Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Schwartz

(Conférence n°3) Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 33, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A36_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

DEUX JOURNEES p-RADONIFIANTES

APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS L'ESPACE DES SERIES CONVERGENTES

par L. SCHWARTZ

Conférence N° 3

26 Janvier 1972

Les applications radonifiantes entre espaces de suites l^r, $0 < r \leq +\infty$, ont été maintenant beaucoup étudiées. Par contre, on a fort peu de résultats relatifs à l'espace des séries convergentes ; il s'agit du Banach S des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge, muni de la norme $\|c\|_S = \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_o + c_1 + \ldots + c_n|$. Actuellement, deux importants résultats ont été énoncés.

Le premier est le théorème de Menchov[♦] :

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires orthonormée, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique telle que $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X_n$ converge presque sûrement.

Nous le généraliserons en disant que l'application diagonale $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^2 dans S est 0-radonifiante.

Le deuxième est le théorème de Kwapien-Pelczynski[♦♦] :

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de fonctions de $L^1(\Omega,\mu)$, si $|\alpha_n| \leq \text{const.} (\log n)^{-1-\delta}$, $\delta > 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X_n$ converge μ-presque partout.

Nous le généraliserons en disant que, si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, où $\beta_n = \sup_{k\geq o} |\alpha_{n+k}|$, l'application diagonale α de l^1 ou même $\sigma(l^1, c^o)$ dans $\sigma(S'', S')$ est 1-radonifiante.

Nous démontrerons ces deux théorèmes par le théorème de dualité. Ces démonstrations paraîtront prochainement dans un article du Journal de la Société Mathématique Japonaise (Schwartz [1]).

♦ Voir J. L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley, New-York, 1953, théorème (4.2) du § 4 du chap. IV, page 157.

♦♦ S. Kwapien et A. Pelczynski ; communication privée.

§ 1. LE THEOREME DE MENCHOV

Nous nous placerons d'abord dans le cas fini. Nous appliquerons le théorème de dualité des applications radonifiantes avec les notations de l'exposé XXV, page XXV.2, de Schwartz [2]♦ avec $U = l^2$, $V = S$, mais seulement pour la dimension N (autrement dit, l^2 est l'espace $\mathbb{C}^N$, avec la norme $\|(c_n)_{1\le n\le N}\|_{l^2} = (\sum_n |c_n|^2)^{1/2}$, et S est l'espace $\mathbb{C}^N$, avec la norme $\|(c_n)_{1\le n\le N}\|_S = \sup_{1\le n\le N} |c_1+c_2+\ldots+c_n|$) ; $u = v$ est l'application diagonale $\alpha : (c_n)_{1\le n\le N} \mapsto (\alpha_n c_n)_{1\le n\le N}$; les poids A, B qui interviennent ont le poids $\| \ \|_2$.

Nous prendrons comme probabilité ρ sur $V = \mathbb{C}^N$ celle qui est définie par une suite $(Z_n)_{1\le n\le N}$ de variables aléatoires sur $(\mathbb{T}, dt)$, où $\mathbb{T} = [0,1]$, dt est la mesure de Lebesgue, et

$$Z_n(t) = f(t)(e^{2i\pi nt} + e^{2i\pi(n+1)t} + \ldots + e^{2i\pi Nt}), \tag{1.1}$$

f devant être déterminée plus tard; actuellement elle doit seulement être mesurable.

$$\sum_n c_n Z_n(t) = f(t) \sum_n C_n e^{2i\pi nt}, \tag{1.2}$$

où $C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. C'est pour obtenir ces C_n, intervenant dans la norme $\|c\|_S$, qu'on a introduit dans Z_n la somme entre parenthèses. Pour avoir une inégalité de cotype, on doit majorer $\|c\|_S$ à partir de $\|\sum_n c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T},dt)}$. C'est là qu'intervient une première propriété des polynômes trigonométriques :

$$\|c\|_S = \sup_{1\le n\le N} |C_n| \le \|\sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^1(\mathbb{T},dt)}. \tag{1.3}$$

♦ Schwartz [2] : Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970 : "applications radonifiantes".

Naturellement, on aurait pu prendre $f = 1$ et remplacer ici directement L^1 par L^2. Dans le résultat final, la perte de précision aurait été trop importante. Mais on a (inégalité de Schwarz) :

$$(1.4) \qquad \|\sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^1} \leq \|f \sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^2} \, \|\frac{1}{f}\|_{L^2} .$$

Nous choisirons $f > 0$ de manière que

$$(1.5) \qquad \|\frac{1}{f}\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} = 1 .$$

On aura alors

$$(1.6) \qquad \|c\|_S \leq \|\sum_n c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} ,$$

de sorte que ρ est de cotype $(2, S)$ avec

$$(1.7) \qquad {}^*\|\rho\|_{2,S} \leq 1 .$$

On prendra maintenant l'image $\alpha.\rho$; c'est la probabilité sur $\mathbb{C}^N$ définie par la suite de variables aléatoires $(\alpha_n Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ sur $(\mathbb{T}, dt)$.

Nous voulons maintenant une inégalité d'ordre dans l^2, donc nous devons majorer $\|\left(\sum_n |\alpha_n|^2 |Z_n|^2\right)^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)}$.

Nous utiliserons cette fois la majoration fondamentale des sommes trigonométriques :

$$(1.8) \qquad |e^{2i\pi nt} + \ldots + e^{2i\pi Nt}| \leq \text{Min}\left(\frac{2}{t}, N\right) .$$

Il y aura intérêt à ce que f soit la plus petite possible, mais avec $\|\frac{1}{f}\|_{L^2} = 1$. Elle devra, autant que possible, neutraliser $\frac{1}{t}$ au voisinage de $t = 0$; elle devra donc surtout être petite pour t voisin de 0, mais avec $\frac{1}{f} \in L^2$; $f(t) = t^{1/2}$ convient presque, mais $\frac{1}{f} \notin L^2$.

Nous prendrons

$$f(t) = k \begin{cases} t^{1/2} & \text{pour } \frac{1}{N} \le t \le 1 \ ; \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} & \text{pour } 0 \le t \le \frac{1}{N} \ ; \end{cases} \tag{1.9}$$

k étant choisi pour que $\left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} = 1$.

On doit prendre

$$k = (\log N + 1)^{1/2} \ . \tag{1.10}$$

On a aussitôt

$$|Z_n(t)|^2 \le k^2 t \cdot \frac{4}{t^2} = \frac{4k^2}{t} \quad \text{dans } \left[\frac{1}{N}, 1\right], \quad \text{donc}$$

$$\int_{\left[\frac{1}{N}, 1\right]} |Z_n(t)|^2 dt \le 4(\log N + 1) \log N$$

$$|Z_n(t)|^2 \le k^2 \frac{1}{N} N^2 = k^2 N \quad \text{dans } \left[0, \frac{1}{N}\right], \quad \text{donc}$$

$$\int_{\left[0, \frac{1}{N}\right]} |Z_n(t)^2| dt \le (\log N + 1) \ .$$

Finalement :

$$\int_{\mathbb{T}} |Z_n(t)|^2 dt \le (\log N + 1)(4 \log N + 1) \ . \tag{1.11}$$

On en déduit :

$$\left\| \sum_n |\alpha_n|^2 |Z_n(t)|^2 \right\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} \le \left(\sum_n |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} (\log N + 1)(4 \log N + 1) \ . \tag{1.12}$$

Donc $\alpha \cdot \rho$ est bien d'ordre $(2, l^2)$, avec

$$\| \alpha \cdot \rho \|_{2, l^2} \le \text{const.} \left(\sum_n |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} (\log N + 1) \ . \tag{1.13}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer directement le théorème de dualité (nous sommes en dimension finie, aucune difficulté de bidual ou d'approximation) : α est 2-radonifiante de $(l^2)' = l^2$ dans S, avec

$$\pi_2(\alpha) \leq \text{const.} \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{1/2} (\log N + 1) \,. \tag{1.14}$$

C'est, en termes d'applications radonifiantes, l'inégalité de Menchov, classique dans la démonstration du théorème de Menchov : <u>si $(X_n)_{1\leq n\leq M}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω,μ), de type $(2,l^2)$, avec</u>

$$\|X\|^*_{2,l^2} = \sup_{\|c\|_{l^2}\leq 1} \left\| \sum_n c_n X_n \right\|_{L^2(\Omega,\mu)} \tag{1.15}$$

<u>(avec $\|X\|^*_{2,l^2} = 1$ si c'est une suite orthonormée !), alors on a la majoration</u>

$$\left\| \sup_{1\leq n\leq N} |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n| \right\|_{L^2(\Omega,\mu)} \tag{1.16}$$

$$= \|\alpha \cdot X\|_{2,S} \leq \text{Const.} \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{1/2} (\log N+1) \|X\|^*_{2,l^2} \,.$$

Nous devons maintenant passer à la dimension infinie. La démonstration habituelle du théorème de Menchov découpe la suite des entiers ≥ 1 en tranches, la r-ième tranche étant $2^r \leq n < 2^{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$. Nous devrons nous placer dans les conditions générales du théorème de dualité, exposé XXV, § 3. de Schwartz [2]. C'est dans de tels cas que cette situation générale semble la plus indispensable. En reprenant la figure de la page XXV.4, nous prendrons E = G = espace des suites "finies", c-à-d. à nombre fini de termes non nuls, ou somme directe $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, $\mathbb{N}' = \{1,2,\ldots.\}$♦ ; $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ = espace de toutes les suites ou produit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$; v = multiplication diagonale α ; $U = l^2$. Alors $\mathcal{E}' = \mathcal{G}' = \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, $E' = G' = \mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, $u = \alpha$. L'espace V sera précisé plus loin, ce ne sera pas l'espace S des séries convergentes mais un sous-espace avec une topologie plus fine.

♦ Il est techniquement plus commode de prendre ici $n \geq 1$ et non $n \geq 0$.

Nous devons d'abord introduire la probabilité cylindrique ρ, de cotype (2,V). Elle sera définie par une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de "variables aléatoires" sur un espace mesuré $(\overline{\mathbb{T}}, \overline{dt})$. Mais ici, au lieu de prendre une probabilité, nous prendrons pour $\overline{dt}$ une mesure de masse $+\infty$; comme seul l'espace $L^2(\overline{\mathbb{T}}, \overline{dt})$ interviendra, c'est sans importance, et une multiplication par une fonction convenable ramènerait aussitôt à une probabilité.

L'espace $\overline{\mathbb{T}}$ sera la somme topologique d'une suite d'espaces $\mathbb{T}_r = [0,1]$, $r \in \mathbb{N}$, d'un espace $\mathbb{T} = [0,1]$. La mesure $\overline{dt}$ sera celle de Lebesgue sur chacun de ces intervalles. Et on posera, pour $2^r \leq n < 2^{r+1}$:

$$(1.17)\qquad \begin{cases} Z_n(\bar{t}) = f_r(\bar{t})(e^{2i\pi n\bar{t}} + \ldots + e^{2i\pi(2^{r+1}-1)\bar{t}}) \\ \qquad \text{pour } \bar{t} \in \mathbb{T}_r \ : \\ = 0 \quad \text{pour } \bar{t} \in \mathbb{T}_s,\ s \neq r\ ; \\ = (r+1)e^{2i\pi 2^r \bar{t}} \quad \text{pour } \bar{t} \in \mathbb{T}\ . \end{cases}$$

Cherchons l'inégalité de cotype. <u>On peut se contenter de prendre une suite finie</u> $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$; et c'est bien nécessaire, car on sera dans des conditions où la série de Fourier, autrement, ne convergerait pas !

$$(1.18)\qquad \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}'} c_n Z_n(\bar{t}) = f_r(\bar{t})(\sum_n C_n e^{2i\pi n\bar{t}}), \\ C_n = c_{2^r} + \ldots + c_n, \text{ pour } \bar{t} \in \mathbb{T}_r\ ; \\ \qquad = \sum_{r\in\mathbb{N}} (r+1)\, C_{2^{r+1}-1}\, e^{2i\pi 2^r \bar{t}} \quad \text{pour } \bar{t} \in \mathbb{T}\ . \end{cases}$$

Sur $\mathbb{T}_r$, nous choisirons f_r comme à (1.9) . Alors la même majoration qu'à (1.6) donnera, en posant $C_n = c_{2^r} + \ldots + c_n$, $M_r(c) = \sup_n |C_n| = \sup_{2^r \leq n < 2^{r+1}} |c_{2^r} + \ldots + c_n|$:

$$(1.19)\qquad M_r(c) \leq \|\Sigma\, c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T}_r, dt_r)}\ .$$

Il faut ajouter une majoration sur $\mathbb{T}$. Là, $\sum_n c_n Z_n$ est une série trigonométrique (lacunaire) ; si nous posons $S_r(c) = |c_{2^r} + \ldots + c_{2^{r+1}-1}| = |C_{2^{r+1}-1}|$, nous aurons, par Parseval :

$$(1.20) \qquad \sum_{r\geq o} (r+1)^2 S_r^2(c) = \| c_n Z_n \|^2_{L^2(\mathbb{T}, dt)} .$$

En intégrant maintenant pour $\mathbb{T}$, $\overline{dt}$:

$$(1.21) \qquad \sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)) \leq \| \sum_n c_n Z_n \|^2_{L^2(\mathbb{T}, \overline{dt})} .$$

C'est bien une inégalité de cotype. Introduisons l'espace V des suites $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$ telles que $\sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)) < +\infty$, avec la norme

$$(1.22) \qquad \|c\|_V = \Big(\sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)) \Big)^{1/2} .$$

On peut dire que V est l'espace $l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})$, où V_r est l'espace $\mathbb{C}^{\{2^r, \ldots, 2^{r+1}-1\}}$, muni de la norme $(M_r^2 + (r+1)^2 S_r^2)^{1/2}$; $l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})$ est l'espace des suites $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$; $x_r \in V_r$, telles que $\sum_{r\geq o} \|x_r\|^2_{V_r} < +\infty$, avec $\|(x_r)_{r\in\mathbb{N}}\|_{l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})} = \Big(\sum_{r\in\mathbb{N}} \|x_r\|^2_{V_r} \Big)^{1/2}$. Cet espace V n'est pas hilbertien, parce que la norme M_r est de type l^∞ ; mais, V_r étant de dimension finie, $V' = l^2((V'_r)_{r\in\mathbb{N}})$ et $V'' = V$, V est réflexif, de sorte que $\sigma(V'',V')$ n'interviendra pas, ce sera V lui-même.

Alors (1.21) donne l'inégalité de cotype :

$$(1.23) \qquad {}^*\|\rho\|_{2,V} \leq 1 .$$

Cherchons une inégalité d'ordre 2 dans $U = l^2$. On a, par le calcul fait pour (1.13) :

$$(1.24)\qquad \int_{\mathbb{T}_r} \sum_n |\alpha_n Z_n(t_r)|^2 \, dt_r \le \text{const.} \Big(\sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 \Big) (\log 2^r + 1)^2$$

$$\le \text{const.} \sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \ .$$

Ensuite, sur $\mathbb{T}$:

$$|Z_n(t)|^2 = (r+1)^2 \quad \text{pour } 2^r \le n < 2^{r+1} \ ,$$

donc

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_n |\alpha_n Z_n(t)|^2 \Big) \, dt = \sum_{r \in \mathbb{N}} (r+1)^2 \Big(\sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 \Big)$$

$$\le \text{const.} \sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \ .$$

Finalement :

$$(1.25)\qquad \int_{\overline{\mathbb{T}}} \Big(\sum |\alpha_n Z_n(\bar{t})|^2 \Big) d\bar{t} \le \text{const.} \sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \ ,$$

d'où l'inégalité d'ordre suivante : $\alpha \cdot \rho$ est de Radon sur l^2, et

$$(1.26)\qquad \|\alpha \cdot \rho\|_{2,l^2} \le \text{const.} \Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \Big)^{1/2} \ .$$

Le théorème de dualité (XXV.3;1) de Schwartz [2], compte-tenu de (XXV.4;1) qui élimine trivialement la condition d'approximation pour l^2, donne alors ceci : α est 2-radonifiante de l^2 dans V, et

$$(1.27)\qquad \pi_2(\alpha) \le \text{const.} \Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \Big)^{1/2} \ .$$

Comme l^2 est hilbertien, α est même 0-radonifiante (théorème (XXV.1;1) de Schwartz [1]).

Le passage de V à l'espace S des séries convergentes est maintenant immédiat : $V \subset S$, avec une injection continue. En effet, soit $c \in V$. Pour $2^r \le n < 2^{r+1}$: $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = C_1 + C_3 + \ldots + C_{2^r - 1} + C_n$ avec les notations de (1.19) ; la série $\sum_{r \in \mathbb{N}} C_{2^{r+1}-1}$ converge et même

converge absolument, car

$$\sum_{r\in\mathbf{N}} |C_{2^{r+1}-1}| = \sum_{r\in\mathbf{N}} S_r(c) \le \Big(\sum_{r\in\mathbf{N}} (r+1)^2 S_r^2(c)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{r\in\mathbf{N}} \Big(\frac{1}{r+1}\Big)^2\Big)^{1/2},$$

et C_n tend vers 0 pour $n\to\infty$, car $|C_n| \le M_r(c)$ pour $2^r \le n < 2^{r+1}$, et $\sum_r M_r^2(c) < +\infty$. Donc, pour $c\in V$, $\sum_n c_n$ converge, c-à-d. $c\in S$, et les majorations ci-dessus montrent que $V \subset S$ est continue. Donc α est 0-radonifiante de l^2 dans S, d'où le théorème de Menchov. On peut résumer tout ce paragraphe dans l'énoncé suivant :

Théorème 1 : L'application $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbf{N}'} \to (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}'}$ est 0-radonifiante de l^2 dans V donc dans S, si $\sum_n |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$. Si $(X_n)_{n\ge 1}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω,μ), de type (p,l^2), [si $c\in l^2$, $\sum_n c_n X_n$ converge en probabilité pour $p=0$, en moyenne d'ordre p pour $p>0$; $\|X\|^*_{p,l^2} = \sup_{\|c\|_{l^2}\le 1} \|\sum c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)}$ pour $p>0$; si la suite est orthonormée, elle est de type $(2,l^2)$, avec $\|X\|^*_{2,l^2} = 1$], et si $\sum_n |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$, la série $\sum_n \alpha_n X_n$ converge presque sûrement. En outre, pour $p>0$:

$$(1.28)\qquad \|\alpha\circ X\|_{p,S} = \big\|\sup_{n\ge 1} |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n|\big\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$
$$\le \|\alpha\circ X\|_{p,V} \le \text{const.}\Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2\Big)^{1/2} \|X\|^*_{p,l^2}.$$

Remarque : Si l'on tient compte de tout ce qui est écrit ici, et des antécédents que cela suppose, cette démonstration est plus compliquée que la démonstration "combinatoire" classique de Menchov. Mais elle a un caractère plus général puisqu'elle s'appuie sur le théorème de dualité, donc elle est susceptible de donner bien d'autres résultats analogues (c'est ce que montrera le § 2) ; en outre, le résultat obtenu est plus fort (puisque 0-radonifiant est plus fort que 2-radonifiant).

§ 2. LE THEOREME DE PELCZYNSKI-KWAPIEN

On raisonne ici d'un coup en dimension infinie. Ce qui, en effet, amena inévitablement le partage en tranches au § 1, c'est, dans (1.13), l'intervention de $\log N$; on partage en tranches dans chacune desquelles $\log N$ est à peu près égal à $\log n$ (pour $2^r \le n < 2^{r+1}$, $r \log 2 \le \log n < (r+1)\log 2$, donc, pour $N = 2^r$, $\log N \sim \log n$) ; et à son tour ce $\log N$ venait de la fonction f de (1.8), faisant intervenir le nombre N de termes. Si on prend p quelconque au lieu de $p = 2$, c'est $\|\frac{1}{f}\|_{L^{p'}} = 1$ qui remplacera $\|\frac{1}{f}\|_{L^2} = 1$; pour $p = 1$, comme nous allons le faire ici, on peut prendre $f = 1$, ce qui évite un partage en tranches. Nous prendrons ici $U = l^\infty$, $V = S$, $p = 1$.

Nous prendrons donc la probabilité cylindrique ρ définie sur $(\mathbb{T}, dt)$, $\mathbb{T} = [0,1]$, par la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de variables aléatoires

$$Z_n(t) = e^{2i\pi t} + \dots + e^{2i\pi nt} \,. \tag{2.1}$$

(Ce ne sont pas tout-à-fait les mêmes qu'au § 1, on ne pourrait pas prendre $e^{2i\pi nt} + e^{2i\pi(n+1)t} + \dots$ non convergente quand on prend une infinité de termes !).

Pour toute suite finie $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, on aura :

$$\sum_n c_n Z_n(t) = \sum_n C_n e^{2i\pi nt} \,, \tag{2.2}$$

où $C_n = c_n + c_{n+1} + \dots$ n'est pas non plus le même qu'au § 1 (rappelons qu'il s'agit d'une suite finie !).

La majoration pour le cotype est alors triviale : si nous prenons pour l'espace S une norme différente de celle du § 1, mais équivalente :

$$\|c\|_S = \sup_{n \ge 1} |(c_n + c_{n+1} + \dots)| \,. \tag{2.3}$$

on aura

$$(2.4) \qquad \|c\|_S = \sup_n |C_n| \le \|\Sigma\, c_n Z_n\|_{L^1(\mathbb{T},dt)}$$

ou

$$(2.5) \qquad {}^*\|\rho\|_{1,S} \le 1 \ \blacklozenge \ .$$

Cherchons maintenant une majoration d'ordre $(1,l^\infty)$.
On a toujours $|Z_n(t)| \le \mathrm{Min}(\frac{2}{t}, n)$. Alors

$$\sup_n |\alpha_n Z_n(t)| = \sup_n \left(|\alpha_n| (\mathrm{Min}\, \frac{2}{t}, n)\right) .$$

Nous écrirons

$$\int_{[0,1]} \sup_n |\alpha_n Z_n(t)|\, dt = \sum_{N\ge 1} \int_{[\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}]}$$

$$\le \sum_{N\ge 1} (\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}) \sup_n \left(|\alpha_n| \mathrm{Min}\,(2(N+1), n)\right) .$$

Appelons $(\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ la plus petite suite décroissante majorant $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}'}$, $\beta_n = \sup_{k\ge o} |\alpha_{n+k}|$.
Alors, pour $n \ge N$, $\mathrm{Min}(2(N+1), n) \le 2(N+1)$, et $|\alpha_n| \le \beta_n$, donc
$\sup_{n\ge N}(|\alpha_n| \mathrm{Min}(2(N+1), n)) \le 2\beta_N(N+1)$, et $(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \sup_{n\ge N} (|\alpha_n| \mathrm{Min}\,(2(N+1), n))$

$$\le \frac{2\beta_N}{N} .$$

Ensuite, pour $[\sqrt{N}] \le n \le N$, $\mathrm{Min}(2(N+1), n) = n \le N$, $|\alpha_n| \le \beta_{[\sqrt{N}]}$, donc

$$(\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}) \sup_{[\sqrt{N}]\le n\le N} (|\alpha_n| \mathrm{Min}(2(N+1), n)) \le \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} .$$

◆ Bien noter que ρ est une probabilité cylindrique sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, non sur $\sigma(S', S)$, car, pour $c \in S$, $\Sigma\, c_n Z_n$ ne converge pas en probabilité ! On est bien obligé de se placer dans la configuration compliquée de la figure de XXV.4.

Enfin, pour $n \le [\sqrt{N}]$, $\mathrm{Min}(2(N+1),n) = n \le \sqrt{N}$, $|\alpha_n| \le \beta_1$, donc $(\frac{1}{N} - \frac{1}{n+1}) \sup_{n \le [\sqrt{N}]} (|\alpha_n| \mathrm{Min}(2(N+1),n)) \le \frac{\beta_1}{N^{3/2}}$. Finalement :

En résumant :

$$(2.6) \qquad \| \sup_n |\alpha_n Z_n| \|_{L^1(\mathbb{T},dt)} \le \text{const.} \sum_{N \ge 1} \left(\frac{\beta_1}{N^{3/2}} + \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} + \frac{\beta_N}{N} \right) .$$

Mais la 1ère somme est $\le$ const. $\beta_1 \le$ const. $\sum_{N \ge 1} \frac{\beta_N}{N}$, la 3ème aussi. Et la 2ème aussi, car pour $m^2 \le N < (m+1)^2$, $\frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} \le \frac{\beta_m}{m^2}$, et cette tranche contient $2m+1$ termes. donc

$$\sum_{N \ge 1} \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} \le \sum_{m \ge 1} \beta_m \frac{2m+1}{m^2} \le \text{const.} \sum_{m \ge 1} \frac{\beta_m}{m} .$$

Finalement

$$(2.7) \qquad \| \alpha \circ \rho \|_{1, l^\infty} \le \text{const.} \sum_{n \ge 1} \frac{\beta_n}{n} .$$

Ici $U = l^\infty$. Pour obtenir une application rédonifiante avec le théorème de dualité, nous devons prendre l'adhérence de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ dans l^∞, qui est c^0, et prendre comme premier espace son dual $\sigma(l^1, c^0)$; la propriété d'approximation voulue est vérifiée. L'espace $V = S$ n'est pas réflexif, donc le 2ème espace sera seulement $\sigma(S'', S')$. On aura toutefois une autre manière de voir les choses. Le dual S' est l'espace des suites à variation bornée ; $c \in S'$ si $\|c\|_{S'} = |c_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |c_n - c_{n-1}| < \infty$; ce n'est pas un espace de suites normal, autrement dit $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ n'est pas dense dans S', de sorte que S'' ne peut pas être identifié à un espace de suites. Remplaçons alors l'espace $V = S$ par l'espace $V = \Sigma$ des suites à sommes partielles bornées, on le munira de la topologie induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, et de la fonction $\beta = \| \ \|_V$; $c \in \Sigma$ si $\|c\|_\Sigma = \sup_n |c_1 + c_2 + \ldots + c_n| < +\infty$; l'adhérence de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ dans Σ est S, avec une norme induite qui est celle du § 1, équivalente à (2.3).

Alors $^*\|\rho\|_{1,\Sigma}$ n'est autre que $^*\|\rho\|_{1,S}$ (avec la norme du δ 1 dans S), puisqu'on la calcule uniquement avec des suites finies $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$.
D'autre part β est compacte, autrement dit, la boule unité de Σ est compacte dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$.
On peut donc appliquer la proposition (XXV,3;1) Si λ est une probabilité cylindrique de type 1 sur $\sigma(l^1, c^o)$, et si $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est une suite telle que l'on ait $\sum_n \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, $\beta_n = \sup_k |\alpha_n + \ldots + \alpha_{n+k}|$, alors α, λ est une probabilité de Radon sur Σ muni de la topologie induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, d'ordre 1 pour la norme de Σ. On aura un énoncé correspondant en termes de suites de variables aléatoires.
Si maintenant on peut écrire $\alpha_n = \varepsilon_n \alpha'_n$, avec $\beta'_n = \sup_{k\geq o} |\alpha'_n + \ldots + \alpha'_{n+k}|$, et $\sum_n \frac{\beta'_n}{n} < +\infty$, alors on aura une factorisation $\alpha = \varepsilon \circ \alpha'$; et si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est ≥ 0, décroissante♦ et tend vers 0, ε est compacte de S dans S (théoreme d'Abel), et α sera 1-radonifiante de $\sigma(l^1, c^o)$ dans S lui-même.
On aura finalement les résultats suivants :

<u>Théorème 2</u> : <u>L'application</u> $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbb{N}'} \to (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ <u>est 1-radonifiante de</u> $\sigma(l^1, c^o)$ <u>dans</u> $\sigma(S'', S')$, <u>ou dans</u> Σ <u>muni de la topologie induite par</u> $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$ <u>et de sa norme pour le calcul de l'ordre d'une probabilité de Radon, si</u> $\sum_n \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, <u>où</u> $\beta_n = \sup_{k\geq o} |\alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}|$; <u>si</u> $\alpha_n = \varepsilon_n \alpha'_n$, <u>où</u> ε_n <u>tend vers</u> 0, $\beta'_n = \sup_{k\geq o} |\alpha'_n + \ldots + \alpha'_{n+k}|$, $\sum_n \frac{n}{n} < +\infty$ <u>(ces conditions seront vérifiées si</u> $|\alpha_n| \leq (\log n)^{-1-\delta}$, $\delta > 0$). <u>elle est 1-radonifiante de</u> l^1 <u>dans S.</u>

<u>Si</u> $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ <u>est une suite de variables aléatoires sur</u> (Ω, μ), <u>de type</u> (p, c^o), $p \geq 1$, [<u>c-à-d, si, pour toute suite</u> $c \in c^o$, $\sum_n c_n X_n$ <u>converge en moyenne d'ordre p, cela veut exactement dire que la suite</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ <u>de</u> $L^p(\Omega, \mu)$ <u>est scalairement</u> l^1 ; <u>et alors</u> :

♦ Au lieu de la factorisation $\varepsilon \circ \alpha'$, on peut prendre $\alpha' \circ \varepsilon$, et faire opérer ε comme opérateur compact $l^1 \to l^1$, un raisonnement analogue à celui de Schwartz [2], prop,(XII,2;12) peut alors être utilisé ; et alors il n'est plus nécessaire de supposer décroissante.

$$\|X\|^*_{p,c^o} = \left[\sup_{\|c\|_{c^o} \le 1} \|\Sigma_n c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} \right],$$

et si α vérifie les conditions ci-dessus, alors $\Sigma_n \alpha_n X_n$ a presque sûrement des sommes partielles bornées (et converge presque sûrement dans le cas de la factorisation $\alpha = \varepsilon \circ \alpha'$). Et

$$\| \sup_n |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n| \|_{L^p(\Omega,\mu)} \le \text{const.} \left(\Sigma_n \frac{\beta_n}{n}\right) \|X\|^*_{p,c^o} .$$

BIBLIOGRAPHIE

Schwartz [1] : "Probabilités cylindriques et applications radonifiantes", à paraître dans le Journal de la Société Mathétique Japonaise.

Schwartz [2] : "Application radonifiantes", Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970.