Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Malgrange

Sur les points singuliers des équations différentielles (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 21, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A21_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

SUR LES POINTS SINGULIERS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(Suite)

par B. MALGRANGE

Exposé N° XXI

15 Mars 1972

§ 5. IRREGULARITE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL FORMEL

Soit $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(\hat{K}^m)$ $k \in \mathbb{Z}$; on va définir l'irrégularité de D par une adaptation des calculs des § 1 - 3. Tout d abord on se ramène à k = 0 en posant pour $l \in \mathbb{Z}$: $i(x^l D) = i(D)$. Dans toute la suite du paragraphe, on supposera donc k = 0.

Rappelons qu'on appelle réseau dans $\hat{K}^m$ un sous-$\hat{\mathcal{O}}$-module E de type fini tel qu'on ait $E \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \hat{K} = \hat{K}^m$; il est connu qu un tel E est libre sur $\hat{\mathcal{O}}$, donc est de la forme $A\hat{\mathcal{O}}^m$, avec $A \in Gl(m,\hat{K})$ et réciproquement. Si l'on a deux réseaux $E \subset E_1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $x^k E_1 \subset E$; on en déduit immédiatement que E_1/E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Proposition 5.1 : Soient E et E_1 deux réseaux vérifiant $DE \subset E_1$. Alors l'application $D : E \to E_1$ est à indice.
Dans la suite, cet indice sera noté $\chi(D;E,E_1)$.

Démonstration : Supposons d'abord la proposition démontrée pour un couple particulier (E,E_1), et démontrons-là pour un autre couple (E',E_1'). Prenons un troisième couple (E'',E_1'') vérifiant $E'' \supset E \cup E'$, $E_1'' \supset E_1 \cup E_1'$. $DE'' \subset E''$.

1

Considérons la suite exacte de morphismes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & E & \to & E'' & \to & E''/E & \to & 0 \\ & & \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & & \\ 0 & \to & E_1 & \to & E_1'' & \to & E_1''/E_1 & \to & 0 \end{array}$$

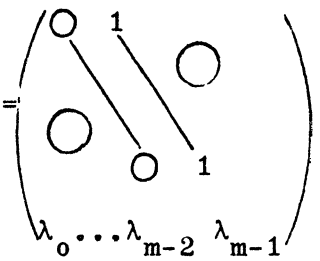
La première flèche verticale est à indice par hypothèse, et la troisième l'est aussi puisqu elle va d'un espace de dimension finie dans un autre. Par suite la seconde est à indice; de plus, on a

(5.2) $$\chi(D;E'',E_1'') = \chi(D;E,E_1) + \dim E''/E - \dim E_1''/E_1$$

On opère ensuite de même avec les couples (E',E_1') et (E'',E'').
1

Reste à trouver un couple particulier (E,E_1') tel que $D : E \to E_1$ soit à indice; pour cela, en utilisant le théorème (3.1) (qui est vrai aussi pour $\hat{K}$ au lieu de K), on se ramène au cas où M a la forme suivante

(5.3) $M =$



Posons comme au paragraphe 3, $\Delta = \partial^m - \lambda_{m-1}\partial^{m-1} - \ldots - \lambda_o$, avec $\partial = x\frac{d}{dx}$; posons encore $i = i(\Delta) = \sup(0, \sup - v(\lambda_p))$ et prenons $E = \hat{\mathcal{O}}^m$, $E_1 = \hat{\mathcal{O}}^{m-1} \oplus x^{-i}\hat{\mathcal{O}}$; les raisonnements des § 1 à 3 montrent que l'application $D : E \to E_1$ a un noyau (resp. un conoyau) isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) de l'application $\Delta : \hat{\mathcal{O}} \to x^{-i}\hat{\mathcal{O}}$, et que cette dernière application est d'indice nul. D'où la proposition.

Considérons maintenant tous les couples de réseaux (E,E_1) avec $E \subset E_1$, $DE \subset E_1$; je dis que le nombre $\chi(D;E,E_1) + \dim E_1/E$ est indépendant du couple (E,E_1). Pour établir ce résultat, il suffit de raisonner comme à la proposition précédente, et d'utiliser 5.2. Cela justifie la définition suivante :

<u>Définition 5.3</u> : <u>On appelle irrégularité de</u> D <u>le nombre</u> $\chi(D:E,E_1) + \dim E_1/E$. E et E_1 <u>étant deux réseaux vérifiant</u> $E \subset E_1$, $DE \subset E_1$.

Le calcul fait à la fin de la proposition précédente, montre immédiatement que si M est de la forme 5.3, on a, comme en 3.2.

$$i(D) = \sup(0, \sup - v(\lambda_p)) \tag{5.4}$$

Par conséquent, notre définition coïncide dans le cas analytique avec celle du § 3; et l on a encore $i(D) \geq 0$.

On définit encore les points singuliers réguliers comme au § 3, avec $\hat{K}$ au lieu de K (il est équivalent de dire qu'il existe un réseau E tel qu'on ait $DE \subset E$). La proposition suivante se démontre alors comme 3.4.

Proposition 5.5 : Pour que 0 soit un point singulier régulier, il faut et il suffit qu'on ait $i(D) = 0$.

Proposition 5.6 : Si l'on a $M = \sum_{-k}^{+\infty} M_p x^p$ $(k \geq 1)$, on a $i(D) \leq km$; pour qu'on ait $i(D) = km$, il faut et il suffit que M_{-k} soit inversible.

Pour démontrer cette proposition, nous allons appliquer la définition 5.3, avec $E = \hat{\mathcal{O}}^m$ $E_1 = x^{-k}\hat{\mathcal{O}}^m$; en remplacant D par $x^k D$, il revient au même de démontrer l'assertion suivante :
L'indice de l'application $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est ≤ 0; cet indice est nul si et seulement si M_{-k} est inversible.

Supposons d'abord M_{-k} inversible; pour tout monôme Ax^p, $A \in \mathbb{C}^m$, on a $(x^k D)(Ax^p) = M_{-k} A x^p + (\text{termes d'ordre} \geq p+1)$; donc, de proche en proche, on voit que $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est bijectif, donc d'indice nul.

Dans le cas général, prenons un p entier ≥ 0; les arguments de suite exacte déjà utilisés en 5.1 montrent que l'application précédente a même indice que

$$x^k D : \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \to \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \qquad (\hat{\mathfrak{m}}, \text{ l'idéal maximal de } \hat{\mathcal{O}}).$$

Cette dernière application est injective pour p assez grand, puisque $\ker(x^k D, \hat{\mathcal{O}}^m)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Donc son indice est ≤ 0, et il est nul si et seulement si l'application est surjective. Dans ce dernier cas, par passage au quotient, l'application $x^k D$ de

$\hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m)/\hat{\mathfrak{m}}^{p+1}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ dans lui-même sera encore surjective; or dans la base évidente la matrice de cette application est précisément M_{-k}; donc M_{-k} doit être surjective, donc inversible. D'où la proposition.

Signalons pour terminer, sans démonstration, une autre manière de définir $i(D)$, due à Gérard et Levelt [1]. On prend un réseau E et on forme la suite de réseaux E_p définie par $E_o = E, \ldots E_p = E_{p-1} \oplus DE_{p-1}$ (le fait qu'on obtienne bien ainsi deux réseaux résulte facilement de la formule $D(\varphi F) = \varphi DF + (\partial\varphi)F$, $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}$); posons ensuite $\overline{E}_p = E_p/E_{p-1}$. L'application D induit une application surjective $\overline{D} : \overline{E}_p \to \overline{E}_{p+1}$, donc $\dim_{\mathbb{C}} \overline{E}_p$ est décroissante, et indépendante de p pour p assez grand. On démontre que cette dimension ne dépend pas non plus de E, et qu'elle est précisément égale à $i(D)$.

Supposons en particulier que 0 soit un point singulier régulier: on aura alors $\overline{E}_p = 0$ pour p assez grand; en fait, on démontre même qu'on a nécessairement, quel que soit E : $\overline{E}_m = 0$, donc $DE_{m-1} \subset E_{m-1}$; ceci donne un critère simple pour reconnaître effectivement si l'on est dans le cas d'un point singulier régulier (le seul autre critère connu, pour autant que je sache est dû à Moser [1]).

§ 6. POINTS SINGULIERS REGULIERS

Ce paragraphe est en grande partie composé de rappels, empruntés à Wasow [1].

Traitons d'abord le cas formel; soit $D = x\frac{d}{dx} - M$, avec,

$M \in \mathrm{End}\ (\hat{\mathcal{O}}^m)$ (i.e. $M \in \mathrm{End}\ (\hat{K}^m)$, sans pôle).

Proposition 6.1 : Supposons que deux valeurs propres distinctes de $M(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Il existe alors un et un seul $A \in \mathrm{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$. avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = AG$ transforme D en $D' = x\frac{d}{dx} - M(0)$.

Posons en effet $M = \sum_0^\infty M_p x^p$ $A = \sum_0^\infty A_p x^p$, avec $A_o = I$; on doit résoudre l'équation

$$x\frac{dA}{dx} = MA - AM_o$$

en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres, on trouve d'abord $M_oA_o - A_oM_o = 0$ qui est vérifié, et ensuite, pour $p \geq 1$

$$(pI - M_o)A_p + A_pN_o = \Phi(A_o, \ldots A_{p-1}; M_o, \ldots, M_p)$$

On pourra résoudre ces équations par récurrence, d'une manière et d'une seule, en vertu du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur à titre d'exercice.

Lemme 6.2 : Soient $P \in \mathrm{End}\ \mathbb{C}^p$ et $Q \in \mathrm{End}\ \mathbb{C}^q$ donnés; pour que l'équation $PX - XQ = Y$, avec $X, Y \in \mathrm{End}\ (\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^p)$ ait une solution X et une seule quelque soit Y il faut et il suffit que P et Q n'aient pas de valeur propre commune.

La proposition résulte immédiatement de là. Remarquons aussi que l'opérateur différentiel $A \mapsto x\frac{dA}{dx} - MA - AM_o$ a un point singulier régulier en 0; par suite, en vertu des théorèmes de comparaison (ou d'un résultat classique, dans ce cas particulier), si M est convergente, A sera aussi convergente.

Montrons ensuite comment on peut ramener le cas général au cas où $M(0)$ satisfait les hypothèses de la proposition 6.1; soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

les valeurs propres distinctes de M_0 ; il suffit de montrer qu'on peut faire une transformation $A \in Gl(m,\hat{K})$ telle que $N = A^{-1}MA - xA^{-1}\frac{dA}{dx}$ soit sans pôle et ait comme valeurs propres $(\lambda_1 - 1), \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: en appliquant par récurrence ce procédé, on amènera les valeurs propres de $M(0)$ qui diffèrent d'un entier à être égales.

Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'on a $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, avec P et Q triangulaires inférieures, P ayant pour valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et Q ayant l'unique valeur propre λ_1; soient p et q respectivement l'ordre de P et l'ordre de Q; on prend avec des notations évidentes

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & xI_q \end{pmatrix} .$$

En posant $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve $N(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ \gamma & Q-I \end{pmatrix}$; cette matrice est encore triangulaire inférieure, et a visiblement les valeurs propres cherchées; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas $\mathcal{C}^\infty$; nous emploierons les notations suivantes, dans la fin de ces exposés : $\mathcal{E}$ désigne l'espace des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes ou à valeurs réelles, dans quelques cas où ce sera explicitement mentionné); l'application $\mathcal{E} \to \hat{\mathcal{O}}$ qui à f associe sa série de Taylor en 0 sera notée $f \to \hat{f}$. On pose encore $K\mathcal{E} = K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$, espace des germes en 0 de "fonctions semi-méromorphes"; l'application $\mathcal{E} \to \hat{\mathcal{O}}$ s'étend alors en une application $K\mathcal{E} \to \hat{K}$, et il est bien connu que ces applications sont surjectives. Si $f \in K\mathcal{E}$, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, on a $f \in \mathcal{E}$ à cause du lemme élémentaire suivant : soit $g \in \mathcal{E}$, avec $g(0) = 0$; alors $\frac{g}{x} \in \mathcal{E}$. Les $f \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\hat{f} = 0$ seront dites "plates".

Si l'on a $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, M à coefficients dans $K\mathcal{E}$, on posera $\hat{D} = x^{k+1}\frac{d}{dx} - \hat{M}$, $i(D) = i(\hat{D})$; si $i(D) = 0$, on dira que 0 est un point singulier régulier de D.

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème qui sera démontré par la suite.

Proposition 6.3 : Soit $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(K\mathcal{E}^m)$ $k \in \mathbb{Z}$ et $i(D) = 0$; soit $G \in K\mathcal{E}^m$ donné; supposons qu'il existe $H \in \hat{K}^m$, avec $\hat{D}H = G$. Alors il existe $F \in K\mathcal{E}^m$ vérifiant $DF = G$, $\hat{F} = H$, et un tel F est unique.

Prenons $F_1 \in K\mathcal{E}^m$ tel qu'on ait $\hat{F}_1 = H$, et cherchons F sous la forme $F_1 + F_2$, avec F_2 plat; on doit aussi avoir $DF_2 = G - DF_1$, et le second membre est plat par hypothèse. Par conséquent, on peut supposer qu'on est dans le cas suivant : G est plat et $H = 0$ (i.e. on cherche F plat).

Comme une fonction plate le reste après multiplication par $x^l (l \in \mathbb{Z})$, on peut d'abord se ramener à $k = 1$; on peut ensuite, au moyen d'une transformation $F = AF'$, $A \in Gl(m, K\mathcal{E})$ (ensemble des matrices d'ordre m inversibles à coefficients dans $K\mathcal{E}$), et en utilisant les transformations formelles qui précèdent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est "plate à droite en 0"); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en -x.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x)F_1$, $G = \exp(M_0 \log x)\, G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1. On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x)\, M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x, on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

Corollaire 6.4 : Soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(K\{\mathcal{C}^m\})$, et supposons que 0 soit un point singulier régulier. Il existe alors $A \in Gl(m, K\{\mathcal{E}\})$ tel que la transformation $F = AF'$ transforme D en $D' = x \frac{d}{dx} - N$, avec N constant.

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - AM_0, \text{ avec A à coefficients dans } \mathcal{E},\ A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I; d'après 6.3, elle admet donc une solution A, avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.