal{U}$ de $\prod_{i\in\mathcal{U}} B_i/\mathcal{U} \to \prod_{i\in I} C_i/\mathcal{U}$ définie par $(x_i)_{i\in I} \to (Tx_i)_{i\in I}$ est encore un λ-isomorphisme. Si $C_i \in \mathcal{C}$ pour tout $i \in I$, il en est de même de $\prod_{i\in I} C_i/\mathcal{U}$ d'ou le résultat.

Définition 6 : Soit B et C deux espaces de Banach. On appelle p-somme

de B et C et l'on note $(B \oplus C)_p$ l'espace B + C muni de la norme définie par $\|x+y\|_{(B\oplus C)_p} = (\|x\|^p_B + \|y\|^p_C)^{1/p}$; $(0<p<\infty)$.

Une classe $\mathcal{C}$ est dite stable par p-somme si $B,C \in \mathcal{C}$ implique $(B \oplus C)_p \in \mathcal{C}$.

Théorème 6 : Les conditions suivantes sont équivalentes pour une classe $\mathcal{C}$ d'espaces de Banach:

1- $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit, p-somme , sous-espace, isométrie.

2- $\mathcal{C}$ est caractérisée par un ensemble (Γ) de conditions du type

$$(4) \qquad \forall x_1 \ldots x_n \ (\Sigma_{1\le i,j,k\le n} \| \lambda_{i,j,k} \|^p > 0) .$$

Exemples :

- La classe SL^p des sous-L^p, $1 < p < \infty$ est stable par ultraproduit, sous-espace, isométrie, p-somme, (nous donnerons plus loin la démonstration). De plus c'est la plus petite classe contenant $\mathbb{R}$ et stable par ultraproduit. (Pour le vérifier on remarquera que cette classe $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ doit contenir l^p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $L_p[(0,1),dx] \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} l^p_n/\mathcal{U}$, enfin que si $\mathcal{C}_p(B)$ est la plus petite classe contenant P stable par p-somme $\mathcal{C}_p(L_p((0,1),dx)) = L_p$. Cette remarque sera fréquemment utilisée par la suite. On déduit de cette remarque que :

Proposition 7 :

a) La classe SL_p est caractérisée par toutes les formules du type (4) qui sont vraies sur $\mathbb{R}$.

b) De manière générale la plus petite classe contenant un espace B et stable par p-somme, isométrie, sous-espace et ultraproduit est caracrérisée par les formules du type (4) vraies sur B.

- Les classes λSL^p et QSL^p satisfont aussi aux conditions du théorème 6. Remarquons qu'à partir de la caractérisation de ces classes on peut obtenir d'intéressants résultats concernants certaines classes d'opérateurs p-sommant, p-intégraux ([2],[3]). La théorie développée ici donne une démonstration unitaire pour SL^p, λSL^p, QSL^p etc... et permet de re-

trouver de manière naturelle les résultats de ([1],[2],[3])

Démonstration du théorème 6 : On peut écrire l'ensemble Γ des formules (3) caractérisant $\mathcal{C}$ sous la forme :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\|x_i + x_j + x_k\|^p,\ 1 \le i,j,k \le n \in C_n^p) \qquad (4)$$

où C_n^p est un cône de $\mathbb{R}^{n^3}$.

Soit D_n^p l'ensemble des points du cône effectivement atteints, c'est-à-dire tels qu'il existe au moins $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\} \subset B$ avec $B \in \mathcal{C}$ et

$$(\|x_i + x_j + x_k\|) \in C_n^p \qquad 1 \le i,j,k \le n$$

Alors D_n^p est un cône convexe, car si $(\overline{y_r}, \ldots, \overline{y_n}) \subset C$, avec $C \in \mathcal{C}$, on a $x_i + y_i \in (C \oplus B)_p$ pour $1 \le i \le n$ et

$$\| x_i + y_i + x_j + y_j + x_k + y_k\|^p = \|x_i + x_j + x_k\|^p + \|y_i + y_j + y_k\|^p, \qquad 1 \le i,j,k \le n$$

donc $(\|x_i + x_j + x_k\|^p + \|y_i + y_j + y_k\|^p) \in D_n^p$. $\qquad 1 \le i,j,k \le n$

Soit $(\lambda^{\alpha}_{ijk})_{\alpha \in \Lambda}$ les formes linéaires définissant tous les plans d'appui du cône convexe D_n^p. (1) équivaut donc à l'ensemble des conditions

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n \Big(\sum_{1 \le i,j,k \le n} \lambda^{\alpha}_{ijk} \|x_i + x_j + x_k\|^p \ge 0\Big),\ \alpha \in \Lambda. \qquad \underline{\text{cqfd}}.$$

Le théorème suivant est un cas particulier d'un théorème général dû à Krivine. Son intérêt, qui nous semble très grand, est de donner une démonstration unique pour la caractérisation des classes λSL^p, QSL^p, λQSL^p (et d'autres); mais surtout de donner un moyen mécanique simple pour passer de la caractérisation de la classe SL^p à celle des classes voisines. Plus simple que les techniques "à base d'opérateurs" il montre surtout que contrairement à certaines idées, il n'y a pas une théorie "aux isométries près" et une théorie aux isomorphismes près.

Théorème 8 : Soit E un ensemble, $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach stable par p-somme, isométrie, sous-espaces, ultraproduit. Soit Λ un ensemble d'indices et une application

$$\Lambda \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}^n\times\mathcal{P}$$

$$\alpha \to (m_\alpha\ M_\alpha, (\lambda_i^\alpha)_{i=1\ldots n_{(\alpha)}},\ \{a_1^\alpha \ldots a_{n(\alpha)}^\alpha\})$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties finies de E. Enfin à chaque élément $a \in E$ on associe une variable x_a.
Les conditions suivantes sont alors équivalentes

1- Il existe $\varphi : E \to C$, où $C \in \mathcal{C}$ telle que

$$m_\alpha \le \| \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ \varphi(a_i^\alpha)\| \le M_\alpha$$

$\alpha \in \Lambda$.

2- Pour toute formule du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha \| \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ x_i^\alpha \|^p \ge \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha \| \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ x_i^\alpha \| \quad (\Lambda_o \subset \Lambda,\ \Lambda_o \text{ fini},\ \rho_\alpha, \rho'_\alpha \in \mathbb{R}$$

pour tout $\alpha \in \Lambda$) qui est vraie dans tout $C \in \mathcal{C}$ (x_i^α est la variable qui correspond à a_i^α donc si $a_i^\alpha = a_j^\beta$, x_i^α et x_j^β sont les mêmes variables) on a

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha\ M_\alpha \ge \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha\ M_\alpha.$$

Théorème 9 : La classe $\lambda\ SL^p$ est caractérisée par l'ensemble des conditions du type

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [\lambda \sum_{1\le i,j,k\le n} \rho_{i,j,k}\ \|x_i + x_j + x_k\|^p \ge \sum_{1\le l\le n} \sigma_l \|x_l\|^p]\ ;$$

$\rho_{i,j,k}, \sigma_l \in \mathbb{R}^+$ sont tels que la condition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [\sum_{1\le i,j,k\le n} \rho_{i\ j,k} |x_i + x_j + x_k|^p \ge \sum_{1\le l\le n} \sigma_l |x_l|^p] \text{ soit vraie sur } \mathbb{R}$$

Démonstration : Pour que $E \in \lambda\text{-SL}^p$, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ et $\varphi : E \to C$ telle que

$$\|a\| \leq \|\varphi(a)\| \leq \lambda\|a\|$$

et

$$\forall a\ \forall b\ \forall c \quad \|\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)\| \leq \lambda \|a + b + c\|$$

car cette dernière condition implique la linéarité de φ.
Considérons alors les conditions du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} (\rho_\alpha \|x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha\|^p + \sigma_\alpha \|x_4^\alpha\|^p)$$

$$\geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} (\rho'_\alpha \|x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha\|^p + \sigma'_\alpha \|x_4^\alpha\|^p)$$

qui sont vraies sur L^p. Vu leur forme, il suffit de considérer celles qui sont vraies sur $\mathbb{R}$ (elles constituent en effet le même ensemble de formules d'après une remarque faite avant la proposition 7). Pour les termes $(a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha)$ on a $M_\alpha = \lambda\|a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha\|, m_\alpha = 0$, pour les termes a_4^α on a $m_\alpha = \|a_4^\alpha\|$ et $M_\alpha = \lambda\|a_4^\alpha\|$, d'où le théorème en notant maintenant $\{x_1 \ldots x_n\}$ l'ensemble $\{x_1^\alpha, \ldots, x_4^\alpha,\ \alpha\in\Lambda_o\}$.

Théorème 10 : La classe $\lambda\text{-QSL}^p$ est caractérisée par l'ensemble des conditions du type

$$\forall x_1, \ldots \forall x_n \quad (\lambda \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \geq \sum_{j=1}^n \|\sum_{i=1}^n a_i^j x_i\|^p$$

où $(a_i^j)_{\substack{i=1\ldots n\\ \gamma=1\ldots n}}$ sont les matrices réelles telles que la condition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad (\sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq \sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^n a_i^j x_i|^p$$

soit vraie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit $\lambda = 1$. D'après la remarque faite plus haut, il suffit de caractériser les quotients forts de SL^p.
Soit E un Banach, c'est un quotient de SL^p s'il existe φ,C tels que

$$\varphi : E \to C,\ C \in SL^p$$

avec 1- $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$

2- $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(a_i)\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\|$.

Les conditions à étudier sont donc celles du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha \|^p + \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \sigma_{\alpha,1} \|x_1\|^p \geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha\|^p +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \sigma'_{\alpha,1} \|x_1\|^p$$

qui sont vraies sur SL^p; donc comme précédemment il suffit d'étudier celles qui sont vraies sur $\mathbb{R}$, d'où le résultat moyennant des modifications élémentaires et un changement de notations. On passe ensuite du cas $\lambda = 1$ au cas λ quelconque par la même démonstration que celle du théorème 9.

(Remarque : on vérifiera sans peine que si M_α n'intervient pas, c'est à-dire peut-être pris arbitrairement grand, on peut supprimer le terme correspondant à M_α dans le théorème 8.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine : Lois stables et espaces L^p. Annales Inst. H. Poincaré 1966 (p.231-263).

[2] S. Kwapien : Operators factorizing through L^p spaces. A paraître (voir aussi colloque d'analyse fonctionelle, Bordeaux. Mai 1970 CNRS).

[3] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in L^p-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968) (p.275-326)