Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

P. Schapira

Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 11, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A11_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

EXISTENCE ET PROLONGEMENT DES SOLUTIONS HOLOMORPHES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par J. M. BONY et P. SCHAPIRA

Exposé N° XI

5 Janvier 1972

Dans cet exposé, nous nous intéressons aux conditions de validité des deux énoncés suivants, où P désigne un opérateur différentiel à coefficients holomorphes dans $\mathbb{C}^n$:

- Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, et si Pf se prolonge holomorphiquement au voisinage d'un point frontière, la fonction f se prolonge au voisinage de ce point.

- Si g est holomorphe dans Ω au voisinage d'un point frontière, il existe f homomorphe dans Ω au voisinage de ce point, solution de Pf = g

Nous montrerons (§.4) que ces énoncés sont vrais lorsque la frontiere est non caractéristique au point considéré, l'ouvert Ω devant satisfaire une condition de cône (invariante par C^1-difféomorphismes) réalisée en particulier par les ouverts convexes ou de classe C^1.

Ces théorèmes nous permettent (§.5) de résoudre un problème posé par B. Malgrange. Si Ω est un ouvert relativement compact à frontière partout non-caractéristique, vérifiant $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$, l opérateur P considéré comme application de $\mathcal{O}(\Omega)$ (espace des fonctions holomorphes dans Ω) dans lui-même est d'indice fini.

Ces résultats permettent également (voir [1], [2] et notre prochain exposé) de résoudre les équations hyperboliques non strictes dans le cadre des fonctions analytiques et des hyperfonctions.

§ 1. NOTATIONS

Nous identifierons $\mathbb{C}^n$, muni du produit hermitien $\langle z, \zeta \rangle = \Sigma z_i \bar{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re}\langle z, \zeta \rangle$. Sauf mention explicita du contraire, le mot hyperplan signifiera hyperplan réel de $\mathbb{R}^{2n}$.

Nous noterons S^{2n-1} la sphère unité. Nous dirons qu'une partie I de S^{2n-1} est convexe (resp. propre) si le cône engendré par I est convexe (resp. ne contient aucune droite). Le polaire de I est le cône con-

vexe défini par $\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle \leq 0$ pour ζ appartenant à I. Lorsque I, I', ... désigneront des parties convexes propres de S^{2n-1}, nous noterons $\Gamma, \Gamma', \ldots$ l'intérieur de leurs polaires respectifs.

Nous considérerons des opérateurs différentiels $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ de la forme suivante

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = (\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n})$, où les coefficients $a_\alpha(z)$ sont holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Nous désignerons par

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\zeta^\alpha$$

le symbole principal de l'opérateur P.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z-z_0,\zeta\rangle = 0$ est caractéristique en z_0 si $p(z_0,\zeta) = 0$. De même nous dirons que cet hyperplan est caractéristique en z_0 relativement à une famille (P_i) d'opérateurs de ce type si on a $p_i(z_0,\zeta) = 0$ quel que soit i. Nous dirons également que le vecteur ζ est caractéristique en z_0.

Définition 1.1 : Si Ω est un ouvert de U, nous noterons $\mathrm{Car}(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble des directions qui sont caractéristiques (relativement au système (P_i)) en au moins un point de Ω.

Un vecteur non nul ζ appartient à $\mathrm{Car}(\Omega)$ s'il existe une suite (z_n,ζ_n) avec $z_n \in \Omega$; $\zeta_n \to \zeta$; $p_i(z_n,\zeta_n) = 0$.

§ 2. THEOREMES DE PROLONGEMENT

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de M. Zerner [8].

Lemme 2.1 : Soit Ω un ouvert convexe dont la frontière est de classe C^1. Supposons que la normale ζ à $\partial\Omega$ en un des points z_o soit non caractéristique pour l'opérateur P. Alors, si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de z_o, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_o.

On peut se ramener, grâce au théorème de Cauchy-Kowalewski au cas où $Pf = 0$. Nous prendrons d'autre part le vecteur ζ unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω.

Soit alors $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $\langle z-z_o, \zeta\rangle = -\varepsilon$. La frontière étant de classe C^1, la plus grande boule de $\tilde{H}_\varepsilon$ centrée en $z_o-\varepsilon\zeta$ et contenue dans $\Omega \cap \tilde{H}_\varepsilon$ a un rayon a qui est infiniment grand par rapport à ε lorsque ε tend vers 0.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé [6] il existe un nombre $\delta > 0$, indépendant de a et de ε, tel que tout germe de solution holomorphe de $Pf = 0$ au voisinage de B'_a se prolonge en fonction holomorphe dans la boule (de $\mathbb{C}^n$) $B_{\delta a}$ de même centre et de rayon δa. Cette boule contiendra z_o pour ε assez petit et f se prolonge holomorphiquement dans $\Omega \cup B_{\delta a}$.

Théorème 2.1 : Soit (P_i) une famille d'opérateurs différentiels dans U et soient ω et Ω deux convexes de U, où ω est localement compact. Ω est ouvert et $\omega \subset \Omega$. Supposons que tout hyperplan de normale appartenant à $Car(\Omega)$ qui coupe Ω coupe également ω. Alors, si f est holomorphe au voisinage de ω, et si $P_i f$ se prolonge holomorphiquement dans Ω, la fonction f se prolonge holomorphiquement dans Ω.

Ce résultat s'obtient à partir du lemme précédent en adaptant un argument géométrique dû à Hörmander ([4] th.5.3.3.).

§ 3. CAS D'UN CONE CONVEXE

Dans ce paragraphe, Γ désignera un cône ouvert convexe non vide dont le sommet appartient à U. Nous supposerons que ce sommet est l'origine, et nous désignerons par I l'intersection de S^{2n-1} avec le polaire de Γ.

Si ζ appartient à I, si I_1 et I_2 sont deux parties convexes fermées propres de S^{2n-1}, où I_1 est un voisinage de I et I_2 un voisinage de I_1, et si Γ_1 et Γ_2 désignent les intérieurs de leurs polaires respectifs, les deux propriétés suivantes sont immédiates :

- Pour $\varepsilon > 0$, l'intersection K de $\bar{\Gamma}_1$ avec l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re} \langle z, \zeta \rangle = -\varepsilon$ est une base compacte de $\bar{\Gamma}_1$.
- L'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2 est un voisinage de 0.

Lemme 3.1 : Soit (P_i) une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que les directions de I soient non caractéristiques en 0. Alors, si f est holomorphe dans Γ au voisinage de 0, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de 0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0.

Soit W un voisinage convexe de 0 dans lequel les $P_i f$ sont holomorphes et tel que Car(W) ne rencontre pas I. Choisissons I_1 et I_2 comme ci-dessus avec $I_2 \cap \mathrm{Car} W = \emptyset$. Choisissons enfin ε tel que K soit contenu dans W. D'après le théorème 2.1, si V est un voisinage ouvert convexe de 0 contenu dans l'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2, la fonction f se prolonge dans V.

Lemme 3.2 : Soit $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans U et supposons que les directions de I soient non caractéristiques en 0. Pour tout voisinage de 0, il existe un voisinage V' de 0 tel que, si g est holomorphe dans $\Gamma \cap V$, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans $\Gamma \cap V'$.

La démonstration se fait en deux étapes.

a) On démontre d'abord le lemme dans le cas où il existe ζ_0 appartenant à I et $\alpha > 0$ tels que :

- pour tout vecteur ζ de I, on a $|\zeta - \zeta_0| \leq \alpha$
- tout vecteur ζ vérifiant $|\zeta - \zeta_0| \leq \alpha$ est non caractéristique en 0.

On résout alors le problème de Cauchy $Pf = g$; traces $(f) = 0$ au voisinage de l'hyperplan complexe $\langle z, \zeta_0 \rangle = -\varepsilon$ et le théorème 2.1. permet de prolonger f à un voisinage de 0 dans Γ.

b) Dans le cas général, on montre d'abord, en utilisant la résolution du premier problème de Cousin (voir par exemple [5]) que la fonction g peut se décomposer en une somme finie de fonctions g_p, chacune d'elles étant définie dans un cône Γ_p contenant Γ et ayant suffisamment peu de normales pour que l'on puisse appliquer la première partie de la démonstration. On résout alors $Pf_p = g_p$ et on pose $f = \Sigma f_p$.

§ 4. THEOREMES D'EXISTENCE ET DE PROLONGEMENT

Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent à une classe d'ouverts invariante par C^1-difféomorphisme, contenant comme cas particuliers les ouverts convexes et les ouverts de classe C^1.

Si Γ est un cône ouvert convexe de sommet 0, nous noterons Γ_ε l'intersection de Γ et de la boule de rayon ε centrée en 0.

Définition 4.1 : Soit I une partie convexe fermée propre de S^{2n-1}. Nous dirons que l'ouvert Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$ en un de ses points frontière z_0, si pour tout voisinage I' de I, il existe un voisinage V de z_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout z appartenant à $V \cap \Omega$, on ait $z + \Gamma'_\varepsilon \subset \Omega$, où Γ' désigne l'intérieur du polaire de I'.

Remarques : 1) La propriété précédente est invariante par C^1-difféomorphismes, et s'étend naturellement aux variétés, I étant alors une partie de la sphère cotangente en z_0.

2) Si Ω est un ouvert convexe, il vérifie la condition $C(z_0, I)$ en désignant par I l'ensemble des normales extérieures à $\bar{\Omega}$ en z_0.

3) Si Ω a une frontière de classe C^1 et est situé localement du même côté de $\partial\Omega$, il vérifie $C(z_0, \{\eta\})$ où η est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en z_0.

4) Si Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$, il existe un système fondamental de voisinages V de z_0 tels que $V \cap \Omega$ soit connexe.

Théorème 4.1 : Soit $P_i(z, \frac{\partial}{\partial z})$ une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0, I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Alors, si f est holomorphe dans Ω, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.

Soit en effet Γ' l'intérieur du polaire d'un voisinage I' suffisamment petit de I. D'après le lemme 3.1, la restriction de f à $z_0 + \Gamma'_\varepsilon$ se prolonge à un voisinage V de z_0. Le prolongement obtenu n'est pas ramifié grâce à la remarque (4) ci-dessus.

Théorème 4.2 : Soit $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0,I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Pour tout voisinage V de z_0, il existe un voisinage V' de z_0 tel que, si g est holomorphe dans $\Omega \cap V$, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans $\Omega \cap V'$.

Le lemme 3.2 permet de résoudre $Pf = g$ dans le cône $z_0 + \Gamma'$, au voisinage de z_0. Le théorème 2.1 permet ensuite de démontrer que f se prolonge jusqu'à un voisinage de z_0 dans Ω.

Corollaire : Soit Ω un ouvert de classe C^1 dont la frontière est non caractéristique en z_0 pour l'opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$. Alors

- Si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge de même au voisinage de z_0.
- Si g est holomorphe dans Ω au voisinage de z_0, il existe une solution f de $Pf = g$, holomorphe au voisinage de z_0 dans Ω.

La partie "prolongement" de ce théorème est dûe à M. Zerner [8]. On peut énoncer un corollaire analogue pour un ouvert convexe dont tous les hyperplans d'appui en z_0 sont non caractéristiques en ce point.

§ 5. INDICE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS

Nous supposerons dans ce paragraphe que U est une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, et que $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ est un opérateur défini sur U.

Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur U. Si ω est un ouvert, nous désignerons par $\mathcal{O}(\omega)$ ou par $H^0(\omega,\mathcal{O})$ l'espace des fonctions holomorphes dans ω. De même, si K est compact, nous noterons $\mathcal{O}(K)$ ou $H^0(K,\mathcal{O})$ l'espace des germes de fonctions

holomorphes au voisinage de K.

Théorème 5.1 : Soit Ω un ouvert relativement compact de U. Supposons qu'en chaque point z_0 de sa frontière, Ω vérifie une condition de cône $C(z_0, I)$ où les directions de I sont non caractéristiques pour P en z_0. Supposons d'autre part que $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$.

Alors l'opérateur P, de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

Corollaire 5.1 : Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{C}^n$, tel que tout hyperplan d'appui de $\bar{\Omega}$ soit non caractéristique en ses points d'appui. Alors l'opérateur P de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

Corollaire 5.2 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de classe C^1 et dont la frontière est non caractéristique. Si de plus $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$, l'opérateur P est d'indice fini de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration du théorème 5.1 : Considérons le préfaisceau défini par : $\omega \rightsquigarrow \mathcal{O}(\Omega \cap \omega)$. C'est évidemment un faisceau que nous noterons $\mathcal{O}^+$. Nous désignerons d'autre part par $\mathcal{O}_P$ le faisceau des germes de solutions holomorphes de l'équation $Pf = 0$.

Il résulte du théorème de Cauchy Kowalewsky que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

est exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

D'autre part, les théorèmes 4.1 et 4.2 expriment que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}^+ \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+ \to 0$$

est aussi exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

On en conclut que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$$

est exacte en tout point de U, le faisceau $\mathcal{O}^+/\mathcal{O}$ étant porté par $\partial\Omega$.

De la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^+ \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$, on déduit :

$$0 \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}) \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+) \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+/\mathcal{O}) \to H^1(\bar{\Omega},\mathcal{O}) = 0$$

d'où $$H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+/\mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega}).$$

L'opérateur P définit donc un isomorphisme de $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sur lui-même. Rappelons que les espaces $\mathcal{O}(\Omega)$ et $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sont respectivement munis de topologies naturelles du type Frechet-Schwartz et dual de Frechet-Schwartz. Sur l'espace $\mathcal{O}_p(\Omega) = \mathcal{O}_p(\bar{\Omega})$, ces deux topologies coïncident d'après le théorème du graphe fermé et cet espace est donc de dimension finie.

Considérons d'autre part l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \rightsquigarrow Pf + g$. Elle est surjective. L'espace $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ étant limite inductive dénombrable des espaces de Frechet $\mathcal{O}(\Omega')$ pour Ω' voisinage de $\bar{\Omega}$, il existe un de ces voisinages Ω' tel que la restriction de l'application à $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ soit surjective [3]. Soit maintenant l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \to -g$. C'est une application compacte et un théorème classique de L. Schwartz [12] assure que la somme des deux applications précédentes a une image fermée de codimension finie, ce qui achève la démonstration.

Remarque : On a en fait démontré que P considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans lui-même ou considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans lui-même, avait mêmes noyaux et conoyaux, et que ces espaces étaient de dimension finie.

Exemple : Dans $\mathbb{C}^2$, l'opérateur $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ vérifie les hypothèses du théorème en prenant pour Ω une boule centrée à l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts; C. R. Acad. Sc. Paris , Janvier 1971

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Problème de Cauchy, Existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes; C. R. Acad. Paris, Janvier 1972

[3] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires; Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence, 1955.

[4] L Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag Berlin, 1963

[5] L. Hörmander : An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, 1966

[6] J. Leray : Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. Math. Fr., 85, p.389-429, 1957

[7] L. Schwartz : Homomorphismes et applications complètement continues C. R. Acad. Sc. Paris, 236, p.2472, 1953

[8] M. Zerner : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles; C. R. Acad. Sc. Paris,272, p.1646 1971.