Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Schwartz

Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 24, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A24_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

DESINTEGRATION REGULIERE D'UNE MESURE PAR RAPPORT A UNE FAMILLE DE TRIBUS

par L. SCHWARTZ

Exposé N° XXIV

19 Avril 1972

§ 1. DEFINITION, EXISTENCE ET UNICITE

Soient Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω, λ une mesure ≥ 0 sur Ω, $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de sous-tribus de la tribu λ-mesurable, indexée par $\mathbb{R}$ (considérée comme axe des temps), croissante ($\mathcal{T}^s \subset \mathcal{T}^t$ pour $s \leq t$) et continue à droite ($\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{T}^{t'}$).

On suppose en outre que la restriction de λ à chaque $\mathcal{T}^t$ est σ-finie.

Cette situation se présente dans l'étude des processus stochastiques. Un processus, à espace d'états E, est une application X de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans E; appelons X^t la fonction $\omega \to X(t,\omega)$ et X_ω la fonction $t \to X(t,\omega)$; on écrira donc aussi X^t_ω pour $X(t,\omega)$. E sera supposé être muni d'une tribu $\mathcal{E}$ (en général, ce sera un espace topologique assez simple, $\mathcal{E}$ sera sa tribu borélienne ou universellement mesurable). Alors, si on appelle $\mathcal{U}^t$ la tribu sur Ω engendrée par les X^s, $s \leq t$ (c'est-à-dire engendrée par les $(X^s)^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{E}$, $s \leq t$), les $\mathcal{U}^t$, $t \in \mathbb{R}$, forment bien une famille croissante de tribus indexée par $\mathbb{R}$; $\mathcal{U}^t$ est "la tribu du passé de l'instant t". Si tous les $X^t : \Omega \to \mathcal{E}$, sont λ-mesurables, $\mathcal{U}^t$ est λ-mesurable. Mais la famille $(\mathcal{U}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas continue à droite; qu'à cela ne tienne, on prendra $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{U}^{t'}$.

Supposons vérifiées les conditions de Jirina (exposé XXIII, théorème 2.2). Alors, pour chaque t, λ possède une désintégration, $\omega \to \overline{\lambda}^{\mathcal{T}^t}_\omega$, que nous noterons $\omega \to \overline{\lambda}^t_\omega$. Chacune est déterminée à un ensemble λ-négligeable près; il s'agit de savoir si, compte tenu de la condition de continuité à droite de la famille des tribus, on peut faire un choix des désintégrations pour les diverses valeurs du temps, de manière à obtenir aussi des conditions de continuité à droite pour les λ^t_ω.

Définition 1.1 : On appelle désintégration régulière de λ pour la famille de tribus $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de mesures sur Ω, $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$, indexée par $\mathbb{R}\times\Omega$ ayant les propriétés suivantes :

1) Pour tout t, $\omega \mapsto \lambda_\omega^t$ est une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}^t$

2) Pour toute fonction f sur Ω, ≥ 0 et λ-mesurable, ou à valeurs banachiques et λ-intégrable, pour λ-presque tout ω, la fonction $\omega \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ est réglée et continue à droite.

Théorème 1.2 : Si $(\Omega,\mathcal{A},\lambda)$ vérifient les conditions de Jirina (théorème XXIII.2.2), il existe des désintégrations régulières, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales (autrement dit, pour λ-presque tout ω elles sont égales pour tout $t \in \mathbb{R}$). En outre, une désintégration régulière peut être caractérisée par la propriété 1) de 1.1, et la propriété

2') Pour λ-presque tout ω, $t \mapsto \lambda_\omega^t$ est une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}(\Omega)$ des probabilités de Radon sur Ω, réglée et continue à droite, quand on munit $\mathcal{P}(\Omega)$ de la topologie de la convergence étroite.

Nous admettrons ce théorème, comme d'ailleurs tous les suivants : il sera un cas particulier du théorème 2.7

On a une proposition analogue au théorème 4.1 de XXIII :

Proposition 1.3 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Pour toute $A \in \mathcal{T}^s$, pour λ-presque tout ω, pour tout $t \geq s$, λ_ω^t est portée par A ou $\complement A$ selon que $\omega \in A$ ou $\omega \in \complement A$.

(L'intéressant est que "pour λ-presque tout ω" précède "pour tout $t \geq s$").

Dans le même ordre d'idées :

Proposition 1.4 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Si $B \subset \Omega$ est λ-négligeable, pour λ presque tout ω, pour tout t, B est λ_ω^t-négligeable. Si $f : \Omega \to E$ est une fonction sur Ω à valeurs dans un espace topologique, λ-mesurable-Lusin, alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, f est λ_ω^t-mesurable-Lusin.

Ces deux propositions sont presque évidentes.

Théorème 1.5 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Pour λ-presque tout ω, pour tout s, pour tout t : $\int \lambda_{\omega'}^t \, d\lambda_\omega^s(\omega') = \lambda_\omega^{\mathrm{Min}(s,t)}$.

Admis. L'intérêt de ces théorèmes est que le "pour λ-presque tout ω" est placé au début de la liste des quantificateurs.

Le théorème le plus difficile est le suivant :

Théorème 1.6 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Soit X un processus à valeurs dans un espace topologique E souslinien complètement régulier : $\mathbb{R} \times \Omega \to E$. On suppose que, pour tout t, X^t est $\mathcal{F}^t$-mesurable, et que, pour λ-presque tout ω, $t \mapsto X(t,\omega)$ est continue à droite. Alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, λ_ω^t est portée par l'ensemble des ω' pour lesquels la trajectoire $s \mapsto X(s,\omega')$, pour $s \leq t$, coïncide avec celle de ω.

§ 2 SURMARTINGALES REGULIERES

Définition 2.1 : Soit X une fonction ≥ 0 (finie ou non) sur $\mathbb{R} \times \Omega$. On dit que c'est une surmartingale relativement à la mesure λ et la famille de tribus $\mathcal{T}^t$, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) pour tout t, X^t est $\mathcal{T}^t$-mesurable.
2) Pour $s \leq t$, et $A \in \mathcal{T}^s$:

$$\int_A X^s \, d\lambda \geq \int_A X^t \, d\lambda$$

Appelons $(X^t)^{\mathcal{T}^s}$ une espérance conditionnelle de X^t pour la tribu $\mathcal{T}^s$; elle est $\mathcal{T}^s$-mesurable ainsi que X^s, de sorte que la dernière inégalité, valable pour $A \in \mathcal{T}^s$, équivaut à :

$$X^s \geq (X^t)^{\mathcal{T}^s}$$

(valable λ-presque partout, puisque, de toute façon, $(X^t)^{\mathcal{T}^s}$ n'est définie qu'à un ensemble λ négligeable près).

Définition 2.2 : Soit Y une deuxième surmartingale. On dit que c'est une modification de la première si pour tout t, $X^t = Y^t$ λ-presque partout. On dit qu'une surmartingale X est régulière si, pour λ-presque tout ω, $t \to X(t,\omega)$ est réglée et continue à droite.

Posons $J^t = \int_\Omega X^t \, d\lambda$. Comme $\Omega \in \mathcal{T}^s$ pour tout s, $t \mapsto J^t$ est une fonction décroissante

Théorème fondamental des surmartingales 2.3 (Doob) : Soit X une surmartingale à intégrale $t \mapsto J^t$ continue à droite. Elle admet des modifications régulières, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales

Soit maintenant une fonction sur $\mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs mesures ≥ 0 sur $(Y, \mathcal{Y})$, $(t,\omega) \mapsto \nu^t_\omega$

Définition 2.5 : On dit que $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est une surmartingale, si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Pour tout t, $\omega \mapsto \nu_\omega^t$ (fonction sur Ω à valeur mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$ est $\mathcal{T}$-mesurable

2) Pour $A \in \mathcal{T}^s$, et $s \leq t$:

$$\int_A \nu_\omega^s \, d\lambda(\omega) \geq \int_A \nu_\omega^t \, d\lambda(\omega).$$

Cela revient à dire que, pour toute fonction $\varphi \geq 0$ sur Y, $\mathcal{Y}$-mesurable, $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t(\varphi)$ est une surmartingale.

Considérons alors $J^t = \int_\Omega \nu_\omega^t \, d\lambda(\omega)$, mesure sur $(Y,\mathcal{Y})$. On supposera toujours que, pour tout t, J^t est σ-finie, et que $\mathcal{Y}$ est J^t-dénombrablement engendrée (il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant J^t, tel que la tribu intersection de $\mathcal{Y}$ avec Y' soit dénombrablement engendrée).

La fonction $t \mapsto J^t$, fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$ est alors décroissante. Elle sera dite continue à droite si, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $t \mapsto J^t(B)$ est continue à droite.

Définition 2.6 : La surmartingale $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est dite régulière, si, pour toute fonction φ sur Y, ≥ 0 et $\mathcal{Y}$-mesurable, la surmartingale $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t(\varphi)$ est régulière.

On a alors le théorème fondemental suivant, qui utilise naturellement le théorème 2.3 mais aussi d'autres propriétés des surmartingales :

Théorème 2.7 : Si $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est une surmartingale à intégrale $t \mapsto J^t$ continue à droite, elle admet des modifications régulières et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales, dans l'un quelconque des 2 cas suivants :

1) Y est un espace topologique, $\mathcal{Y}$ sa tribu borélienne, et chaque J^t est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de J^t-mesures finies;

2) Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, et λ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de λ-mesures finies.

Le théorème 1.2 est une conséquence immédiate de celui-ci. Prenons $(\Omega,\mathcal{O}) = (Y,\mathcal{Y})$, et soit, pour tout t, $\omega \mapsto \overline{\lambda}^t_\omega$ une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{T}^t$. Alors $(t,\omega) \mapsto \overline{\lambda}^t_\omega$ est une surmartingale (et même une martingale) à valeurs mesures sur $(\Omega,\mathcal{O})$. En effet, si $A \in \mathcal{T}^s$, $s \leq t$, on a $\int_A \overline{\lambda}^s_\omega \, d\lambda(\omega) = \int_A \overline{\lambda}^t_\omega \, d\lambda(\omega) = \int_A \delta_{(\omega)} d\lambda(\omega) = 1_A \lambda$. L'intégrale ici est constante, $\int_\Omega \overline{\lambda}^t_\omega \, d\lambda(\omega) = \lambda$. Donc il existe une modification régulière, qui sera une désintégration régulière de λ.

Le théorème 2.7 est au théorème 2.3 ce qu'est le théorème 3.2 de l'exposé XXIII à la proposition 1.1 de XXIII. Mais les difficultés à vaincre sont plus importantes.

§ 3. TRIBUS FORTES.

Définition 3.1 : Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de la tribu λ-mesurable. On dit que $\mathcal{T}$ est λ-forte si elle a les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{T}$ est contenues dans la tribu universellement mesurable;

2) Si $\omega \mapsto \lambda^{\mathcal{T}}_\omega$ est une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}$, alors, pour λ-presque tout ω, $\lambda^{\mathcal{T}}_\omega$ donne à tout ensemble élément de $\mathcal{T}$ la mesure 0 ou 1.

Il y a des tribus qui ne sont pas λ-fortes. Néanmoins :

1° Une tribu dénombrablement engendrée et universellement mesurable est λ-forte.

2° Une intersection dénombrable de tribus λ-fortes est λ-forte.

3° Si $\mathcal{T}$ est λ-forte, $\overline{\mathcal{T}} = \bigcap_\mu \hat{\mathcal{T}}_\mu$, où μ parcourt l'ensemble de toutes les mesures de Radon sur Ω, est λ-forte.

Les tribus intervenant dans les processus stochastiques sont λ-fortes. Reprenons en effet ce qui a été dit au début du § 1. Chaque $\mathcal{U}^t$ est dénombrablement engendrée, si l'on suppose (comme il est usuel) que E est un espace souslinien complètement régulier, $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne, et que chaque trajectoire $t \mapsto X(t,\omega)$ est continue à droite, donc chaque $\mathcal{U}^t$ est λ-forte; alors chaque $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{U}^{t'}$ est λ-forte, et même chaque $\overline{\mathcal{T}^t}$ est λ-forte.

On a alors les deux théorèmes très intéressants suivants :

Théorème 3.2 : Soit $\mathcal{T}$ une tribu λ-forte sur Ω, et soit $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{S}$ une sous-tribu de $\mathcal{T}$, et soit $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ une désintégration de λ relativement à $\mathcal{S}$. Alors, pour λ-presque tout ω, $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ admet, comme désintégration relativement à $\mathcal{T}$, la même que λ, soit $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}$.

Généralisation :

Théorème 3.3 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière de λ relativement à $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$, et supposons toutes les $\mathcal{T}^t$ λ-fortes.
Alors, pour λ-presque tout ω, pour tout s, λ_ω^s admet, comme désintégration régulière relativement à $(\mathcal{T}^t)_{t\in[s,+\infty[}$, la même que λ, à savoir $(t,\omega') \mapsto \lambda_{\omega'}^t$.

BIBLIOGRAPHIE

Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. A paraître au Journal d'Analyse, de Jérusalem.