Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier
Nessim Sibony

Approximation polynomiale pondérée sur une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}n$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 22, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A5_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 22, 9 p.

27 mai 1971

APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ TOTALEMENT RÉELLE DE $\underset{\sim}{C}^n$

par Jean-Pierre FERRIER et Nessim SIBONY

1. Introduction et notations.

Soient K un compact de $\underset{\sim}{C}^n$, $\mathcal{C}(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K, munie de la topologie de la convergence uniforme. Un problème classique est celui de l'approximation des fonctions de $\mathcal{C}(K)$ par des fonctions holomorphes au voisinage de K, ou encore par des polynômes. Désignons par $H(K)$ l'adhérence dans $\mathcal{C}(K)$ des fonctions holomorphes au voisinage de K, et par $P(K)$ l'adhérence de l'espace des polynômes. Lorsque K est un compact de $\underset{\sim}{C}$, et $K^0 = \emptyset$, un théorème de Mergel'jan permet d'affirmer que $H(K) = \mathcal{C}(K)$ si CK a un nombre fini de composantes connexes, lorsque CK est connexe, on a $P(K) = \mathcal{C}(K)$.

Lorsque K est un compact de $\underset{\sim}{C}^n$, $n > 1$, la situation est moins simple ; cependant, HÖRMANDER et WERMER ont démontré, dans [3], un théorème d'approximation lorsque K est porté par une sous-variété totalement réelle.

Plus précisément, soit Σ une sous-variété réelle de $\underset{\sim}{C}^n$ de dimension réelle k, pour x dans Σ, désignons par T_x l'espace tangent à Σ en x ; on appelle droite complexe tangente à Σ en x un sous-espace vectoriel de $\underset{\sim}{C}^n$ de dimension complexe 1 contenu dans T_x.

Si, en tout point, Σ n'a pas de droite complexe tangente, on dit que Σ est totalement réelle, ce qui suppose que $\dim_{\underset{\sim}{R}} \Sigma \leq n$.

Exemples. - Une sous-variété de $\underset{\sim}{R}^n \subset \underset{\sim}{C}^n$; une courbe de $\underset{\sim}{C}^n$, i. e. une sous-variété de dimension 1 ; la frontière distinguée d'un polydisque.

Dans $\underset{\sim}{C}^2$, considérons la variété $\Sigma = \{z \mid (z_1, z_2) \in C^2, \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, avec $z_2 = 0\}$. Σ n'a de droites complexes tangentes qu'aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

Etant donné un compact K de $\underset{\sim}{C}^n$, on dit qu'il est polynomialement convexe si, pour tout z n'appartenant pas à K, il existe un polynôme p tel que

$$|p(z)| > \sup_{\zeta \in K} |p(\zeta)| .$$

HÖRMANDER et WERMER ont démontré le théorème suivant [4].

THÉORÈME 1. - Soit K un compact polynomialement convexe contenu dans une variété Σ totalement réelle de $\underset{\sim}{C}^n$, alors $P(K) = \mathcal{C}(K)$.

Nous nous proposons, en utilisant les techniques de HÖRMANDER-WERMER, d'étudier le problème d'approximation sur Σ de fonctions continues, ayant une certaine croissance, par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, puis par des polynômes.

2. Position du problème.

Soient Ω un domaine d'holomorphie dans $\underset{\sim}{C}^n$, et Σ une sous-variété C^∞ totalement réelle de Ω ; soit δ une fonction lipschitzienne positive de rapport 1 dans $\underset{\sim}{C}^n$ telle que $\Omega = \{z \mid z \in \underset{\sim}{C}^n , \ \delta(z) > 0\}$. On suppose, de plus, que

$$\delta \leqslant \delta_0 \ , \text{ où } \ \delta_0(z) = (1 + (z)^2)^{-1/2} \ \text{ et } \ \lim \delta(x) = 0$$

lorsque x tend vers l'infini dans le compactifié d'Aleksandrov de Σ, et enfin que $-\log \delta$ est p. s. h. dans Ω.

Désignons par $\mathcal{C}(k , \delta)$ l'espace des fonctions continues sur Σ telles que

$$\|f\|_k = \sup_{x\in\Sigma} \delta^k(x) \ |f(x)| < \infty \ ,$$

et par $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ la réunion des $\mathcal{C}(k , \delta)$ lorsque k parcourt les entiers positifs.

Définition 2. - On dira qu'un espace H de fonctions est dense dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ s'il existe un entier γ tel que, pour tout k entier positif, $\mathcal{C}(k , \delta)$ est dans l'adhérence de H pour la topologie de $\mathcal{C}(\gamma k , \delta)$.

Autrement dit, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(k , \delta)$, il existe une suite f_p dans H telle que $\|f - f_p\|_{\gamma k}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, γ étant indépendant de k et de f.

Remarque. - Lorsque, pour tout k, $\sup_{z\in\Omega} \delta(z) \ \delta_0^{-k}(z) < \infty$, et que H est l'espace des polynômes, dire que H est dense dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ équivaut à dire que le poids de δ_Σ^γ est fondamental au sens de BERNSTEIN sur Σ (δ_Σ désigne la restriction de δ à Σ). En effet, on peut approcher les fonctions continues sur Σ à croissance polynomiale pour la norme $\|f\| = \sup_{x\in\Sigma} \delta_\Sigma^\gamma(x) \ |f(x)|$.

Pour traiter ce problème d'approximation, nous aurons besoin du théorème suivant, dû à HÖRMANDER [1]. On reprend les notations de l'exposé précédent.

3. Théorèmes.

THÉORÈME 3. - *Soient Ω un domaine d'holomorphie dans $\underset{\sim}{C}^n$, Φ une fonction p. s. h. dans Ω, et g une forme différentielle de type $(0 , 1)$ à coefficients dans $L^2_{loc}(\Omega)$ telle que $\overline{\partial} g = 0$ et $\int_\Omega |g|^2 \exp(-\Phi) \, d\lambda(z) < \infty$. Alors il existe f dans $L^2_{loc}(\Omega)$ avec $\overline{\partial} f = g$ et*

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-\Phi) \ \delta_0^4 \, d\lambda(z) \leqslant \int_\Omega \exp(-\Phi) \ |g|^2 \, d\lambda(z) \ ,$$

où $|g|^2 = \sum_i |g_i|^2$ *si* $g = \sum_i g_i \, \overline{dz}_i$, *avec* $1 \leqslant i \leqslant n$.

$H(U)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert U, $d(z, \Sigma)$ la distance du point z à la variété Σ, et enfin

$$T_\alpha = \{z \mid z \in \Omega \text{ tels que } d(z, \Sigma) < \alpha\} .$$

THÉORÈME 4. - Supposons que $d^2(z, \Sigma)$ soit p. s. h. dans T_{α_0}, alors $H(T_{\alpha_0})$ est dense dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 5. - Les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Σ sont denses dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$.

Démonstration. - Soit (K_j) une suite exhaustive de compacts de Σ avec $K_j \subset \overset{0}{K}_{j+1}$, et soit Φ_j dans $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, $0 \leqslant \Phi_j \leqslant 1$, valant 1 dans un voisinage de K_j et à support dans K_{j+1}.

Pour f dans $\mathcal{C}(k, \delta)$, on a

$$\delta_\Sigma^{k+1} |\Phi_j f - f| = \delta_\Sigma^k |f| (1 - \Phi_j) \delta_\Sigma \leqslant M (1 - \Phi_j) \delta_\Sigma$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini (hypothèse sur δ_Σ).

Donc on peut approcher f dans $\mathcal{C}(k+1, \delta)$ par des fonctions à support compact.

Soit alors g à support compact dans Σ, vérifiant $\delta_\Sigma^{k+1} |g| \leqslant 1$, on peut la prolonger en une fonction $\tilde{g}$ à support compact dans Ω, vérifiant $\delta^{k+1} |\tilde{g}| \leqslant 1$; en effet, soit g_1 un prolongement de g à support compact dans Ω, on peut toujours supposer g réelle ; posons alors

$$\tilde{g}(z) = \inf(\delta^{-(k+1)}, g_1(z)) \quad \text{lorsque} \quad g_1(z) \geqslant 0$$

et

$$\tilde{g}(z) = \sup(-\delta^{-(k+1)}, g_1(z)) \quad \text{lorsque} \quad g_1(z) \leqslant 0 ,$$

on a bien: $\tilde{g}$ est à support compact et $|\tilde{g}| \delta^{k+1} \leqslant 1$.

ρ étant une fonction $\geqslant 0$ $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans la boule unité de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^n$, avec $\int \rho(z) \, d\lambda(z) = 1$; notons $\rho_\varepsilon(z) = \lambda(z/\varepsilon)$ et $\tilde{g}_\varepsilon = \tilde{g} * \alpha_\varepsilon$, pour ε assez petit, $\tilde{g}_\varepsilon$ est à support compact dans Ω, $\tilde{g}_\varepsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$, et converge uniformément dans Ω vers g, d'où, en prenant les restricitions des $\tilde{g}_\varepsilon$ à Σ, on obtient le lemme.

LEMME 6. - Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω, il existe un prolongement G de g/Σ, avec G à support compact dans Ω et

$$|\partial G / \partial \overline{z_j}| \leqslant C \, d(z, \Sigma)^N .$$

Ce lemme est dû à HÖRMANDER-WERMER [4].

Démonstration. - On fait d'abord le prolongement localement. Soit $x_0 \in \Sigma$, il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, dans $\underset{\sim}{C}^n$, et des fonctions $\rho_1, \dots, \rho_m$ $\mathcal{C}^\infty$, définies dans $V(x_0)$, telles que

$$\Sigma \cap V(x_0) = \{x \mid x \in V(x_0),\ \rho_1(x) = \dots = \rho_m(x) = 0\}.$$

Il existe un voisinage $V_1(x_0) \subset V(x_0)$ et des entiers $\nu_1, \dots, \nu_n$, tels que $(\partial\rho_{\nu_j}/\partial\bar{z}_1, \dots, \partial\rho_{\nu_j}/\partial\bar{z}_n)_x$, $j = 1, \dots, n$, forment une base de $\underset{\sim}{C}^n$ pour tout^j x dans $V_1(x_0)^j$.

En effet, posons $\xi_\nu = (\partial\rho_\nu/\partial\bar{z}_1, \dots, \partial\rho_\nu/\partial\bar{z}_n)_{x_0}$, $\nu = 1, \dots, m$, si $\xi_1, \dots, \xi_m$ n'engendraient pas $\underset{\sim}{C}^n$, il existerait $C = (C_1, \dots, C_m) \neq 0$ avec $(C, \xi_\nu) = 0$ pour tout ν, et par suite $\sum_j C_j \partial/\partial\bar{z}_j$, $1 \leq j \leq n$, serait un vecteur tangent à Σ en x_0, ce qui signifierait que Σ a une droite complexe tangente en x_0. On peut donc supposer que $\rho_1, \dots \rho_n$ sont tels que

$$(\partial\rho_i/\partial\bar{z}_1, \dots, \partial\rho_i/\partial\bar{z}_n),\ i = 1, \dots, n,$$

définissent une base de $\underset{\sim}{C}^n$ dans un voisinage $V_1(x_0)$.

On a donc $(\partial g/\partial\bar{z}_1, \dots, \partial g/\partial\bar{z}_n)(x) = \sum_i h_i(x)(\partial\rho_i/\partial\bar{z}_1, \dots, \partial\rho_i/\partial\bar{z}_n)(x)$ pour $x \in V_1$, avec $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire $\bar{\partial}g = \sum_i h_i \bar{\partial}\rho_i$ avec $h_i \in \mathcal{C}^\infty(V_1)$, $1 \leq i \leq m$.

Si on pose $g_1 = g - \sum_i h_i \rho_i$, $1 \leq i \leq n$, on a $g_1 = g$ sur Σ et

$$\bar{\partial}g_1 = \bar{d}g - \sum_i h_i \bar{\partial}\rho_i - \sum_i \bar{\partial}h_i \rho_\nu = -\sum_i (\bar{\partial}h_i)\rho_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

de même $\bar{\partial}h_i = \sum_j h_{ij} \bar{\partial}\rho_j$, $1 \leq j \leq n$, et

$$g_2 = g_1 + \sum_{i,j} h_{ij} \rho_i \rho_j,\ \bar{\partial}g_2 = 1/2!\ \sum_{i,j} \bar{\partial}h_{ij} \rho_i \rho_j,\ g_2/\Sigma = g/\Sigma.$$

On définit ainsi, par récurrence, pour un multi-indice I, h_I dans V_1,

$$\bar{\partial}h_I = \sum_j h_{I,j} \bar{\partial}\rho_j,\ 1 \leq j \leq n,$$

ce qui définit les $h_{I,j}$, et

$$g_N = g_{N-1} + ((-1)^N/N!) \sum_{|I|=N} h_I \rho_I,$$

où $I = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|I| = \beta_i$, $\rho_I = \rho_1^{\beta_1} \dots \rho_n^{\beta_n}$, $h_I \in \mathcal{C}^\infty(V_1)$, et on voit que

$$\bar{\partial}g_N = ((-1)^N/N!) \sum_{|I|=N} (\bar{\partial}h_I) \rho_I.$$

Or $|\rho_I(z)| \leq C\, d(z, \Sigma)^N$ dans V_1 si $I = N$, ceci d'après le théorème des accroissements finis, et par suite, pour tout j, $|\partial g_N/\partial\bar{z}_j| \leq C_1\, d(z, \Sigma)^N$ dans V_1.

Faisons maintenant le prolongement globalement : pour chaque $x \in K = \mathrm{Supp}\ g/\Sigma$, on choisit un ouvert du type précédent, on recouvre K par $V_1, \dots, V_q$, et

soit X_1 , ... , X_q une partition de l'unité C^∞ de K assujetie au recouvrement (V_i) , on applique la construction précédente à $g_i = gX_i$. On construit le prolongement G_i de g_i/Σ , en notant qu'on peut prendre $G_i = 0$ hors de V_i , et on pose $G = \sum_i G_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, on a $|\partial G/\partial \bar{z}_j| \leqslant q\, C\, d(z\ ,\ \Sigma)^N$ pour tout j , C et q dépendant de la variété de g et de l'entier N choisi.

LEMME 7. - Posons $\delta_\varepsilon = \inf[\delta\ ,\ (\varepsilon^2 - d^2(z\ ,\ \Sigma))^+]$, la fonction $-\log \delta_\varepsilon$ est p. s. h. dans T_ε pour $\varepsilon < \alpha_0$, de plus, $-\log \delta_\varepsilon(z) = \sup_j \varphi_j(z)$ pour $z \in T_\varepsilon$ avec φ_j p. s. h. dans T_{α_0} . Il en résulte que T_ε est un domaine d'holomorphie pour $\varepsilon < \alpha_0$.

Démonstration. - $-\log \delta_\varepsilon = \sup[-\log \delta\ ,\ -\log(\varepsilon^2 - d^2)^+]$; or d^2 est p. s. h. dans T_{α_0} par hypothèse, et $f(x) = -\log(\varepsilon^2 - x)$ est convexe croissante dans $[0\ ,\ \varepsilon[$, donc $-\log(\varepsilon^2 - d^2)^+$ est p. s. h. dans T_ε , il en est donc de même de $-\log \delta_\varepsilon$ comme sup de deux fonctions p. s. h.

$-\log \delta_\varepsilon$ tend vers l'infini lorsque z tend vers la frontière du domaine T_ε , donc T_ε est un domaine pseudo-convexe, donc d'holomorphie.

On remarque que $f(x) = \sup_j f_j(x)$ pour $0 \leqslant n < \varepsilon$, où f_j est une fonction convexe croissante dans $\underset{\sim}{R}_+$, affine pour x assez grand, par suite,

$$-\log \delta_\varepsilon(z) = \sup[-\log \delta(z)\ ,\ f_j(d^2(z\ ,\ \Sigma))]\ ,$$

pour $z \in T_\varepsilon$, d'où le lemme.

Enfin, nous aurons besoin d'un lemme classique en théorie des équations aux dérivées partielles. Pour plus de commodité, nous en écrirons la démonstration.

LEMME 8. - Si $z_0 \in \underset{\sim}{C}^n$, $B_r = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ et $W \in L^2(B_r)$, W de classe C^2 , alors

$$|W(z_0)| < C\,\{r^{-n} \|W\|_{L^2(B_r)} + r \sup_{B_r} (\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\partial W/\partial \bar{z}_j|)\}\ .$$

Démonstration. - Plaçons-nous dans le cas $r = 1$, le lemme en résultera en posant $W_1(z) = W(rz)$. Soit $X \in C_0^\infty(B)$, $X = 1$ dans $|z| < 1/2$, et soit E la solution fondamentale du laplacien dans $\underset{\sim}{R}^{2n}$.

$$W(0) = (WX)(0) = \langle E\ ,\ \Delta(XW)\rangle = \langle E\ ,\ (\Delta X)W\rangle + \langle EX\ ,\ \Delta W\rangle + 2\,\langle E\ ,\ \textstyle\sum_i \partial X/\partial X_i\ \partial W/\partial X_i\rangle$$

$$= \quad I_1 \quad + \quad I_2 \quad + \quad I_3$$

$1 \leqslant i \leqslant 2n$.

Or $|I_1| \leqslant C \|W\|_{L^2(B)}$, car ΔX est nulle sur $|z| < 1/2$.

$$I_2 = 4 \int (\Sigma_j (\partial^2 W/\partial z_j \, \partial \bar{z}_j)) \, X(x) \, E(x) \, dx = -4 \int \Sigma_j \, \partial W/\partial \bar{z}_j \, \partial/\partial z_i \, (XE) ,$$

donc $|I_2| \leqslant C \sup_B (\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\partial W/\partial \bar{z}_j|)$, car $\partial/\partial z_j (XE) = 0$ dans $|z| < 1/2$.

$$I_3 = 2 \Sigma_i \int \partial X/\partial x_i \, \partial W/\partial x_i \, E(x) \, dx = - \Sigma \int W \, \partial/\partial x_i \, (\partial X/\partial x_i \, E) , \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n ,$$

$|I_3| \leqslant C \, \|W\|_{L^2(B)}$, d'où le résultat.

Démonstration du théorème 4. - Le lemme 5 permet de se ramener à approcher, dans un $\mathcal{C}(p , \delta)$, les fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Σ . Soient g une telle fonction, et G le prolongement construit dans le lemme 6.

Résolvons l'équation suivante

$$\bar{\partial} G_\varepsilon = \bar{\partial} G \tag{1}$$

pour le poids δ_ε^k dans le domaine d'holomorphie T_ε , on peut appliquer le théorème 3, puisque $-k \log \delta_\varepsilon$ est p. s. h. dans T_ε (lemme 7), donc il existe G_ε vérifiant (1) , et l'estimation suivante :

$$\int_{T_\varepsilon} |G_\varepsilon|^2 \, \delta_\varepsilon^k \, \delta_0^4 \, d\lambda(z) \leqslant \int_{T_\varepsilon} |\bar{\partial} G|^2 \, \delta_\varepsilon^k(z) \, d\lambda(z) , \tag{2}$$

comme G est à support compact, il en est de même de $\bar{\partial} G$, et il n'y a aucun problème de convergence pour la 2e intégrale.

D'après (1), $G - G_\varepsilon$ est holomorphe dans T_ε , et $G - G_\varepsilon \in L^2(\delta_\varepsilon^k \, \delta_0^4)$. On va montrer que $G - G_\varepsilon$ converge lorsque ε tend vers 0 vers G/Σ dans $\mathcal{C}(2n+3 , \delta)$, pour cela il nous faut évaluer la norme de $G - (G - G_\varepsilon) = G_\varepsilon$ dans cet espace.

Notons d'abord que la boule de centre x et de rayon $r = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta(x)$, soit $B(x , r)$, est contenue dans T_ε pour tout x dans Σ ; en effet, δ , étant lipschitzienne, est strictement positive dans $B(x , \delta(x))$, et si

$$z \in B(x , r) \quad d(z , \Sigma) < \varepsilon^2 \, \delta(x) < \varepsilon .$$

Remarquons de plus que δ_ε est lipschitzienne de rapport inférieur à 1, puisqu'il en est ainsi de δ et de $(\varepsilon^2 - d^2)^+$, donc pour z dans $B(x , r)$,

$$\delta_\varepsilon(x) \leqslant \delta_\varepsilon(z) + |z - x| \leqslant \delta_2(x) + \tfrac{1}{2} \, \delta_{\frac{1}{2}}(x) ,$$

et par suite $\delta_\varepsilon(x) \leqslant 2 \, \delta_\varepsilon(z)$.

Evaluons la norme de G_ε dans $L^2(B(x , r))$.

$$(\varepsilon^2 \, \delta(x))^k \, \delta_0^4(x) \int_{B(x,r)} |G_\varepsilon|^2 \, d\lambda \leqslant \delta_\varepsilon^k(x) \, \delta_0^4(x) \int_{B(x,r)} |G_\varepsilon|^2 \, d\lambda$$

$$\leqslant 2^{k+4} \int_{B(x,r)} \delta_\varepsilon^k(z) \, \delta_0^4(z) \, |G_\varepsilon|^2 \, d\lambda ,$$

d'où en utilisant le lemme 6 et l'inégalité (2) ,

$$(\varepsilon^2\,\delta(x))^k\,\delta_0^4(x)\int_{B(x,r)}|G_\varepsilon|^2\,d\lambda \leqslant 2^{k+4}\int_{T_\varepsilon}\delta_\varepsilon^k\,\delta_0^4\,|G_\varepsilon|^2\,d\lambda$$

$$\leqslant 2^{k+4}\int_{T_\varepsilon}|\bar\partial G|^2\,\delta_\varepsilon^k\,d\lambda \leqslant 2^{k+4}C_1\int_{T_\varepsilon} d(z\ ,\ \Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(z)\,d\lambda\ ,$$

d'où $\|G_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)} \leqslant C_1\ 2^4\ \delta_0^{-4}(x)\ r^{-k}\ \varphi(\varepsilon\ ,\ N)$, où

$$\varphi(\varepsilon\ ,\ N) = \int_{T_\varepsilon} d(z\ ,\ \Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(z)\,d\lambda(z)\ ,$$

de plus, puisque $\bar\partial G_\varepsilon = \bar\partial G$,

$$|\partial G_\varepsilon/\partial\bar z_j| = |\partial G/\partial\bar z_j| \leqslant C_1\ r^N \quad \text{pour} \quad z\in B_r\ ,$$

d'après le lemme 6.

On peut à présent appliquer le lemme 8, pour la fonction G_ε et la boule $B(x\ ,\ r)$, on voit que

$$|G_\varepsilon(x)| \leqslant C_2\ \{r^{-n-(k/2)}\ \delta_0^{-2}(x)\ \varphi(\varepsilon\ ,\ N)^{\frac{1}{2}} + r^{N+1}\}\ ,$$

d'où

$$\delta_0^2(x)\ \delta(x)^{n+(k/2)}\ |G_\varepsilon(x)| \leqslant C_3\ \{\varphi(\varepsilon\ ,\ N)^{\frac{1}{2}}\ \varepsilon^{-(2n+k)} + \varepsilon^{2(N+1)}\}\ ,$$

or $\varphi(\varepsilon\ ,\ N) = \int_{T_\varepsilon} d(z\ ,\ \Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(r)\,d\lambda(r)$.

Si on choisit $k = 2n + 1$ et $N = 8n + 4$, on a $\int_{T_\varepsilon}\delta_\varepsilon^k\,d\lambda$ converge, puisque $\delta_\varepsilon \leqslant \delta_0$ et $\varphi(\varepsilon\ ,\ N) \leqslant C_4\ \varepsilon^N$, puisque $d(z\ ,\ \Sigma) < \varepsilon$ dans T_ε , donc

$$\delta_0^2(x)\ \delta(x)^{n+(k/2)}\ |G_\varepsilon(x)| < C_5\{\varepsilon + \varepsilon^{2(N+1)}\}\ ,$$

ce qui montre bien que G_ε tend vers 0 avec ε dans l'espace $\mathcal{C}(2n + 3\ ,\ \delta)$.

Nous avons pour l'instant approché la fonction g par des fonctions G_ε , holomorphes dans T_ε , et $G_\varepsilon \in L^2(\delta_\varepsilon^k\,\delta_0^4)$, $k = 2n + 1$. Or, d'après le lemme 7 , $-\log\delta_\varepsilon(z) = (\sup\varphi_j)(z)$ pour z dans T_ε , avec φ_j p. s. h. dans T_{α_0} , il nous suffit alors d'appliquer la proposition 5 de l'exposé précédent [5] pour approcher G_ε par des fonctions holomorphes dans T_{α_0} . Plus précisément, il existe une constante γ indépendante de ε , telle que, pour tout G_ε , il existe une suite $(G_{\varepsilon,p})_p$ de fonctions holomorphes dans T_{α_0} telle que

$\sup_{z\in T_\varepsilon}\delta_\varepsilon^{k\gamma}(z)\ |(G_\varepsilon - G_{\varepsilon,p})(z)|$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Lorsqu'on se restreint à Σ , on a la convergence dans $\mathcal{C}(k\gamma\ ,\ \delta)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

On peut remarquer que les fonctions $G_{\varepsilon,p}$ sont dans $\bigcup_j L^2(\exp(-k\varphi_j))$.

COROLLAIRE 9. - <u>Si</u> $d^2(z\ ,\ \Sigma)$ <u>est bornée dans</u> Ω <u>et p. s. h. dans</u> Ω , <u>et si, de plus,</u> $-\log\delta(z) = (\sup\varphi_j)^*(z)$ <u>pour tout</u> z <u>dans</u> Ω <u>avec</u> $\exp\varphi_j$ <u>à croissance polynomiale,</u> φ_j <u>étant p. s. h. dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>alors les polynômes sont denses dans</u> $\mathcal{C}_\Sigma(\delta)$.

Démonstration. - On peut choisir α_0 tel que $T_{\alpha_0} = \Omega$ puisque $d^2(z , \Sigma)$ est borné et p. s. h. dans Ω , donc, d'après le théorème 4, on peut approcher une fonction g continue, à support compact dans Σ par des fonctions holomorphes dans Ω et qui sont de plus dans $\bigcup_j L^2(\exp(- k\varphi_j))$, or $\varphi_j = \sup(- \log \delta , f_j(d^2(z , \Sigma))$, f_j étant affine pour $d^2(z , \Sigma)$ assez grand, donc ces fonctions holomorphes sont en fait dans $\mathcal{O}(\delta)$, et il suffit alors d'appliquer le corollaire 8 de l'exposé précédent.

Dans le théorème 4 est intervenue la condition $d^2(z , \Sigma)$ p. s. h. dans T_α , on peut se demander la signification géométrique de cette propriété. Pour $n = 1$, la proposition 10 fournit une réponse, pour n quelconque, on a une formulation équivalente qu'il faudrait interpréter en termes de courbure. Considérons dans $\underset{\sim}{C}$ une courbe Σ C^∞ , il existe un ouvert Ω , voisinage de Σ , sur lequel la fonction $d^2(z , \Sigma)$ est de classe C^2 , on a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - Si la courbure de Σ est majorée par une constante C , $d^2(z, \Sigma)$ est alors sous-harmonique dans l'ouvert

$$T_C = \{z \mid z \in \Omega , \ d(z , \Sigma) < 1/2C\} .$$

Démonstration. - Paramétrons Σ par son abscisse curviligne s , et pour $z = x + iy$ dans Ω , soit $s(z)$ l'abscisse curviligne de la projection de z sur Σ . Σ est définie par $s \to (f(z) , g(s))$.

$$\varphi(z) = d^2(z , \Sigma) = (x - f(s(z)))^2 + (y - g(s(z)))^2 .$$

On calcule $\Delta\varphi$, et on trouve :

$$\Delta\varphi(z) = \frac{2 + 4f''(s(z)) \ (f - x) + 4g''(s(z)) \ (g - y)}{1 + f''(f - x) + g''(g - y)} .$$

Soit ρ la courbure, on a, en appliquant l'inégalité de Schwarz,

$$|f''(f - x) + g''(g - y)| \leqslant \rho(s(z)) \ d(z , \Sigma) \leqslant C \ d(z , \Sigma) .$$

Si donc $d(z , \Sigma) < 1/2C$, $\Delta\varphi(z) \geqslant 0$.

Remarque. - Réciproquement, si $d^2(z , \Sigma)$ est sous-harmonique dans

$$\{z \mid z \in \underset{\sim}{C} , \ d(z , \Sigma) < \alpha\} ,$$

alors la courbure de Σ est majorée par $1/2\alpha$. L'exemple du cercle montre que cette évaluation est la meilleure.

Σ étant une sous-variété totalement réelle de $\underset{\sim}{C}^n$, $\mathrm{Proj}_\Sigma(z)$ désigne la projection de z sur Σ , et $A(z)$ la dérivée au sens complexe de l'application $z \to \mathrm{Proj}_\Sigma(z)$.

PROPOSITION 11. - Si $z \to \mathrm{Proj}_{\Sigma}(z)$ est C^1 dans un ouvert Ω, $d^2(z, \Sigma)$ est p. s. h. dans cet ouvert équivaut à $\langle (I - A)(z)\, W, W \rangle \geqslant 0$ pour tout $z \in \Omega$ et $W \in \underset{\sim}{C}^n$. I désigne l'identité.

Nous omettons la démonstration qui est purement techrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). - L^2 estimates and existence theorems for $\overline{\partial}$ operator, Acta Math., Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.

[2] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - New York, D. Van Nostrand Company, 1966 (The University Series in higher Mathematics).

[3] HÖRMANDER (L.) and WERMER (J.). - Uniform approximation on compact subsets in $\underset{\sim}{C}^n$, Math. Scand., t. 23, 1968, p. 5-21.

[4] NIRENBERG (R.) and WELLS (R. O., Jr). - Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans. Amer. math. Soc., t. 142, 1969, p. 5-35.

[5] SIBONY (N.). - Approximation pondérée de fonctions holomorphes dans un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 21, 14 p.

(Texte reçu le 13 juillet 1971)

Jean-Pierre FERRIER
12 rue Michel Ney
54 - NANCY

Nessim SIBONY
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13