Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Chevet

(Conférence n°2) Une propriété caractéristique des processus linéaires continus. Applications aux opérateurs p-radonifiants

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 32, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A35_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

D E U X J O U R N E E S p - R A D O N I F I A N T E S

UNE PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES PROCESSUS LINEAIRES CONTINUS

APPLICATIONS AUX OPERATEURS p-RADONIFIANTS

par S. CHEVET

Conférence N° 2

25 Janvier 1972

Nous rappelons une caractérisation des fonctions aléatoires linéaires continues sur un Banach donnée par NIKISIN dans [9] et donnons quelques applications de cette caractérisation aux opérateurs p-radonifiants. Nous montrerons ainsi la conjecture suivante de PIETSCH : "tout opérateur p-sommant d'un Banach dans un autre avec $0<p<1$ est 0-sommant au sens de KWAPIEN [1]"; MAUREY [2] a trouvé une démonstration très différente de cette conjecture.

§1. NOTATIONS, RAPPELS, DEFINITIONS.

Dans tout cet exposé, E désignera un espace vectoriel, p un élément de $[0,\infty]$, Ω un espace topologique séparé et P une probabilité de Radon sur Ω ; sur $L^0(\Omega,P)$, J_α $(\alpha>0)$ désignera la jauge de l'ensemble équilibré $V_\alpha = \{f\ ;\ f\in L^0(\Omega,P)\ ;\ P(|f|>1)\leq\alpha\}$; si G est un espace normé, U_G désignera sa boule unité et $\mathcal{E}(\Omega,P\ ;\ G)$ l'espace des P-classes de fonctions étagées sur Ω à valeurs dans G.

Soit alors $\varepsilon>0$ et (Ω,P,L) une fonction aléatoire sur E (c'est-à-dire une application L de E dans $L^0(\Omega,P)$).

Définition 1.- On appelle <u>ε-tronquée</u> de L, toute fonction aléatoire (Ω,P,L_ε) sur E pour laquelle il existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ de P-mesure $\geq 1-\varepsilon$ tel que $L_\varepsilon(x) = 1_{\Omega_\varepsilon} L(x)$, pour tout $x\in E$.

Trivialement, toute ε-tronquée d'une fonction aléatoire linéaire est une fonction aléatoire linéaire ; si E_1 est un autre espace vectoriel, u une application linéaire de E_1 sur E et (Ω,P,L_ε) une ε-tronquée de L, alors $(\Omega,P,L_\varepsilon \circ u)$ est une ε-tronquée de $(\Omega,P,L\circ u)$.

Définition 2.- Si E est un espace vectoriel topologique, la fonction aléatoire L est dite continue (ou de type 0) si $L : E\to L^0(\Omega,P)$ est continue ; elle est dite de <u>type</u> p, si L est à valeurs dans $L^p(\Omega,P)$ et si $L : E\to L^p(\Omega,P)$ est continue.

Soit G un Banach, (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur G' et μ_L la mesure cylindrique sur G associée à L. Notons que

$$\sup_{x\in U_{G'}} J_\alpha(L(x)) = J_\alpha^*(\mu_L), \text{ pour tout réel } \alpha>0,$$

où J_α^* est défini comme dans [6], c'est-à-dire : $J_\alpha^*(\mu_L) = \sup_{x\in U_{G'}} J_\alpha(x\circ\mu_L)$

avec $J_\alpha(x\circ\mu_L) = \inf\{t ; t>0 ; (x\circ\mu_L)\{u ; |u|>t\} \le \alpha\}$.

Nous avons équivalence d'une part (d'après KWAPIEN) de :

a) μ_L a une image dans $\sigma(G'',G')$ qui est de Radon ;

b) $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$;

c) pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $R_\varepsilon>0$, tel que $P(\sup_{x\in S}|L(x)|>R_\varepsilon) \le \varepsilon$, pour toute partie finie S de $U_{G'}$;

et d'autre part (d'après SCHWARTZ, [6], Prop (XIII,3 ; 1)) de :

a') μ_L est de Radon sur G ;

b') L est décomposée, c'est-à-dire il existe $\varphi : \Omega\to G$, P-Lusin mesurable telle que pour tout $x\in G$, la classe de $x\circ\varphi$ est égale à $L(x)$;

c') pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un compact K_ε de G tel que $P(\sup_{x\in S}|L(x)|>1)\le\varepsilon$, pour toute partie finie S de K_ε^0.

Remarque 1.- Le lecteur pourra trouver aussi une preuve complète de ces équivalences dans [8].

Remarque 2.- Dans c') on peut prendre pour K_ε un compact faible ; et ainsi c) et c') sont équivalentes si G est réflexif.

Remarque 3.- Si φ et φ' décomposent (Ω,P,L), alors φ et φ' sont égales P-presque partout d'après la proposition (XIII,3 ; 1) de SCHWARTZ dans [6].

Remarque 4.- Soit $(\Omega,P,1_{\Omega_\varepsilon}L(.)) = (\Omega,P,L_\varepsilon)$ une ε-tronquée de L. Si L est décomposée par φ, alors L_ε est décomposée par $\varphi_\varepsilon : \omega\to 1_{\Omega_\varepsilon}.\varphi(\omega)$

et $J_{\alpha+\varepsilon}(\|\varphi\|) \leq J_\alpha(\|\varphi_\varepsilon\|)$, pour tout réel $\alpha>0$.

Nous obtenons immédiatement la proposition suivante :

Proposition.- Soit G un Banach et (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur G'. Alors :

1) si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ε-tronquée de L décomposée, L est décomposée ;

2) si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ε-tronquée de L, soit L_ε, telle que $L_\varepsilon(U_{G'})$ soit latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$, $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$;

3) si $L(U_{G'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ une ε-tronquée de L de type infini.

Soit maintenant G et F deux Banach et u un opérateur linéaire continu de G dans F.

Définition 3.- u est dite $(p,0)$-radonifiante de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) si pour toute probabilité cylindrique μ sur G de type p, $u(\mu)$ est de Radon sur F (resp.a une image dans $\sigma(F'',F')$ de Radon). Nous dirons u 0-radonifiante au lieu de u $(0,0)$-radonifiante.
Donc, u est $(p,0)$-radonifiante de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) si et seulement si pour toute fonction aléatoire linéaire sur G' de type p, soit (Ω,P,L), $L\circ u'$ est décomposée (resp. $L\circ u'(U_{F'})$ est latticiellement borné dans $L^0(\Omega,P)$).

Définition 4.- Si $p>0$, u est dite p-sommante si pour toute suite $(x_n)_n$ dans G scalairement de puissance p-ième-sommable, $(u(x_n))_n$ est de puissance p-ième-sommable.
Alors, u est p-sommante $(0<p<\infty)$ si et seulement si il existe un réel $K>0$ tel que

$$\left(\int \|u(x)\|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq K \sup_{x'\in U_{G'}} \left(\int |\langle x,x'\rangle|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$$

pour toute probabilité de Radon μ sur G à support fini. On note $\pi_p(u)$ le plus petit K vérifiant l'inégalité ci-dessus.

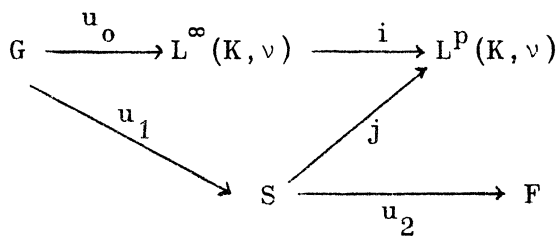
u est dite 0-sommante au sens de KWAPIEN [1] si, pour tout réel $\beta>0$, il existe deux réels >0, K et δ, tels que

$$J_\beta (\| u(\mu) \|) \leq K J^*_\delta (\mu)$$

pour toute probabilité de Radon μ sur G à support fini.

$\pi_p(G,F)$ désignera l'ensemble des opérateurs p-sommants de G dans F.

Remarque 5.- D'après l'erratum de [6] et d'après [7], u est p-sommante ($0\leq p\leq\infty$) si et seulement s'il existe un compact K, une probabilité de Radon ν sur K, un sous-espace vectoriel fermé S de $L^p(K,\nu)$, muni de la topologie induite par celle de $L^p(K,\nu)$, une application linéaire continue u_o de G dans $L^\infty(K,\nu)$ et une application linéaire continue u_2 de S dans F, telle que u admette la factorisation



$u = u_2 \circ u_1$

i, j injections naturelles

§2. ENONCE ET PREUVE D'UN THEOREME FONDAMENTAL.

Définition 5.- Soit E un espace vectoriel topologique et $p \in]0,\infty]$; nous dirons que E vérifie la condition (C_p) si, pour tout $\varepsilon>0$ et pour toute fonction aléatoire linéaire continue sur E, soit (Ω,P,L), il existe une ε-tronquée de L de type p.

Si E vérifie (C_p), il vérifie aussi trivialement (C_q) pour

tout $q \in]0, p]$; nous poserons $\alpha(E) = \sup \{p ; p \in]0,\infty] ; E$ vérifie $(C_p)\}$.

Si E est un Banach de dimension finie, E vérifie (C_∞) d'après la partie 3) de la proposition puisque toute mesure cylindrique sur E' est de Radon sur $\sigma(E',E)$.

Remarque 6.- Par définition même, si E est un espace normé vérifiant (C_p), alors $\mathcal{L}(E, L^p(\Omega, P))$ est partout dense dans $\mathcal{L}_b(E, L^0(\Omega, P))$ pour tout (Ω, P).

Théorème 1.- a) Tout espace localement convexe E vérifie (C_p) pour tout $p \in]0,1[$ $(\Rightarrow \alpha(E) \geq 1)$.

b) Il existe des Banach E ne vérifiant pas (C_1) (il en est ainsi de $E = l^1$).

c) Si E est un Banach isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé d'un $L^q(S,\mathcal{S},\mu)$ avec $1<q<\infty$, $(S,\mathcal{S},\mu)$ espace mesuré, alors E vérifie (C_p) pour tout $p \in]0, \min(q,2)[$ $(\Rightarrow \alpha(E) \geq \min(q,2))$.

Le résultat a) dans le cas où E est un Banach (resp. le résultat c)) est une conséquence immédiate du théorème 1 (resp. du théorème 2) du §2 de l'article [9] de NIKĬSIN. Notons que nous avons démontré dans [10] le théorème énoncé ci-dessus sans connaître cet article de NIKĬSIN dans [9].

Nous allons donner une preuve des parties a) et c) du théorème 1 (la preuve de b) sera établie dans le corollaire 5 du §3). Pour montrer ce théorème nous avons besoin de lemmes préliminaires ; le théorème 1 sera une conséquence immédiate des 2 derniers lemmes (lemmes 5 et 6).

Commençons par énoncer les lemmes.

Lemme 1.- NIKISIN [3 ou 9].- Soit Ω un espace topologique séparé, P une probabilité de Radon sur Ω et l un entier >0. Soit aussi A_i et B_i $(i = 1,\ldots,l^3)$ des parties P-mesurables de Ω. Si les A_i $(i=1,\ldots,l^3)$ sont disjoints 2 à 2, alors il existe l entiers $i_1,\ldots,i_l$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq l^3$ et tels que

$$P\left(\bigcup_{\substack{k\neq k' \\ k,k'=1,..,l}} (A_{i_k} \cap B_{i_{k'}}) \right) \leq \frac{1}{l} \sup_{1\leq i\leq l^3} P(B_i),$$

donc tels que

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{l} (A_{i_k} \cap (\bigcap_{\substack{k'\neq k \\ k'=1,...,l}} \complement (B_{i_{k'}}))) \right] \geq 1 \inf_{1\leq i\leq l^3} P(A_i) - \frac{1}{l} \sup_{1\leq i\leq l^3} P(B_i$$

Lemme 2.- Soit E un espace vectoriel, (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur E, l un entier >2, R un réel ≥ 0 et η un réel >0. Soit U une partie disquée de E telle que

(1) : $\sup_{x\in U} P(|L(x)|>R) \leq \eta.$

Alors, il existe $s\leq l^3$ éléments de U, soit $x_1,\ldots,x_s$ tels que

(2) : $\sup_{x\in U} P(\sup_{1\leq i\leq s} |L(x_i)| \leq R ; |L(x)| > 2\beta R) \leq \frac{2}{l}\eta$

avec $\beta = l$. ■

Lemme 3.- Soit $(S,\mathcal{S},\mu)$, $(R,\mathcal{R},\nu)$ deux espaces mesurés, r et q deux réels ≥ 1. Si F est un Banach isomorphe à un sous-espace (fermé) F_1 de $L^q(R,\mathcal{R},\nu)$, si $x_1,\ldots,x_n$ sont n éléments de $E = L^r(S,\mathcal{S},\mu)$ et $y_1,\ldots,y_n$ n éléments de F, alors il existe n réels $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ tels que

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad i=1,\ldots,n,$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|_E \leq C_r \, 2^{1/r} \, n^{\frac{1}{\min(r,2)}} \sup \| x_i \|_E ,$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \|_F \leq d(F,F_1) \, C_q \, 2^{1/q} \, n^{\frac{1}{\min(q,2)}} \sup \| y_i \|_F ,$$

avec $C_p = \sup_{(c_n)_n \in U_{l^2}} \| \sum_m c_m X_m \|_{L^p(\Omega,P)}$, où $(X_m)_m$ est une suite de

Rademacher sur (Ω,P) et $d(F,F_1) = \inf \|T\| \, \|T^{-1}\|$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des isomorphismes T de F sur F_1.

Lemme 4.- Soit E un Banach isomorphe à un sous-espace F_1 d'un $L^q(\mathbb{R},\mathfrak{R},\nu)$ avec $1\leq q<\infty$. Soit (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire sur E, R un réel >0 et η un réel >0. Soit l un entier >2. Supposons que $U = U_E$ vérifie la condition (1) du lemme 2. Alors, on a (2) avec $\beta = M_q l^{1/\min(q,2)}$, où $M_q = 2^{1/q} C_q \, d(E,F_1) + 6^{1/\min(q,2)}$.

Lemme 5.- Sous les hypothèses du lemme 2, il existe une partie P-mesurable de Ω, soit Ω_1, telle que

$$(3) \quad P(\complement\Omega_1) \leq \frac{l^4\eta}{l-2}, \quad \sup_{x\in U} P(\Omega_1 ; |L(x)|>yR) \leq \frac{l\eta}{2} y^{-\gamma(l)}$$

pour tout réel $y\geq 1$, avec $\gamma(l) = \frac{\mathrm{Log}(l/2)}{\mathrm{Log}2l}$.

Lemme 6.- Sous les hypothèses du lemme 4, il existe une partie P-mesurable de Ω, soit Ω_1, telle que

$$P(\complement\Omega_1) \leq \frac{l^4\eta}{l-2}, \quad \sup_{x\in U} P(\Omega_1 ; |L(x)| >yR) \leq \frac{l\eta}{2} y^{-\gamma'(l)}$$

pour tout réel $y\geq 1$, avec $\gamma'(l) = \frac{\mathrm{Log}(l/2)}{\mathrm{Log}2M_q l} \cdot \min(q,2)$ (M_q étant défini comme dans le lemme 4).

Preuve partielle des lemmes.- Nous ne démontrerons pas les lemmes 1 et 3. Le lemme 2 (resp.le lemme4) résulte du lemme 1 (resp. du lemme 1 et 3). Le lemme 5 (resp.le lemme 6) résulte du lemme 2 (resp. du lemme 4).

Preuve des lemmes 2 et 4.- Supposons (1) vérifiée. Posons pour tout $x\in U$ et tout réel $\beta>1$, $\psi_\beta(x) = \{|L(x)| \geq 2\beta R\}$ et $\varphi(x) = \{|L(x)| \leq R\}$.
Supposons qu'il existe l^3 éléments de U, soit $x_1,\ldots,x_{l^3}$, tels que

$$P\left[\phi_\beta(x_k)\cap\left(\bigcap_{i=0}^{k-1}\Phi(x_i)\right)\right] > \frac{2}{l}\eta,\ k=1,\dots,l^3 \quad (\text{avec } x_0=0).$$

Posons alors $A_k=\phi_\beta(x_k)\cap\left(\bigcap_{i=0}^{k-1}\Phi(x_i)\right)$ et $B_k=\int\Phi(x_k)$ pour $k=1,\dots,l^3$; les A_k $(k=1,\dots,l^3)$ sont disjoints 2 à 2, donc par le lemme 1, il existe l entiers $1\le i_1<\dots<i_l\le l^3$ tels que

$$\Omega'=\bigcup_{k=1}^{l}\left(A_{i_k}\cap\left(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}})\right)\right)$$

vérifie

(4) $$P(\Omega')> l.\frac{2}{l}\eta-\frac{\eta}{l}\ge\frac{3}{2}\eta.$$

$1^{\underline{er}}$ cas : <u>$\beta=1$; U partie disquée de E</u>

Alors, sur $A_{i_k}\cap\left(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}})\right)\subset\phi_1(x_{i_k})\cap\left(\bigcap_{k'\neq k}\Phi(x_{i_{k'}})\right)$,

$$|L(x_{i_1}+\dots+x_{i_l})|\ge|L(x_{i_k})|-\sum_{k'\neq k}|L(x_{i_{k'}})|>2lR-(l-1)R\ge lR\ ;$$

donc, pour $y=\frac{1}{l}(x_{i_1}+\dots+x_{i_l})\in U$, on a $P(|L(y)|>R)\ge P(\Omega')>\eta$, ce qui contredit l'hypothèse (1) du lemme 2. Nous en déduisons le lemme 2.

$2^{\underline{e}}$ cas : <u>$\beta=M_q l^{1/\min(q,2)}$; U comme dans le lemme 4</u>.

Posons $r=\min(q,2)$, $\rho=2^{1/q}C_q\,d(E,F_1)$ et $X_k=1_{\Omega'\setminus A_{i_k}}L(x_{i_k})$;

$(k=1,\dots,l)$. Alors

$$\|X_k\|_{L^r(\Omega,P)}\le R(P(\Omega'))^{1/r},\quad k=1,\dots,l\ ;$$

et d'après le lemme 2, il existe l réels $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_l$ tels que $\varepsilon_i=\pm1$ $(i=1,\dots,l)$ et tels que

$$\left\|\sum_{k=1}^{l}\varepsilon_k X_k\right\|_{L^r(\Omega,P)}\le R(2lP(\Omega'))^{1/r},\ \sum_{k=1}^{l}\varepsilon_k x_{i_k}\in\rho l^{1/r}U.$$

Comme sur Ω'

$$\left| \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k L(x_{i_k}) \right| + \left| \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k X_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k \, 1_{A_{i_k}} L(x_{i_k}) \right| > 2\beta R$$

nous avons, en posant $y = \dfrac{1}{\rho \, l^{1/r}} \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k x_{i_k}$,

$$y \in U \quad \text{et} \quad P(\Omega') \leq P(|L(y)| > R) + P\left(\left| \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k X_k \right| > (2M_q - \rho) l^{1/r} R \right)$$

donc

$$P(\Omega') \leq \eta + \frac{2P(\Omega')}{(2M_q - \rho)^r} \leq \eta + \frac{1}{3} P(\Omega').$$

D'où $P(\Omega') \leq \frac{3}{2} \eta$, ce qui contredit (4). Nous en déduisons le lemme 4.

.Preuve des lemmes 5 et 6.- Si U est comme dans le lemme 2 (resp. comme dans le lemme 4) par récurrence on déduit du lemme 2 (resp. du lemme 4) qu'il existe une partie Ω'' de Ω telle que

$$P(\complement\Omega'') \leq l^3 \eta \, (1 + \tfrac{2}{l} + (\tfrac{2}{l}) + \ldots) = \frac{l^4 \eta}{l-2},$$

$$\sup_{x \in U} P(\Omega'' ; |L(x)| > (2\beta)^n R) \leq (\tfrac{2}{l})^n \eta$$

avec $\beta = 1$ (resp. $\beta = M_q \, l^{1/\min(q,2)}$) ; nous en déduisons facilement le lemme 5 (resp. le lemme 6).

Démontrons maintenant les parties a) et c) du théorème 1. Montrons a). Soit E un espace localement convexe, p dans $]0,1[$, $\varepsilon > 0$ et (Ω, P, L) une fonction aléatoire linéaire continue sur E. Soit l un entier tel que $\gamma(l) > p$ (ce qui est possible puisque $\gamma(l) \uparrow 1$, quand $l \uparrow \infty$) et posons $\eta = \dfrac{l-2}{l^4} \varepsilon$.

L étant continue, il existe un voisinage disqué de zéro dans E, soit V_ε tel que $\sup_{x \in V_\varepsilon} P(|L(x)| > 1) \leq \eta$; d'où, par le lemme 5

(appliqué à $U=V_\varepsilon$) et la théorie de l'intégrale Riemann-Stieljes il existe une partie $\Omega_{\varepsilon,1}$ de Ω telle que

$$P(\Omega_{\varepsilon,1}) \geq 1-\varepsilon \ , \quad \sup_{x \in V_\varepsilon} \int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |L(x)|^p \, dP \leq 1 + \frac{1\eta}{2} \int_1^\infty y^p dy^{-\gamma(1)}$$

et comme $\gamma(1)>p$, $L_\varepsilon : x \to 1_{\Omega_{\varepsilon,1}} L(x)$ est une ε-tronquée de L de type p sur E.

Notons que si E est un Banach, on peut prendre $V_\varepsilon = R_\varepsilon U_E$ avec $R_\varepsilon>0$.

Montrons c). Si E est un Banach isomorphe à un sous-espace d'un $L^q(S,\mathcal{S},\mu)$ $(1<q<\infty)$, on peut d'après le lemme 6, remplacer $\gamma(1)$ par $\gamma'(1)$; et comme $\gamma'(1) \uparrow \min(q,2)$ quand $1 \uparrow \infty$, on montre de manière analogue que E vérifie (C_p) pour tout p dans $]0,\min(q,2)[$.

Remarque 7.- Si E est un Banach et si $\sup_{x \in U_\varepsilon} J_\eta(L(x))=b_\varepsilon$, on peut prendre dans la preuve ci-dessus de a), $V_\varepsilon = \frac{1}{b_\varepsilon} U_E$ si $b_\varepsilon \neq 0$ et $V_\varepsilon=E$ si $b_\varepsilon=0$; et alors

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,1}} |L(x)|^p \, dP\right)^{1/p} \leq b_\varepsilon \left(1+\frac{1\eta}{2} \int_1^\infty y^p \, dy^{-\gamma(1)}\right)^{1/p}.$$

Nous en déduisons le

Théorème 2.- Soit E un Banach ; alors, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $p \in]0,1[$ il existe deux constantes >0, $K=K_{p,\varepsilon}$ et $\eta=\eta_{p,\varepsilon}$, telles que pour toute fonction aléatoire linéaire continue (Ω,P,L) sur E il existe une ε-tronquée de L, soit (Ω,P,L_ε), vérifiant

$$\sup_{x \in U_E} \left(\int |L_\varepsilon(x)|^p \, dP\right)^{1/p} \leq K \sup_{x \in U_E} J_\eta(L(x)).$$

Remarque 8.- La partie a) du théorème 1 donne une caractérisation des parties convexes bornées de $L^0(\Omega,P)$.

§3. APPLICATIONS des THEOREMES 1 et 2 et PROBLEMES.

Théorème 3.- Soit G et F deux Banach arbitraires. On a

$$\pi_o(G,F) = \pi_p(G,F), \text{ pour tout } p \text{ dans } [0,1[.$$

Démonstration.- Nous savons déjà que $\pi_o(G,F) \subset \pi_p(G,F)$ pour tout réel $p \geq 0$. D'autre part soit $u \in \pi_p(G,F)$; grâce au théorème 2 et à la remarque 4, nous avons

$$J_{2\varepsilon}(\| u(\varphi) \|) \leq \frac{\pi_p(u)}{\varepsilon^{1/p} K_{p,\varepsilon}} \sup_{x \in U_{G'}} J_{\eta_{p,\varepsilon}}(x \circ \varphi)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, tout (Ω,P) et tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega,P ; G)$; d'où $u \in \pi_o(G,F)$.

Remarque 9.- MAUREY [2] a montré que si $u \in \pi_p(G,F)$ pour un p de $[0,1[$, alors $\sup_{p>0} \pi_p(u) < +\infty$; nous ne savons pas établir ce résultat par notre méthode.

Théorème 4.- Soit G et F deux Banach. Si G' vérifie (C_p), tout opérateur $(p,0)$-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) est 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Démonstration.- Soit $u : G \to F$ un opérateur $(p,0)$-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) et soit (Ω,P,L) une fonction aléatoire linéaire continue arbitraire sur G'. G' vérifie (C_p), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une ε-tronquée L_ε de L de type p. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon \circ u'$ est une ε-tronquée de $(\Omega,P,L \circ u')$ décomposée (resp. avec $L_\varepsilon \circ u'(U_{F'})$ latticiellement borné dans $L^o(\Omega,P)$). D'où, par la partie 1 (resp.2) de la proposition du §1, $(\Omega,P,L \circ u')$ est décomposée (resp. $L \circ u'(U_{F'})$ est latticiellement borné dans $L^o(\Omega,P)$). Nous en déduisons que u est 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Corollaire 1.- Soit G et F deux Banach arbitraires et u un opérateur linéaire continu de G dans F. Si u est $(p,0)$-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$) pour un certain p de $]0,1[$, u est aussi 0-radonifiant de G dans F (resp. de G dans $\sigma(F'',F')$).

Corollaire 2.- Si G est un Banach dont le dual vérifie (C_p) pour un certain $p\geq 1$, alors

$$\pi_p(G,F) = \pi_o(G,F) \text{ , pour tout Banach F.}$$

Démonstration.- On a toujours $\pi_o(G,F) \subset \pi_p(G,F)$. D'autre part, soit $u \in \pi_p(G,F)$. D'après SCHWARTZ [6,prop(XII,1 ; 1)] u est $(p,0)$-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$ puisque $p\geq 1$; donc, par le théorème 4, u est 0-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$. Enfin d'après SUNYACH [7], u est 0-sommant.

Remarque 10.- Le théorème 3 ne peut se déduire à priori du Corollaire 1, car si $p<1$, on ignore si un opérateur p-sommant de G dans F est $(p,0)$-radonifiant de G dans $\sigma(F'',F')$.

Remarque 11.- Soit G un Banach. S'il existe $p\geq 1$ tel que $\pi_p(G,F) = \pi_o(G,F)$ pour tout Banach F, G' vérifie-t-il la condition (C_p) ?

Grâce à la partie c) du théorème 1, le corollaire 2 donne le corollaire 3.

Corollaire 3.- (KWAPIEN [1]).- Si q est un réel >1 et $(S,\mathcal{S},\mu)$ un espace mesuré, on a

$$\pi_p(L^{q'}(S,\mathcal{S},\mu),F) = \pi_o(L^{q'}(S,\mathcal{S},\mu),F) \quad (\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1)$$ pour tout p dans $]0,\min(q,2)[$ et tout Banach F.

Corollaire 4.-(NIKIŠIN [4]).- Pour tout p dans $[1,\infty[$

$$\alpha(l^p) = \min(p,2)$$

Plus précisément, si $1 \leq p < 2$, l^p ne vérifie pas la condition (C_p).

Démonstration.- Nous savons déjà que $\alpha(l^p) \geq \min(p,2)$. Pour montrer le corollaire 4, nous utilisons la remarque 11. Si p est dans $[2,\infty[$, on a d'après PIETSCH [5, exposé 31, p.20]

$$\pi_2(l^{p'}, l^{2+\varepsilon}) \subsetneq \pi_{2+\varepsilon}(l^{p'}, l^{2+\varepsilon})$$

pour tout réel $\varepsilon > 0$; et comme par KWAPIEN [1],

$$\pi_o(l^{p'}, E) = \pi_2(l^{p'}, E) \tag{5}$$

pour tout Banach E, on en déduit que

$$\alpha(l^p) = \min(p,2) \quad , \text{ si } p \in [2,\infty[.$$

D'autre part, si $1 < p < 2$ (resp. $p = 1$) et si $(a_n)_n$ est un élément de l^p, tel que $\sum_n |a_n|^p \left(1 + \operatorname{Log} \frac{1}{|a_n|}\right) = +\infty$, l'opérateur $u : (x_n)_n \to (a_n x_n)_n$ de $l^{p'}$ dans l^p (resp. de c_o dans l^1) est p-sommant (trivial) sans être 0-sommant d'après le théorème (XXVI,4 ; 1) de SCHWARTZ [6]. Donc, si $p \in [1,2[$, l^p ne vérifie pas (C_p).

Problème 2.- Si $p \in [2,\infty[$, l^p vérifie-t-il (C_p)? Notons que si la réponse au problème 1 est oui, la réponse à ce nouveau problème sera oui également, d'après (5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] KWAPIEN, Studia Mathematica,38, 1970, p.193-201.

[2] MAUREY, Symposium Ecole Polytehnique du 25-26 Janvier 1972.

[3] NIKISIN, Mat. Sb., 81, n°123, 1970, p.23-38.

[4] NIKISIN, Math. U.S.S.R. Izvestija, 4, n°3, 1970, p.628-644.

[5] PIETSCH, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-1971, Ecole Polytechnique, Paris.

[6] L. SCHWARTZ, Séminaire Schwartz 1969-1970, Ecole Polytechnique, Paris.

[7] SUNYACH, Séminaire Schwartz 1969-1970, Ecole Polytechnique, Paris.

[8] BADRIKIAN, CHEVET, Séminaire Clermont-Fd 1970-1971, Lecture Notes (à paraître).

[9] NIKISIN, Translation of contents of Uspekhi Matematicheskikh Nauk, vol XXV, n°6, November-December 1970, p.129-187.

[10] CHEVET, C.R.A.S, Novembre 1971.