Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claude Portenier

Formes linéaires positives et mesures

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C6, p. C1-C7

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A14_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 6, 7 p.

FORMES LINÉAIRES POSITIVES ET MESURES

par Claude PORTENIER

1. Introduction. - Nous nous proposons ici de généraliser aux espaces de sections la proposition 5 de [1] (§ 5, n° 2, p. 58), comme nous l'avons annoncé dans [3], n°3.8, c'est-à-dire de "représenter" certaines formes linéaires positives par des "mesures". Pour cela, il nous faudra généraliser la notion de mesure (au sens de [1]), bien que dans certains cas l'on puisse s'y ramener.

Dans ce qui suit, $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ désignera une fibration principale complètement régulière (cf. [2] ou [3]). Si f est une section de π, π_R ou $\pi_{\overline{R}}$, et A une partie de $\mathcal{X}$, nous désignerons par f_A la section restriction de f à A ; la fonction caractéristique de A sera notée 1_A.

2. Définition. - Soient m une mesure (ou même une prémesure) positive sur $\mathcal{X}$, et s une section m-mesurable de π. Pour toute section f de $\pi_{\overline{R}_+}$ ou π_R, nous désignerons par f_s la fonction sur $\mathcal{X}$ définie par $f(x) = s(x) * f_s(x)$. Remarquons que f est m-mesurable et si et seulement s'il en est de même de f_s. En posant $(m , s)^\circ(f) = m^*(f_s)$, on définit, sur l'ensemble $\mathcal{S}^+(\mathcal{X})$ de toutes les sections de π_{R_+}, un encombrement (définition identique à celle de [1]).

3. Définition. - Plus généralement (cf. exemple 20), soit (m , s) un couple d'applications qui à chaque compact K de $\mathcal{X}$ associe respectivement une mesure positive $m(K)$ sur K et une section $s(K)$ de π, définie au-dessus de K et m-mesurable, tel que l'on ait $(m(K) , s(K))^\circ_L = (m(L) , s(L))^\circ$ pour tous les compacts K, L tels que $K \supset L$. Nous dirons que (m , s) est une prémesure positive sur π, et nous poserons, pour toute $f \in \mathcal{S}^+(\mathcal{X})$,

$$(m , s)^\circ(f) = \sup(m(K) , s(K))^\circ(f_K) ,$$

K parcourant les compacts de $\mathcal{X}$. C'est un encombrement appelé l'intégrale supérieure essentielle associée à la prémesure (m , s).

4. Remarque. - La condition de compatibilité $(m(K) , s(K))^\circ_L = (m(L) , s(L))^\circ$ signifie en fait que $m(K)_L$ et $m(L)$ sont deux mesures équivalentes, et que $m(K)_L = (s(L)/s(K)).m(L)$, la fonction strictement positive et $m(L)$-mesurable $s(L)/s(K)$ étant définie sur L par $s(L) = (s(L)/s(K)).s(K)$.

5. Définition. - Nous dirons que deux prémesures positives (m , s) et (m' , s')

sont égales si leurs intégrales supérieures essentielles sont égales. Comme, pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, on a $(m , s)^*(1_K.f) = (m(K) , s(K))^*(f_K)$, il est équivalent de dire que $m(K) = (s'(K)/s(K)).m'(K)$ pour tout compact K de $\mathfrak{X}$.

6. PROPOSITION. - Il y a correspondance biunivoque entre les prémesures et les encombrements p qui jouissent des deux propriétés suivantes :

(i) Si $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, $p(f) = \sup p(1_K.f)$, K parcourant les compacts de $\mathfrak{X}$.

(ii) Pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, il existe une mesure $m(K)$ sur K et une section $m(K)$-mesurable de π au-dessus de K , tels que $p(1_K.f) = (m(K) , s(K))^*(f_K)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$.

La démonstration est immédiate (cf. [3], prop. 2, § 1 , n° 2 , p. 10).

7. Définition. - Nous dirons qu'une prémesure positive (m , s) sur π est une mesure positive sur π si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe $f \in \mathcal{C}(\pi_R)$ telle que $f(x) \neq 0$, et $(m , s)^*(|f|) < \infty$.

On peut alors voir que toute la théorie développée dans [1] s'étend à notre cas, en particulier, l'existence d'un concassage et la théorie de l'intégration.

8. Définition. - Soient E un espace de sections associé à π , et (m , s) une mesure positive sur π telle que toute $f \in E$ soit (m , s)-intégrable. Posons $\mu(f) = \int f d(m , s)$ (si $f \in C$, on a $\mu(f) = (m , s)^*(f)$). La forme linéaire positive μ ainsi définie satisfait évidemment à la propriété (M) (cf. [3], définition 3.8), et nous dirons qu'elle est représentée par les mesures (m , s) . Nous allons montrer réciproquement que toute forme linéaire positive, ayant la propriété (M), est représentable par une mesure positive (m , s) sur π (cf. théorème 16).

9. Définition. - Nous désignerons par $\mathcal{J}^+$ l'ensemble des sections de π_R qui sont semi-continues inférieurement (cf. [3], définition 3.1). Si μ est une forme linéaire positive, nous poserons, pour $f \in \mathcal{J}^+$, $\overline{\mu}(f) = \sup \mu(g)$, g parcourant les éléments de C tels que $g \leqslant f$.

10. PROPOSITION. - Si μ a la propriété de Daniell (cf. [3], définition 2.2), alors $\overline{\mu}$ est le seul prolongement de μ à $\mathcal{J}^+$ qui soit positivement homogène, croissant, additif, et possédant la propriété : Pour toute famille (f_i) filtrante croissante de $\mathcal{J}^+$, on a $\overline{\mu}(\sup f_i) = \sup \overline{\mu}(f_i)$.

La démonstration est classique.

11. Définition. - Posons, pour $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, $\mu^*(f) = \inf \overline{\mu}(g)$, g parcourant les éléments de $\mathcal{J}^+$ tels que $g \geqslant f$.

12. PROPOSITION. - Si μ a la propriété de Daniell, alors μ^* est un encombrement qui prolonge $\overline{\mu}$.

La démonstration est aussi classique.

13. Définition. - Pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, nous poserons $\mu^\bullet(f) = \sup \mu^*(1_K \cdot f)$, K parcourant les compacts de $\mathfrak{X}$.

14. PROPOSITION. - Si μ a la propriété (M), alors $\mu^\bullet$ est un encombrement qui prolonge $\overline{\mu}$.

On a évidemment $\mu^\bullet \leqslant \mu^*$. Si $f \in \mathcal{J}^+$, il vient d'une part $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^*(f) = \overline{\mu}(f)$, et d'autre part $\overline{\mu}(f) \leqslant \mu^\bullet(f)$, car, pour toute $g \in C$ telle que $g \leqslant f$, on a $\mu(g) = \mu^\bullet(g) \leqslant \mu^\bullet(f)$. En effet, pour tout $h \in \mathcal{J}^+$ tel que $h \geqslant 1_K \cdot g$, il existe $h' \in C$ tel que $h \geqslant h' \geqslant 1_K \cdot g$ par la compacité de K et la richesse de E , donc $\mu_K(g) = \inf_{h \in C, h \geqslant 1_K \cdot g} \mu(h) = \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K \cdot g} \overline{\mu}(h) = \mu^*(1_K \cdot g)$, et par suite,

$$\mu^\bullet(g) = \sup \mu^*(1_K \cdot g) = \sup \mu_K(g) = \mu(g)$$

par le lemme 3.20 de [3].

15. LEMME. - Soit K un compact de $\mathfrak{X}$. Pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, on a

$$\mu_K^\bullet(f) = \mu^\bullet(1_K \cdot f) \ .$$

Dans la proposition précédente, nous avons déjà démontré que $\mu_K(f) = \mu^\bullet(1_K \cdot f)$ pour toute $f \in C$. On en déduit immédiatement que $\overline{\mu}_K(f) \leqslant \mu^\bullet(1_K \cdot f)$ pour toute $f \in \mathcal{J}^+$. Pour l'autre inégalité, remarquons tout d'abord que $\overline{\mu}_K(f) = \overline{\mu}_K(f')$ si $f' \in \mathcal{J}^+$ et $f' = f$ sur K , le compact K portant μ_K . Soit maintenant $\sigma \in C$, une section continue de $\underset{\sim}{\pi_R}$ strictement positive sur K . On a

$$\overline{\mu}_K(f) = \overline{\mu}_K(\sup \inf (f \ , \ n\sigma)) = \sup \overline{\mu}_K(\inf(f \ , \ n\sigma))$$

et comme $\mu^\bullet(1_K \cdot f) = \sup \mu^\bullet(1_K \cdot \inf(f \ , \ n\sigma))$, on est ramené au cas $f \leqslant \sigma$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut encore supposer que $\mu(\sigma) - \mu_K(\sigma) \leqslant \varepsilon/2$. Choisissons $g \in C$ telle que $\overline{\mu}(\inf(f \ , \ \sigma)) - \mu(g) < \varepsilon/2$. Il vient alors

$$\mu^\bullet(1_K \cdot f) - \overline{\mu}_K(f) \leqslant \overline{\mu}(\inf(f \ , \ \sigma)) - \mu_K(g) = \overline{\mu}(\inf(f \ , \ \sigma)) - \mu(g) + (\mu - \mu_K)(g) \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où le résultat. Si $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, on a

$$\mu_K^*(f) = \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \overline{\mu}_K(g) = \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \mu^\bullet(1_K \cdot g)$$

$$= \inf_{g \in \mathcal{J}^+, g \geqslant f} \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K \cdot g} \overline{\mu}(h) = \inf_{h \in \mathcal{J}^+, h \geqslant 1_K \cdot f} \overline{\mu}(h) = \mu^\bullet(1_K \cdot f) \ .$$

Finalement, on a $\mu_K^*(f) = \mu_K^*(1_K \cdot f)$, donc $\mu_K^\bullet(f) = \mu_K^*(f)$, ce qui finit de prouver le lemme.

16. THÉORÈME. - Soit E un espace de sections associé à π. Pour qu'une forme linéaire positive soit représentable par une mesure positive sur π (unique à "égalité" près), il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la propriété (M).

Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire (cf. n° 8). Réciproquement, nous allons montrer que μ° possède les propriétés (i) et (ii) de la proposition 6. Soit $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$; on a $\sup \mu^\circ(1_K \cdot f) = \sup_{K,L} \mu^*(1_L \cdot 1_K \cdot f) = \sup \mu^*(1_K \cdot f) = \mu^\bullet(f)$, ce qui prouve (i). Etant donné un compact K de $\mathfrak{X}$, soit $s(K)$ une section continue de π au-dessus de K. Par le lemme 15, on voit que $\mu_K^\bullet(f)$ ne dépend que des valeurs de f sur K ; si l'on désigne par θ la forme linéaire positive induite par μ_K sur l'espace de sections E_K, restriction de E à K, alors $\theta^\bullet$ est induit par $\mu_K^\bullet$. Par l'intermédiaire de $s(K)$, θ induit une forme linéaire positive sur un sous-espace **riche**, en particulier dense, de $\mathcal{C}(K)$; elle se prolonge évidemment en une mesure $m(K)$ sur K, et l'on a $(m(K), s(K))^\bullet = \theta^\bullet$. Par le lemme 15, on a alors $\mu^\bullet(1_K \cdot f) = \mu_K^\bullet(f) = \theta^\circ(f_K) = (m(K), s(K))^\circ(f_K)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$, ce qui prouve (ii).

Pour démontrer l'unicité, il faut étendre la théorie de l'intégrale supérieure (cf. [1], § 1, n° 9), et introduire la notion de section modérée ; essentiellement, cela revient à montrer que si p est l'intégrale supérieure essentielle associée à une mesure sur π, alors $p(1_K \cdot f) = \inf_{g \in \mathfrak{G}^+,\ g \geqslant 1_K \cdot f} p(g)$ pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, et toute $f \in \mathfrak{F}^+(\mathfrak{X})$. On en déduit facilement que si p prolonge μ, alors $p = \mu^\bullet$.

17. COROLLAIRE. - Toute forme linéaire positive ayant la propriété (M) est somme d'une famille de formes linéaires positives à supports compacts disjoints deux à deux.

Cela découle immédiatement de l'existence d'un concassage.

18. Remarque. - Soient μ une forme linéaire positive ayant la propriété (M), (m, s) une mesure sur π qui représente μ, et (K_α) un concassage associé à (m, s). Désignons par t une section de π égale à $s(K_\alpha)$ au-dessus de K_α pour tout α, et par n la mesure $\sum m(K_\alpha)$ définie sur l'espace localement compact associé au concassage (K_α). On a $(m, t)^\bullet = (m, s)^\bullet$, ce qui fournit une représentation de μ au sens du n° 2, mais malheureusement sur un autre espace que $\mathfrak{X}$.

19. Remarque. - Supposons qu'il existe une section τ strictement positive et m-mesurable de π_R qui soit localement (resp. sur chaque compact) (m, s)-intégrable. En désignant par t la section m-mesurable de π associée à τ, il existe une mesure (resp. prémesure) n sur $\mathfrak{X}$ telle que $(m, t)^\bullet = (m, s)^\bullet$. Dans ce

cas seulement, on a une représentation au sens du n° 2. Ceci a lieu en particulier si π est trivial. En effet, on peut prendre pour τ une section continue strictement positive de π_R et, étant donné $x \in \mathfrak{X}$ et $f \in E$ tel que $f(x) > \tau(x)$, il est clair que $\int_V \tilde{\tau} d(m, s) \leqslant \mu(f)$, V désignant le voisinage de x formé des y tels que $f(y) > \tau(y)$. On pourrait espérer qu'un choix convenable des sections $s(K_\alpha)$ soit possible. Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant.

20. Exemple.

(a) Soit $\mathfrak{X}$ l'espace localement compact des ordinaux x dénombrables (i. e. $x < \omega_1$), et désignons par X le sous-espace des ordinaux ayant un prédécesseur. Montrons tout d'abord qu'il existe une famille $(\rho_y)_{y \in \mathfrak{X}-X}$ d'applications $\rho_y : X \to \underset{\sim}{R}$ telles que

(i) $\rho_y(x) > 0$ pour tout $x \in X$, $x < y$, et $\rho_y(x) = 0$ ailleurs.

(ii) $\sum \rho_y(x) < \infty$.

(iii) Pour tout $y' \in \mathfrak{X} - X$, $y' \leqslant y$, $\lim \rho_y(x)/\rho_{y'}(x)$ existe lorsque x tend vers y'.

Nous allons construire cette famille, par induction transfinie, sur l'ensemble bien ordonné $\mathfrak{X} - X$, dont le premier élément est ω_0. Il est clair que l'on peut choisir une application ρ_{ω_0} satisfaisant aux conditions ! Supposons maintenant que la construction ait été faite pour les $y' < y$. Si y a un prédécesseur y', posons $\rho_y(x) = \rho_{y'}(x)$ si $x < y'$, les autres valeurs pouvant être choisies telles que ρ_y satisfasse aux conditions. Si y n'a pas de prédécesseur, il existe une suite (y_n) de $\mathfrak{X} - X$ strictement croissante de supremum y. Posons

$$\rho_y(x) = \alpha_n \cdot \rho_{y_n}(x)$$

lorsque $y_{n-1} < x < y_n$ en choisissant les $\alpha_n \in \underset{\sim}{R}^*_+$ tels que les conditions (ii) soient remplies. On vérifie immédiatement que les autres le sont aussi.

(b) Soit E l'espace de Riesz de toutes les fonctions réelles (continues) f sur X, telles que, pour tout $y \in \mathfrak{X} - X$, $\mu_y(f) = \lim f(x)/\rho_y(x)$ existe lorsque x tend vers y. E est un espace de sections, muni de la topologie de l'ordre, associé à la fibration principale complètement régulière triviale de base X. Nous allons montrer que la base de son spectre π est homéomorphe à $\mathfrak{X}$ (cf. (d)).

(c) Posons, pour toute $f \in E$, $f(y) = \mu_y(f)$ si $y \in \mathfrak{X} - X$. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage V de x tel que $\sum_V |f(y)| < \infty$. En effet, si $x \in X$, on peut prendre $V = \{x\}$, et si $x \in \mathfrak{X} - X$, il existe un voisinage V de x et une constante M tels que $|f| \leqslant M \cdot \rho_x$ sur V, d'où le résultat. On peut donc considérer l'application croissante $x \longrightarrow \sum_{y \leqslant x} |f(x)|$ de $\mathfrak{X}$ dans $\underset{\sim}{R}_+$; cette application étant finalement constante, on en déduit que f est finalement nulle et, par

suite, $\sum |f(x)| < \infty$.

(d) Soit μ une forme linéaire réticulante. Par le théorème 3.22 de [2], il existe $\rho \in E$ et Φ un ultra-filtre non trivial sur X tels que

$$\mu(f) = \lim f(x)/\rho(x) \quad \text{pour toute} \quad f \in E .$$

Φ est une base d'ultra-filtre sur $\mathfrak{X}$ qui ne converge pas vers l'infini, puisque ρ est finalement nulle. Par suite, Φ converge vers $y \in \mathfrak{X} - X$. On peut écrire

$$\mu(f) = \lim f(x)/\rho(x) = \lim f(x)/\rho_y(x) \times \lim f_y(x)/\rho(y) = \mu(\rho_y) \times \mu_y(f)$$

pour toute $f \in E$, ce qui prouve que $\mu = \mu(\rho_y).\mu_y$. La suite est immédiate (cf. remarque 3.8 de [2]).

(e) Le graphe de la fonction $f : \mathfrak{X} \to \underset{\sim}{R}$ peut s'identifier à l'image de la section f de π_R . Il suffit de munir l'ensemble $\mathfrak{X} \times \underset{\sim}{R}$ de la "bonne" topologie qui fournit une représentation de l'espace total de π_R . Ce fibré n'est pas trivial, toute section continue appartenant à E , et étant par suite finalement nulle.

(f) Tous les éléments f de E étant à support compact, il est clair que chaque forme linéaire positive a la propiété (M) , en particulier, celle qui dans la représentation ci-dessus s'écrit sous la forme $f \longmapsto \sum f(x)$. Cette écriture revient à considérer la section t de π associée à la section semi-continue inférieurement de π_R égale à la constante 1 dans la représentation ci-dessus, le concassage formé des points de $\mathfrak{X}$ et la mesure $n = \sum_{\mathfrak{X}} \varepsilon_x$ sur $\mathfrak{X}$ muni de la topologie discrète (cf. n° 18). Il n'est pas difficile de voir, par un raisonnement identique à celui qui a été fait dans (c), qu'il n'existe pas de section τ strictement positive (m-mesurable) de π_R qui soit localement (ou même sur chaque compact) (m , s)-intégrable ; sinon il existerait une fonction strictement positive sur $\mathfrak{X}$ qui soit localement (sur chaque compact) sommable.

21. Remarque. - Soit E un espace de sections associé à π , dont toutes les formes linéaires continues satisfont à la propriété (M), par exemple un espace de Kakutani $\mathfrak{O}_\Phi(\pi_R)$ (on peut toujours se ramener à ce cas pour le théorème 4.6 de [3]). Il est clair que l'on peut choisir s , telle que $s(K)$ soit continue pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, une fois pour toutes ; par suite, pour toute forme linaire continue μ , il existe une unique application m , associant à chaque compact K de $\mathfrak{X}$ une mesure $m(K)$ sur K , qui vérifie certaines relations de compatibilité (cf. remarque 4) et telle que la mesure (m , s) sur π représente μ .

Si π est trivial, alors (cf. remarque 19) le dual de E s'identifie à un sous-espace solide de l'espace des mesures sur $\mathfrak{X}$. En appliquant ces résultats à un espace de Kakutani, on généralise ceux de [4] (dans cet article, il est supposé que l'espace de base est localement compact).

22. THÉORÈME. - Le dual d'un espace de Kakutani nomé $\mathcal{Q}_\varphi(\pi_R)$ (en particulier d'un M-espace) est isomorphe à l'espace des mesures bornées sur la base de son spectre.

En effet, on a $\varphi = \sup_{f \in U_\varphi} f$, donc, pour toute forme linéaire positive continue μ , il vient $\overline{\mu}(\varphi) = \sup \mu(f) \leqslant \|\mu\|$. Désignons par s la section de π associée à φ et par m l'unique mesure bornée sur $\mathfrak{X}$ telle que la mesure (m , s) sur π représente μ . On vérifie immédiatement que $\mu \longmapsto m$ est l'isomorphisme que nous cherchons.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. Chap. 9. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[2] PORTENIER (Claude). - Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections, Comment. Math. Helvet. (à paraître).

[3] PORTENIER (Claude). - Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 6, 21 p.

[4] SUMMERS (W. H.). - Dual spaces of weighted spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 151, 1970, p. 323-333.

(Texte reçu le 2 septembre 1971)

Claude PORTENIER
Department of Mathematics
University of British Columbia
VANCOUVER 8, B. C. (Canada)