Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Une propriété des germes suivant un ultrafiltre

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C1, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A9_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 1, 4 p.

UNE PROPRIÉTÉ DES GERMES SUIVANT UN ULTRAFILTRE

par Gustave CHOQUET

Résumé. - On montre que, si une application d'un ensemble dans lui-même transforme un ultrafiltre $\mathcal{U}$ en lui-même, son germe suivant $\mathcal{U}$ est l'identité.

☆
☆ ☆

Une question posée par A. CONNES [2], à propos de ses recherches en analyse non-standard, m'a conduit à remarquer une propriété fort simple des ultrafiltres (théorème 1) ([1]). A. CONNES a eu l'heureuse idée d'appliquer cette propriété aux ultrafiltres absolus définis antérieurement (CHOQUET [1]), et en a déduit l'existence de certains modèles intéressants en analyse non-standard. On se contentera ici de donner une brève indication sur cette application.

THÉORÈME 1. - *Soient* E *un ensemble quelconque,* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltre sur* E, *et* f *une application de* E *dans* E. *Il existe un* $U \in \mathcal{U}$ *tel que :*

- *Ou bien* f_U = *identité ;*
- *Ou bien* U *et* $f(U)$ *sont disjoints.*

Voici une autre forme équivalente du théorème 1, souvent plus commode pour les applications :

THÉORÈME 1 bis. - *Soient* E *un ensemble quelconque,* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltre sur* E, *et* f *une application de* E *dans* E. *Si* $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ ([2]), *il existe un* $U \in \mathcal{U}$ *tel que* f_U = *identité* (*autrement dit, le germe de* f *suivant* $\mathcal{U}$ *est le germe de l'application identique*).

([1]) Peu de temps après, CONNES apprit, chez les logiciens, que cette propriété était déjà connue d'eux ; et d'autre part, une lettre de Roy O. DAVIES m'apprit qu'elle figurait déjà dans la littérature (voir KATĚTOV [3], [4], et KENYON [5]) sous la forme suivante : Si f est une application quelconque de E dans lui-même, on peut écrire $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, où $f(x) = x$ pour tout $x \in X_1$, et $f(X_i) \cap X_i = \emptyset$ pour $i = 2, 3, 4$.
Nous publions cependant ce travail, d'une part parce que le théorème 1 ne semble pas connu des analystes, d'autre part parce qu'il pose une question intéressante, le problème 3.

([2]) Rappelons que, si $\mathcal{F}$ est un filtre, $f(\mathcal{F})$ est le filtre ayant pour base les ensembles $f(X)$, où $X \in \mathcal{F}$. Quand $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $f(\mathcal{F})$ est aussi un ultrafiltre.

Voici enfin une troisième forme équivalente, peut-être plus curieuse qu'utile :

THÉORÈME 1 ter. - Soit $\check{E}$ l'espace topologique (compact) des ultrafiltres sur un ensemble E, et soit φ une application continue de $\check{E}$ dans lui-même. Alors l'ensemble fermé des points invariants de φ est ouvert.

C'est la forme 1 du théorème que nous allons démontrer. Nous utiliserons pour cela systématiquement la structure de l'application f.

Démonstration du théorème 1. - Notons d'abord que E est réunion des deux ensembles E_1, E_2 ainsi définis :

$E_1 = \{x \in E$ tels que l'ensemble des $f^p(x)$ soit infini$\}$ et $E_2 = \complement E_1$.

Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, il est porté par l'un des ensembles E_1, E_2 ; et, comme $f(E_i) \subset E_i$ pour chaque i, on peut ramener la démonstration au cas où E est l'un des E_i ; d'où deux cas à examiner :

1° Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $x \in E$ est infini (i. e. aucun des f^p n'a de point fixe).

Introduisons sur E deux relations :

$(x \backsim y)$, s'il existe deux entiers p, $q > 0$ tels que $f^p(x) = f^q(y)$;

$(x \approx y)$, s'il existe deux entiers p, $q > 0$ de même parité tels que $f^p(x) = f^q(y)$.

Ce sont évidemment deux relations d'équivalence ; la seconde est plus fine que la première, et toute classe d'équivalence C de la première est réunion de deux classes d'équivalence de la seconde, que nous noterons C_1, C_2 en utilisant l'axiome du choix.

Pour chaque C, on a $f(C_1) = C_2$ et $f(C_2) = C_1$. Donc, si l'on pose $X_i = \bigcup_C C_i$, les ensembles X_1, X_2 sont disjoints, et l'on a

$$f(X_1) = X_2 \qquad \text{et} \qquad f(X_2) = X_1 .$$

Comme l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est porté par l'un des deux X_i, nous sommes dans le second cas envisagé par le théorème 1.

2° Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $f^p(x)$ est fini.

Posons X = réunion des cycles (forcément finis et mutuellement disjoints) de E. Puis, pour tout $p \geqslant 1$, $Y_p = \{x \in E$; $f^p(x) \in X$ et $f^{p-1}(x) \notin X\}$; les Y_p sont mutuellement disjoints, et leur réunion est $Y = \complement X$. Enfin, notons que X est réunion de trois ensembles disjoints X_1, X_2, X_3, qui sont la réunion des cycles respectivement, d'ordre 1, d'ordre pair, d'ordre impair $\geqslant 3$.

Comme E est réunion de X_1 , X_2 , X_3 , Y , l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est porté par l'un de ces ensembles.

(a_1) Si $X_1 \in \mathcal{U}$, comme f_{X_1} est l'identité, on est dans le premier cas du théorème 1.

(a_2) Si $X_2 \in \mathcal{U}$, il existe une partition évidente de X_2 en deux ensembles X_2' , X_2'' , dont chacun est l'image de l'autre par f . Comme $\mathcal{U}$ est porté par l'un d'eux, on est dans le second cas du théorème 1.

(a_3) Si $X_3 \in \mathcal{U}$, il existe, d'après l'axiome du choix, une partie A de X_3 ayant exactement un point dans chacun des cycles de X_3 . Posons $B = (X_3 \setminus A)$. Alors $\mathcal{U}$ est porté par A ou B . Si $A \in \mathcal{U}$, on est dans le second cas du théorème 1, car A et $f(A)$ sont disjoints. Si $B \in \mathcal{U}$, utilisons la partition de B en les ensembles B_1 , B_2 contenant respectivement, dans chaque cycle (si $(2p + 1)$ est son ordre), les p transformés impairs du point de A , et les p transformés pairs de ce point. Comme $\mathcal{U}$ contient l'un des deux B_i , et comme B_i et $f(B_i)$ sont disjoints pour chaque i , on est à nouveau dans le second cas du théorème 1.

(b) Si $Y \in \mathcal{U}$, montrons qu'on est aussi dans ce second cas : Si $Y_1 \in \mathcal{U}$, on a $f(Y_1) \subset X$, d'où Y_1 et $f(Y_1)$ disjoints. Sinon, $(Y \setminus Y_1) \in \mathcal{U}$; posons alors

$$Y' = \bigcup_{p>0} Y_{2p+1} \qquad \text{et} \qquad Y'' = \bigcup_{p>0} Y_{2p} \ .$$

On a $f(Y') \subset Y''$ et $f(Y'') \subset (Y' \cup Y_1)$, donc chacun des ensembles Y' , Y'' est disjoint de son image, ce qui termine la démonstration, puisque l'un d'eux porte $\mathcal{U}$.

Notons après coup qu'on aurait pu abréger un peu la démonstration, en définissant dès le début les ensembles X_1 , X_2' , X_2'' , A , B_1 , B_2 , Y' , Y'' ; mais ce parachutage aurait dissimulé la raison de leur choix.

Application. - Nous allons maintenant donner quelques indications sur la façon dont CONNES a appliqué le théorème 1 bis aux ultrafiltres absolus pour construire des modèles non-standards.

Rappelons (CHOQUET [1]) qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble E est dit absolu si, pour toute application f de E dans un autre ensemble, le germe de f suivant $\mathcal{U}$ est, soit injectif, soit un germe d'application constante.

Si K est un ensemble quelconque, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E , on désigne par $\mathfrak{F}(\mathcal{U} , K)$ l'ensemble des germes suivant $\mathcal{U}$, d'applications de E dans K (on l'appelle aussi ultra-puissance de K associée à $\mathcal{U}$). On sait par exemple que, si K est un corps, l'algèbre $\mathfrak{F}(\mathcal{U} , K)$ (pour les opérations usuelles) est aussi un corps.

Le lemme qu'utilise A. CONNES dans son travail est le suivant :

LEMME 2. - Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre absolu, l'application $\varphi \to \varphi(\mathcal{U})$, définie sur $\mathfrak{F}(\mathcal{U}, K)$, est injective.

Démonstration. - Soient φ_1 , $\varphi_2 \in \mathfrak{F}(\mathcal{U}, K)$ tels que $\varphi_1(\mathcal{U}) = \varphi_2(\mathcal{U})$. Si ce filtre $\varphi_i(\mathcal{U})$ est trivial, la relation $\varphi_1 = \varphi_2$ est évidente. Sinon, soient f_1 , f_2 deux applications de E dans K , dont les germes suivant $\mathcal{U}$ sont respectivement φ_1 , φ_2 . Comme $\mathcal{U}$ est absolu, il existe $X \in \mathcal{U}$ tel que les restrictions de f_1 , f_2 à X soient injectives ; posons $Y = f_1(X) \cap f_2(X)$, et désignons par f_i^{-1} la restriction à Y de l'application réciproque de f_i sur X . Par hypothèse, l'application $g = f_2^{-1} \circ f_1$ de $f_1^{-1}(Y)$ dans E transforme $\mathcal{U}$ en lui-même. D'après le théorème 1 bis, il existe donc dans X un $X' \in \mathcal{U}$ sur lequel g est l'identité ; on a donc $f_1 = f_2$ sur X' ; autrement dit, $\varphi_1 = \varphi_2$.

Lorsque K est un corps, le lemme 2 permet d'identifier le corps $\mathfrak{F}(\mathcal{U}, K)$ à l'ensemble des ultrafiltres sur K qui sont, soit triviaux, soit isomorphes à $\mathcal{U}$. C'est cette identification qu'utilise A. CONNES.

Problème 3. - On peut se demander si les ultrafiltres absolus sont les seuls qui vérifient le lemme 2. Autrement dit, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur E , est-ce que le caractère injectif de l'application $\varphi \to \varphi(\mathcal{U})$ définie sur $\mathfrak{F}(\mathcal{U}, K)$ équivaut au caractère absolu de $\mathcal{U}$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underline{N}$, Bull. Sc. math., Paris, t. 92, 1968, p. 143-153.

[2] CONNES (Alain). - Théorie des ultrapuissances et applications, dans le cadre de l'analyse non-standard, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 8, 25 p.

[3] KATĚTOV (M.). - A theorem on mappings, Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 8, 1967, p. 431-433.

[4] KATĚTOV (M.). - Products of filters, Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 9, 1968, p. 173-189.

[5] KENYON (Hewitt). - Partition of a domain (Advanced problems and solutions, n° 5077), Amer. math. Monthly, t. 70, 1963, p. 216, et t. 71, 1964, p. 219-220.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92 - ANTONY