Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

P. Schapira

Solutions analytiques et hyperfonctions du problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 12, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A12_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

SOLUTIONS ANALYTIQUES ET HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS HYPERBOLIQUES NON STRICTS

par J. M. BONY et P. SCHAPIRA

Exposé N°XII

12 Janvier 1972

§ 1. NOTATIONS

Dans tout cet exposé, nous considèrerons un opérateur différentiel

$$P(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{\alpha\leq m} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$$

à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage $\tilde{U}$ de U dans $\mathbb{C}^n$ où les fonctions a_α se prolongent en fonctions holomorphes. Nous noterons encore P l'opérateur

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

défini dans $\tilde{U}$ et nous noterons p son symbole principal

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\zeta^\alpha.$$

On dit que la partie principale de P est hyperbolique dans la direction N (avec $N \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$) si pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a $p(x,N + i\xi) = 0$. Il est équivalent d'affirmer que N est non caractéristique et que l équation $p(x,\xi + \tau N)$ n'a que des racines τ réelles pour ξ réel.

Remarque 1.1 : Si on pose $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$ et si N désigne le vecteur de composantes $x' = 0$; $x_n = 1$, on peut énoncer une formulation géométrique équivalente : si un hyperplan H (de codimension réelle 1) de $\mathbb{C}^n$ contient l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_n = 0$, et si H est caractéristique pour $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$, alors H contient $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2 : Aucune hypothèse supplémentaire ne sera faite sur P. Les termes d'ordre inférieur et la multiplicité des caractéristiques peuvent être quelconques.

§ 2. INEGALITE HYPERBOLIQUE

Lorsque z n'est pas réel, l opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ n'est plus en général hyperbolique. L'inégalité qui suit permet de montrer que l'on s'écarte assez peu du cas hyperbolique. Nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme 2.1 : Soit $\pi(z,\tau)$ un polynôme en une variable τ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables z. On suppose que pour z réel, les racines τ de ce polynôme sont réelles. On a alors sur tout compact une majoration du type suivant :

$$\pi(z,\tau) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leq C|\operatorname{Im} z|.$$

Ce lemme se déduit d'une forme locale du théorème des tubes de Bochner, due à M. Kashiwara.

Théorème 2.1 : Supposons la partie principale de P hyperbolique dans la direction N. Alors, sur tout compact, il existe une constante telle que

$$p(z,\zeta+\tau N) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leq C(|\xi||y| + |\eta|)$$

Compte tenu de l'homogénéité en (z,τ), le lemme précédent fournit le résultat pour $|\eta|/|\xi|$ borné. Si on a au contraire $|\eta| \geq |\xi|$, c'est une conséquence immédiate de la majoration en module $|\tau| \leq C|\zeta|$ qui résulte de $p(z,N) \neq 0$.

§ 3. SOLUTIONS ANALYTIQUES DU PROBLEME DE CAUCHY

On désignera par $B(0,a)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon a et par $B'(0,a)$ son intersection avec l'hyperplan d'équation $x_n = 0$. On notera $K(a,\delta)$ (pour $\delta > 0$) le cône tronqué intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0,a)$ et du point δaN.

L'opérateur P est supposé défini dans un voisinage d'une boule $B(0,r)$, et de partie principale hyperbolique dans la direction $N = (0,..0,1)$ pour tout x. L'opérateur P se prolonge à $\overline{B(0,r)} + i\{y \leq \varepsilon\}$ pour ε assez petit. On désignera par A_ε l'ensemble fermé des ζ tels que l'on ait $p(z,\zeta) = 0$ pour au moins un z appartenant à $\overline{B(0,r)} + i\{y \leq \varepsilon\}$.

Le théorème 2.1 peut se traduire géométriquement par la proposition suivante.

Proposition 3.1 : Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout $a < r$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout hyperplan (de codimension réelle 1) dont la normale appartient à A_ε et qui passe par δaN coupe $(B(0,a) + i\{y \leq \varepsilon\}) \cap \{z_n = 0\}$.

Cette proposition est à rapprocher de la remarque 1.1. Elle résulte, par un calcul élémentaire de la majoration du théorème 2.1. Il suffit de prendre $\delta < \frac{1}{C(r+1)}$.

Théorème 3.1 : Soit g analytique dans $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$. Soient $h_0,\ldots,h_{m-1}$ analytiques sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule f, analytique dans $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$ solution du problème de Cauchy

$$Pf = g \; ; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x',0) = h_k(x').$$

Pour chaque $a' < a$, le théorème de Cauchy-Kowalewski permet de trouver une solution f au voisinage de $\overline{B'(0,a')}$ et donc se prolongeant holomorphiquement au voisinage de $\overline{B'(0,a')} + i\{|y| \leq \varepsilon\}$ pour ε convenable. Compte tenu de la proposition 3.1, le théorème de prolongement démontré dans l'exposé 11 (th.2.1. de [3]) montre que f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\delta a'N$ et de $B'(0,a')$. Sa trace sur $\mathbb{R}^n$ est une solution définie dans $K(a',\delta)$ pour tout $a' < a$ et donc dans $K(a,\delta)$.

§ 4. RAPPELS SUR LES HYPERFONCTIONS

On désignera systématiquement par I, I', I_α,... des parties fermées convexes propres de la sphère unité S^{n-1}, et par Γ, Γ', Γ_α,... l'intérieur de leurs polaires respectifs, cônes ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\widetilde{\omega}$ un voisinage complexe de ω, on peut définir [4] la valeur au bord $b(f)$ d'une fonction holomorphe dans $(\omega + i\Gamma) \cap \widetilde{\omega}$, c'est une hyperfonction sur ω et réciproquement toute hyperfonction s'obtient comme somme finie de telles valeurs au bord.

Si (x,η) appartient à $\omega \times S^{n-1}$, et si u est une hyperfonction sur ω, nous dirons avec M. Sato [5] que le point (x,η) n'appartient pas au support singulier essentiel de u (que nous noterons $SS^*(u)$) s'il existe des I_α en nombre fini, ne contenant pas η, tels que dans un voisinage V de x, l'hyperfonction u soit somme de valeurs au bord de fonctions f_α, homomorphes dans $(V + i\Gamma_\alpha) \cap \widetilde{V}$ pour un voisinage complexe $\widetilde{V}$ de V convenable.

On montre alors que si des I_α en nombre fini sont tels que les $\omega \times I_\alpha$ recouvrent $SS^*(u)$, on peut écrire $u = \sum u_\alpha$ avec $SS^*(u_\alpha) \subset \omega \times I_\alpha$. De plus, si on a $SS^* u \subset \omega \times I$, pour tout voisinage I' de I, on a $u = b(f)$ où f est holomorphe dans $(\omega + i\Gamma') \cap \widetilde{\omega}$.

Dans le cas où $N = (0,\ldots,0,1)$ et $-N$ n'appartient pas au support singulier essentiel de u en 0, on peut définir la trace de u sur

l'hyperplan $x_n = 0$. En effet au voisinage de 0 on a $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ avec $\pm N \notin I_\alpha$. Il en résulte que les cônes Γ_α coupent l'hyperplan $x_n = 0$. Les restrictions f'_α des fonctions f_α à $(\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \{z_n = 0\}$ ont des valeurs au bord dans $\{x_n = 0\}$ au voisinage de 0 et $\Sigma\, b(f'_\alpha)$ qui ne dépend pas de la décomposition choisie est par définition la trace de u.

§ 5. SOLUTIONS HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY

Les notations sont celles du paragraphe 3, la partie principale de P est toujours supposée hyperbolique dans la direction N.

Proposition 5.1 : Il existe une constante δ' telle que, si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dont la trace Γ' sur l'hyperplan $x_n = 0$ est d'ouverture supérieure à $\pi/4$ (c'est à dire contient un cône de révolution d'axe γ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$), si f est holomorphe au voisinage de $B'(0,a) + i\Gamma$, alors f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intersection de $K(a,\delta') + i\Gamma_1$ et d'un voisinage complexe de $K(a,\delta')$ où Γ_1 est un cône ouvert convexe non vide convenable.

Si δ est la constante de la proposition 3.1., il est immédiat que tout hyperplan dont la normale appartient à A_ε et qui passe par le point $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$ coupe $(B'(0,a) + i\Gamma'_\varepsilon)$ en supposant γ unitaire et en notant Γ'_ε l'intersection de Γ' et de la boule de rayon ε. Si on désigne alors par M_ε l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$ et de $B'(0,a) + i\Gamma_\varepsilon$, il résulte du théorème 2.1 de [3] que f se prolonge a M_ε. La réunion des $M_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon' < \varepsilon$ contient un ouvert de la forme $K(a,\delta') + i\Gamma$ à condition de prendre $\delta' < \delta/2\sqrt{2}$.

Théorème 5.1 : Soit v une hyperfonction définie dans la réunion de $K(a\ \delta')$ et d'un voisinage de $B'(0,a)$, telle que N et -N n'appartiennent pas au support singulier essentiel de u. Soient $w_0, \ldots, w_{m-1}$ des hyperfonctions définies sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule hyperfonction u, définie dans la réunion de $K(a,\delta')$ et d'un voisinage

$B'(0,a)$, solution du problème de Cauchy :

$$P_u = v; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u\big|_{x_n=0} = w_k$$

En écrivant les hyperfonctions v et w_k comme somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, on se ramène à résoudre des problèmes de Cauchy $Pf_\alpha = g_\alpha; \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^k f_\alpha\big|_{z_n=0} = h_{k,\alpha}$ au voisinage de $B'(0,a)+i\Gamma'_\alpha$, puis on utilise la proposition pour montrer que les f_α se prolongent.

Remarque : En précisant la démonstration de la proposition 3.1. on peut montrer que l'écart angulaire entre $SS^*(u|_{X_n=0})$ et $SS^*(u|_{X_n=t})$ est majoré par une constante fois t. Il y a non seulement propagation des solutions à vitesse finie, mais aussi propagation des directions de singularité à vitesse finie (ces vitesses ne dépendant que de la constante C du théorème 2.1.

Corollaire 5.1.(résolubilité locale) : Il existe un voisinage V de 0 tel que si v est une hyperfonction définie dans un sous-ouvert ω de V il existe une hyperfonction u dans ω solution de $Pu = v$.

Le faisceau des hyperfonctions étant flasque, on peut supposer $\omega = V$. On peut écrire $v = b(g^+) + b(g^-) + \Sigma b(g_\alpha)$ où les parties I_α correspondantes ne contiennent pas N et -N, et où I_+ et I_- sont des voisinages arbitrairement petits de N et -N. Le théorème 5.1 permet de résoudre $Pu_\alpha = b(g_\alpha)$ pour V assez petit. D'autre part, le théorème 4.2 de [3] permet de résoudre $Pf^+ = g^+$ dans Γ^+. On pose $u = \Sigma u_\alpha + b(f^+) + b(f^-)$.

Remarque : On peut déduire (voir [1],[2]) des résultats qui précèdent des théorèmes d'existence et de prolongement au bord analogues à ceux de [3], en supposant que la partie principale de P est hyperbolique dans les directions normales au bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972) p.86

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Problème de Cauchy existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (Janvier 1972)

[3] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, n°11.

[4] M. Sato : Theory of hyperfunctions I et II. Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 8 (1959-60) p.139-193 et 387-437

[5] M. Sato : Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations. Actes Cong. Intern. Math. Nice 1970 t.2