Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Richard Becker

Idempotence de l'opération de souslin

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° C3, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A12_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, Communication n° 3, 2 p.

Février 1973

IDEMPOTENCE DE L'OPÉRATION DE SOUSLIN

par Richard BECKER

Ce travail a pour objet de donner une démonstration très simple de l'idempotence de l'opération de Souslin, dans le cadre d'une famille $\mathcal{K}$ de parties d'un ensemble E, stable par intersection finie.

Les notations et définitions sont celles de [1] :

1° Soit $\Delta = (H_s)$ une famille de parties de E dans $\mathcal{K}$, indexée par les suites finies s de N, ensemble des entiers naturels. On dit que Δ est un système déterminant de E.

2° Si σ est un élément de Σ (suites infinies de N), la notation $s < \sigma$ signifie que s est une section commençante de σ. On pose

$$H_\sigma = \bigcap_{s<\sigma} H_s .$$

3° On pose

$$H_\Delta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} H_\sigma .$$

On dit que H_Δ est le noyau de Δ, et est un ensemble $\mathcal{K}$-souslinien. L'opération $\Delta \longmapsto H_\Delta$ est appelée Opération de Souslin.

THÉORÈME (Idempotence de l'opération de Souslin [1], [2], [3]). - Tout noyau d'un système déterminant de E, dont les éléments sont $\mathcal{K}$-sousliniens, est lui-même $\mathcal{K}$-souslinien.

Preuve. - On va supposer $E \in \mathcal{K}$. Les modifications à apporter dans le cas contraire seront évidentes. On a

$$H_\Delta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} H_s \quad \text{avec} \quad H_s = \bigcup_{\sigma'} \bigcap_{s'<\sigma'} H_s^{s'} , \text{ où } H_s^{s'} \in \mathcal{K} .$$

Soit $(p , q) \longmapsto e(p , q)$ l'application de $N^* \times N$ dans N^*, déduite de l'énumération classique de $N^* \times N$: $(1 , 0)$; $(1 , 1)$, $(2 , 0)$; $(1 , 2)$, $(2 , 1)$, $(3 , 0)$; $(1 , 3)$, $(2 , 2)$, $(3 , 1)$, $(4 , 0)$; etc. où l'on range les couples (p , q) de $N^* \times N$ de sorte que $e(p , q) \leqslant e(p' , q')$ si, et seulement si : ou bien $p + q < p' + q'$, ou bien $p + q = p' + q'$ et $p \leqslant p'$.

Soit $s = a_1 , a_2 , \dots , a_n$ une suite finie de longueur $\ell(s) = n$:

1° Si n est de la forme $n = e(p , 0)$, on pose : $K_s = E$.

2° Si n est de la forme $n = e(p , q)$, avec $q \geqslant 1$, on pose : $K_s = H_r^t$ où

$$r = a_{e(1,0)} , a_{e(2,0)} , \dots , a_{e(p,0)}$$

et

$$t = a_{e(p,1)} , a_{e(p,2)} , \dots , a_{e(p,q)} .$$

Soit σ : $k \longmapsto \sigma(k)$, une suite infinie, on pose :

$$\sigma_0 = \sigma(e(1\ ,\ 0))\ ,\ \sigma(e(2\ ,\ 0))\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma(e(i\ ,\ 0))\ ,\ \ldots$$

et, pour $p \geqslant 1$:

$$\sigma_p = \sigma(e(p\ ,\ 1))\ ,\ \sigma(e(p\ ,\ 2))\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma(e(p\ ,\ m))\ ,\ \ldots$$

On a alors

$$K_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma_0} (H_s^{\sigma_{\ell(s)}}) \quad \text{et donc} \quad K_\Delta \subset H_\Delta\ .$$

Réciproquement,

$$x \in H_\Delta \Longleftrightarrow \exists\ \sigma_x\ ,\ \forall\ s \prec \sigma_x\ ,\ \exists\ \sigma'_{(s,x)} \ \text{telle que}\ x \in H_s^{\sigma'_{(s,x)}}\ .$$

On aura donc $x \in K_\sigma$ dès que σ sera telle que :

$$\sigma_0 = \sigma_x \quad \text{et} \quad \forall\ s \prec \sigma_0 : \ \sigma_{\ell(s)} = \sigma'_{(s,x)}\ .$$

Or ceci est toujours réalisable car $\sigma \longmapsto (\sigma_0\ ;\ \sigma_1\ ,\ \sigma_2\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_p\ ,\ \ldots)$ constitue une bijection de Σ sur $(\Sigma)^{\mathbb{N}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique. Cours rédigé par Claude Mayer. - Paris, Centre de documentation universitaire, 1969.

[2] SIERPINSKI (W.). - Algèbre des ensembles. - Warszawa, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 1951 (Monografic matematyczne, 23).

[3] SIMONS (S.). - A proof that Souslin Souslin H $\subset$ Souslin H , Canadian math. Bull., t. 9, 1966, p. 79-82.

Richard BECKER
Université de Paris VI
Mathématiques, E. R. A. 294
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05