Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Nachbin

Sur quelques aspects récents de l'holomorphie en dimension infinie

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 18, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A17_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

SUR QUELQUES ASPECTS RECENTS DE L'HOLOMORPHIE EN DIMENSION INFINIE

par L. NACHBIN

Exposé N° XVIII

23 Février 1972

Indiquons par E et F deux espaces de Banach complexes, par U une partie ouverte non-vide de E et par $\mathscr{H}(U;F)$ l'espace vectoriel des applications holomorphes définies dans U à valeurs dans F.

On dit qu'une partie X de U est $\mathscr{H}(U;\mathbb{C})$-bornante si toute $f \in \mathscr{H}(U;\mathbb{C})$ est bornée sur X.

Supposons que, de toute suite bornée de l'espace dual E' on puisse extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, en particulier que E soit séparable ou reflexif. Alors toute partie fermée et $\mathscr{H}(E;\mathbb{C})$-bornante de E doit être compacte.

Ce résultat a été démontré indépendamment par Dineen [9] et Hirschowitz [19]; il avait été remarqué pour les espaces d'Hilbert par Alexander [1] et Dineen [10].

Il y a un exemple construit par Dineen [11] d'une partie fermée et $\mathscr{H}(E;\mathbb{C})$-bornante qui n'est pas compacte, lorsque E est l'espace de Banach l^∞ des suites bornées.

Une partie X de U est dite U-bornée si X est bornée dans E et si la distance de X à la frontière de U est strictement positive.

Une application holomorphe $f : U \to F$ est dite de type borné si f est bornée sur toute partie U-bornée de U. Indiquons par $\mathscr{H}_b(U;F)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}(U;F)$ de ces applications du type borné.

Il est clair que $\mathscr{H}_b(U;F) = \mathscr{H}(U;F)$ si E est de dimension finie, ou bien si $F = 0$.

On conjecture que, réciproquement, $\mathscr{H}_b(U;F) \neq \mathscr{H}(U;F)$ si E est de dimension infinie et $F \neq 0$. Comme Dineen l'a remarqué [9], c'est en fait le cas s'il existe une suite dans E' qui est convergente pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, mais n'est pas convergente pour la topologie de la norme, et si en plus $F \neq 0$ (en particulier, si E est de dimension infinie, séparable ou réflexif, et si en plus $F \neq 0$).

Du reste, on conjecture que, pour tout espace E de dimension infinie, il existe dans E' une suite convergente pour $\sigma(E',E)$, mais pas convergente pour la norme.

En dimension infinie, c'est pour l'espace $\mathscr{H}_b(U;F)$ qu'on connaît le théorème du type Cartan-Thüllen le plus simple, lequel a été remarqué indépendamment par Dineen [12] et Matos [22], [23].

En ce qui concerne, en dimension infinie et pour l'espace $\mathscr{H}(U;F)$, la question plus difficile d'un théorème du type Cartan-Thüllen et d'autres aspects, nous citerons Coeuré [7], Dineen [13], [15], Hirschowitz [20], Noverraz [29] et Schottenloher [30] et les références données dans ces travaux.

Envisageons maintenant des propriétés topologiques des espaces d'applications holomorphes.

En ce qui concerne d'abord l'espace $\mathscr{H}_b(U;F)$, il s'agit d'un espace de Fréchet par rapport à la topologie τ_b de la convergence uniforme des applications sur les parties U-bornées, c'est-à-dire aussi de la convergence uniforme des applications et toutes leurs différentielles sur les parties U-bornées.

Sur l'espace $\mathscr{H}(U;F)$ on peut considérer naïvement la topologie τ_0 de la convergence uniforme des applications sur les parties compactes de U, ainsi que la topologie τ_∞ de la convergence uniforme des applications et toutes leurs différentielles sur les parties compactes de U.

D'une façon plus raffinée [25], [26], on peut aussi considérer la topologie $\mathcal{C}_\omega$ définie par les semi-normes sur $\mathcal{H}(U;F)$, portées par des parties compactes de U. Rappelons qu'une semi-norme p sur $\mathcal{H}(U;F)$ est <u>portée</u> par une partie compacte K de U si, pour toute partie ouverte V de U contenant K, il y a un nombre réel $c(V) > 0$ tel que

$$p(f) \leq c(V) . \sup_{x \in V} \|f(x)\|,$$

inégalité valable pour toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

On a

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\omega$$

si E est de dimension finie, ou bien si $F = 0$; et, d'autre part, on a

$$\mathcal{C}_0 < \mathcal{C}_\infty < \mathcal{C}_\omega$$

si E est de dimension infinie et $F \neq 0$.

On voit tout de suite que $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_\infty$ et $\mathcal{C}_\omega$ ont les mêmes parties bornées dans $\mathcal{H}(U;F)$. On peut donc considérer la topologie localement convexe bornologique associée à n'importe laquelle de ces trois topologies.

Le résultat important suivant est dû à Dineen [15]. Pour une classe assez vaste d'espaces de Banach séparables, à savoir les espaces de Banach E à base, et si U est ξ-équilibré par rapport à l'un de ses points ξ (c'est-à-dire que $\xi \in U$ et en plus $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ entraînent que $(1 - \lambda)\xi + \lambda x \in U$), alors $\mathcal{C}_\omega$ est bornologique.

On conjecture que le résultat précédent est valable pour des espaces séparables arbitraires E et pour des ouverts non-vides arbitraires U.

D'autre part, Dineen [15] a montré par un exemple que $\mathcal{T}_\omega$ n'est pas bornologique sur $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$, où E est l'espace de Banach l^∞ des suites bornées.

Un peu plus tard, Coeuré [8] a trouvé une autre situation où $\mathcal{T}_\omega$ est bornologique.

Des résultats sur la topologie bornologique associée à $\mathcal{T}_\omega$ ont été indiqués par Dineen [10], Hirschowitz [21] et Aron [2], [3].

Pour n'importe quelle partie compacte K non vide de E, on a l'espace vectoriel $\mathcal{H}(K;F)$ des germes d'applications holomorphes sur des voisinages ouverts de K à valeurs dans F. Pour toute partie ouverte U de E contenant K, on a l'application linéaire canonique

$$\mathcal{H}(U;F) \to \mathcal{H}(K;F).$$

La topologie $\mathcal{T}_\omega$ sur $\mathcal{H}(K;F)$ est obtenue par n'importe laquelle des limites inductives suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(K;F) &= \varinjlim_{U\supset K} \mathcal{H}_B(U;F)\\ &= \varinjlim_{U\supset K} \mathcal{H}_b(U;F)\\ &= \varinjlim_{U\supset K} \mathcal{H}(U;F).\end{aligned}$$

où $\mathscr{H}_B(U;F)$ est l'espace de Banach des applications holomorphes bornées dans U à valeurs dans F, $\mathscr{H}_b(U;F)$ est muni de sa topologie de Fréchet $\mathscr{T}_b$ déjà indiquée et $\mathscr{H}(U;F)$ est muni de sa topologie $\mathscr{T}_\omega$ déjà définie.

On peut se poser la question de savoir si l'on a l'égalité suivante concernant la limite projective :

$$\mathscr{H}(U;F) = \varprojlim_{K \subset U} \mathscr{H}(K;F),$$

où l'on suppose que $\mathscr{H}(U;F)$ et $\mathscr{H}(K;F)$ sont munis des topologies $\mathscr{T}_\omega$ correspondantes déjà citées. C'est le cas si E est de dimension finie, ou bien si $F = 0$.

On conjecture que c'est toujours vrai.

Pour donner une réponse partielle, due à Chae [5], [6], à la question posée, disons qu'une partie compacte K non vide d'une partie ouverte U de E est U-Runge si l'image canonique de $\mathscr{H}(U;F)$ est dense dans $\mathscr{H}(K;F)$ pour $\mathscr{T}_\omega$.

Alors, si toute partie compacte non vide de U est contenue dans une partie compacte U-Runge de U, il est vrai qu'on a l'égalité précédente concernant la limite projective.

Du reste, on conjecture qu'il est vrai que toute partie compacte non vide de toute partie ouverte U est toujours contenue dans une partie compacte U-Runge de U. On sait le démontrer dans certains cas, en dimension finie ou infinie; mais il semble qu'on ne le sache pas en général, même si E est de dimension finie.

Passons à l'étude des opérateurs de convolution.

Soit $\mathcal{P}_N({}^mE;\mathbb{C})$ l'espace de Banach des polynômes m-homogènes complexes nucléaires sur E, muni de sa norme nucléaire.

Une fonction $f \in \mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ est dite <u>nucléairement entière du type borné</u> si

$$\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_N({}^mE;\mathbb{C})$$

pour $m = 0,1,2,\ldots$, où le premier membre indique la différentielle de f d'ordre m en tant que polynôme m-homogène continu, et si en plus

$$(\|\tfrac{1}{m!}\, \hat{d}^m f(0)\|_N)^{1/m} \to 0$$

pour $m \to +\infty$, où l'indice N désigne la norme nucléaire. Indiquons par $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ de ces fonctions nucléairement entières du type borné. C'est un espace de Fréchet par rapport à la topologie $\mathcal{T}_{Nb}$ définie par la famille des semi-normes suivantes, où $r \geq 0$,

$$f \to \sum_{m=0}^{+\infty} r^m . \|\tfrac{1}{m!}\, d^m f(0)\|_N .$$

Un opérateur de <u>convolution</u> $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ dans lui-même, commutant avec les translations par les éléments de E.

Une exponentielle-polynôme nucléaire est une fonction de la forme

$$p\, e^{\varphi},$$

où p est un polynôme complexe nucléaire sur E et $\varphi \in E'$.

Le théorème d'approximation et d'existence suivant, du type Malgrange, a été prouvé par Gupta [17], [18]. Si $\mathcal{O}$ est un opérateur de convolution sur $\mathscr{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$, alors le sous-espace vectoriel où $\mathcal{O}$ s'annule est l'adhérence de son sous-espace vectoriel formé par les sommes finies d'exponentielles-polynômes nucléaires sur lesquelles $\mathcal{O}$ s'annule. En plus, si $\mathcal{O} \neq 0$,

$$\mathcal{O}[\mathscr{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})] = \mathscr{H}_{Nb}(E;\mathbb{C}).$$

On connaît une extension de ce résultat au delà du cas du type borné [27].

D'autres études dans cette direction sont dues à Boland [4], Dwyer [16] et Matos [24].

Dans cet aperçu, nous nous sommes limités au cas des espaces de Banach. Il faut dire qu'il y a des aspects tout à fait nouveaux quand on se place dans le cadre des espaces localement convexes; citons, par exemple Dineen [14] et Noverraz [29], où l'on trouvera d'autres sources bibliographiques récentes. Voir aussi [28].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Alexander : Analytic functions on Banach spaces, Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

[2] R. M. Aron : Sur la topologie bornologique pour l'espace des applications holomorphes, Comptes Rendus, t.272, 1971, pp.872-873.

[3] R. M. Aron : The bornological topology on the space of holomorphic mappings on a Banach space , Math. Annalen, à paraître.

[4] P. J. Boland : Some spaces of entire and nuclearly entire functions on a Banach space, à paraître.

[5] S. B. Chae : Sur les espaces localement convexes de germes holomorphes, Comptes Rendus, t.271, 1970, pp.990-991.

[6] S. B. Chae : Holomorphic germs on Banach spaces, Ann. Inst. Fourier, t.21, 1971, pp.107-144.

[7] G. Coeuré : Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques, Ann. Inst. Fourier, t.20, 1970, pp.361-432.

[8] G. Coeuré : Fonctionnelles analytiques sur certains espaces de Banach, Ann. Inst. Fourier, t.21, 1971, pp.15-21

[9] S. Dineen : Unbounded holomorphic functions on a Banach space, J. London Math. Soc., vol.43, 1972, pp. 461-465.

[10] S. Dineen : Holomorphy types on a Banach space, Studia Math., t.39, 1971, pp.241-288.

[11] S. Dineen : Bounding subsets of a Banach space, Math. Annalen, Bd. 192, 1971, pp.61-70.

[12] S. Dineen : The Cartan-Thüllen theorem for Banach spaces, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 24, 1970, pp. 667-674.

[13] S. Dineen : Topologie de Nachbin et prolongement analytique en dimension infinie, Comptes Rendus, t. 271, 1970, pp. 643-644.

[14] S. Dineen : Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces, Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[15] S. Dineen : Holomorphic functions on (C_o, X_b)-modules, Math. Annalen, à paraître.

[16] T. A. W. Dwyer : Partial differential equations in Fisher-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, B, Amer. Math. Soc., vol. 77, 1971, pp.725-730.

[17] C. P. Gupta : Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space, Notas de Matemática, N°37, 1968.

[18] C. P. Gupta : On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space, Indag. Math., vol.32, 1970, pp.356-358.

[19] A. Hirschowitz : Sur le non-plongement des variétés analytiques banachiques réelles, Comptes Rendus, t.269, 1969, pp.844-846.

[20] A. Hirschowitz : Prolongement analytique en dimension infinie, Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[21] A. Hirschowitz : Bornologie des espaces de fonctions analytiques en dimension infinie, Séminaire Pierre Lelong, Lecture Notes in mathematics, Bd.205, 1970, pp.21-33.

[22] M. C. Matos : Sur les ouverts de τ-holomorphie dans les espaces de Banach séparables, Comptes Rendus, t.271, 1970, pp.1165-1166.

[23] M. C. Matos : Domains of τ-holomophy in a separable Banach space, Math. Annalen, à paraître.

[24] M. C. Matos : Sur le théorème d'approximation et d'existence de Malgrange-Gupta, Comptes Rendus, t.271, 1970, pp. 1258-1259.

[25] L. Nachbin : On the topology of the space of all holomorphic functions on a given open subset , Indag. Math., vol. 29, 1967, pp.366-368.

[26] L. Nachbin : Topology on spaces of holomorphic mappings, Ergebnisse der Math., Bd.47, 1969.

[27] L. Nachbin : Convolution operators in spaces of nuclearly entire functions on a Banach space, Functional Analysis and Related Fields (edited by F. E. Browder), Springer-Verlag, 1970.

[28] L. Nachbin : Recent developments in infinite dimensional holomorphy, B. Amer. Math. Soc., à paraître.

[29] P. Noverraz : Pseudo-convexité et domaines d'holomorphie en dimension infinie, Notas de Matemática, North-Holland, à paraître.

[30] M. Schottenloher : Analytische Fortsetzung in Banachräumen, Dissertation, Universität München, 1971.