Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Projections contractantes dans $C(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C5, p. C1-C7

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A13_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 5, 7 p.

PROJECTIONS CONTRACTANTES DANS $\mathcal{C}(X)$

par Hicham FAKHOURY

Si X est un espace compact, et $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles, nous montrons que tout sous-espace séparable H de $\mathcal{C}(X)$, qui est image de $\mathcal{C}(X)$ par une projection de norme 1, est isomorphe à l'espace des fonctions continues sur un espace compact métrisable K. Ce résultat répond à une question posée par A. PEŁCZYNSKI dans [10]. Dans [12], C. SAMUEL a démontré ce résultat ; nous en donnons ici une démonstration simplifiée.

0. Introduction.

Soit X un compact, on note $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles ; cet espace sera toujours muni de la norme de la convergence uniforme. Si σ est une homéomorphie involutive définie sur X, on note $\mathcal{C}_\sigma(X)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(X)$, formé des fonctions σ-impaires, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_\sigma(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \ ; \ f(x) = -f(\sigma(x)) \ , \ \forall\, x \in X\} \ .$$

Un espace de Banach V est un C_σ-espace s'il existe un compact X muni d'un automorphisme involutif σ tel que V soit isométrique à l'espace $\mathcal{C}_\sigma(X)$. Par suite, tout espace $\mathcal{C}(X)$ est un C_σ-espace.

Un sous-espace H de $\mathcal{C}(X)$ est dit complémenté s'il existe une projection continue de $\mathcal{C}(X)$ sur H ; une projection P est dite contractante si elle est de norme 1.

Deux espaces de Banach E et F sont dits isomorphes s'ils sont linéairement homéomorphes.

Soit V un espace de Banach, l'espace dual V' sera muni (sauf mention du contraire) de la topologie $\sigma(V', V)$.

La boule unité d'un espace de Banach V est notée $B(V)$; si aucune confusion n'est à craindre, on désignera la boule unité de V' par K. L'ensemble des points extrémaux de K est noté $\mathcal{E}(K)$.

Un espace de Banach est dit un L-espace s'il est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ sur un espace localement compact. Un espace de Banach, dont le dual est un L-espace, est appelé un prédual de L-espace. Tout espace $\mathcal{C}(X)$ est un prédual de L-espace.

Dans la première partie, nous rappelons quelques résultats standards sur les espaces $C(X)$ et sur les préduaux de L-espaces. Dans la deuxième partie, nous démontrons le résultat énoncé plus haut. Cette démonstration diffère selon que le dual H' de H est séparable ou non, lorsqu'il est muni de la topologie de la norme.

1. Quelques résultats standards.

Si A est une partie d'espace topologique E, on désigne par A' l'ensemble dérivé de A, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de A. Rappelons que Ω désigne le premier ordinal non dénombrable.

Soit X un espace compact métrisable ; pour tout ordinal $\alpha < \Omega$, nous désignons par X^α l'ensemble dérivé d'ordre α de X. Ces ensembles sont définis par récurrence transfinie de la façon suivante :

$$X^0 = X \quad ; \quad X^1 = X' \ ,$$
$$X^\alpha = (X^\beta)' \quad \text{si} \quad \alpha = \beta + 1 \ ,$$
$$X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

Il est facile de vérifier que, si X est dénombrable, il existe un plus petit ordinal $\beta < \Omega$ tel que $X^\beta = \emptyset$. L'ordinal β n'est pas un ordinal limite, par suite, il existe α, tel que $\alpha = \beta + 1$. L'ensemble X^α est fini puisque $(X^\alpha)' = \emptyset$; soit $\operatorname{Card} X^\alpha = n$. Dans [5], MAZURKIEWIC et SIERPINSKI ont établi le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Si X est un compact dénombrable, il existe un ordinal $\alpha < \Omega$ et un nombre entier $n \in \underset{\sim}{N}$ tels que X soit homéomorphe au segment $[0 , \omega^{\alpha \cdot n} + 1]$ muni de la topologie de l'ordre.*

Dans la suite, nous aurons besoin des deux résultats suivants, dus respectivement à MILUTIN [9] et PEŁCZYNSKI [11].

THÉORÈME 2. - *Soit X un espace compact métrisable non dénombrable ; l'espace $C(X)$ est isomorphe à l'espace $C([0 , 1])$.*

THÉORÈME 3. - *Soient X un espace compact métrisable, et H un sous-espace complémenté dans $C(X)$; s'il existe un sous-espace $Z \subset H$ isomorphe à $C(X)$, l'espace H est isomorphe à $C(X)$.*

Le théorème suivant définit la nature isométrique des sous-espaces complémentés de $C(X)$ qui sont image d'une projection de norme 1. Il a été obtenu indépendemment par LINDENSTRAUSS et WULBERT [6], et par JONAC et SAMUEL [4].

THÉORÈME 4. - Soient X un espace compact, et $H \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-espace de X, image d'une projection de norme 1 ; alors H est un C_σ-espace. Inversement, soit H un C_σ-espace, il existe un espace compact X, un sous-espace $Z \subset \mathcal{C}(X)$ isométrique à H, et une projection de norme 1 de $\mathcal{C}(X)$ sur Z.

Le théorème suivant, de [2], donne la structure des C_σ-espaces.

THÉORÈME 5. - Soit V un prédual de L-espace ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) V est un C_σ-espace,

(b) $\overline{\mathcal{E}(B(V'))} \subset \mathcal{E}(B(V)) \cup \{0\}$,

(c) V est isométrique à l'espace des fonctions continues sur $\overline{\mathcal{E}(B(V'))}$ vérifiant $f(-x) = -f(x)$, pour tout x dans $\overline{\mathcal{E}(B(V'))}$.

2. Principaux résultats.

Le résultat suivant est sans doute connu, mais, faute de référence, nous en donnons une démonstration.

LEMME 6. - Soient X un espace compact muni d'une involution σ, et E un sous-espace séparable de $\mathcal{C}_\sigma(X)$; pour que E soit complémenté dans $\mathcal{C}(X)$, il faut et il suffit que E soit complémenté dans $\mathcal{C}_\sigma(Y)$, où Y désigne l'espace compact $\overline{\mathcal{E}(B(E'))}$ muni de l'involution $\sigma(x) = -x$, si P_x est une projection continue de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ sur E, il existe une projection P_y de $\mathcal{C}_\sigma(Y)$ sur E qui vérifie $\|P_y\| \leq \|P_x\|$.

Démonstration. - On peut, sans diminuer la généralité, supposer que l'espace E sépare les points de X, et que l'espace X est métrisable. Sinon, on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (f(x) = f(y) \ , \ \forall\, f \in E) \ .$$

L'espace $X_0 = X/\mathcal{R}$ est compact, l'involution σ passe au quotient puisque

$$(x \mathcal{R} y) \text{ est équivalent à } (\sigma(x) \mathcal{R} \sigma(y)) \ .$$

Notons δ l'involution quotient $\sigma/\mathcal{R}$. L'espace E s'identifie isométriquement à un sous-espace E_0 de $\mathcal{C}_\delta(X_0)$. Il existe une projection P_0 de $\mathcal{C}_\delta(X_0)$ sur E_0, avec $\|P_0\| \leq \|P\|$, puisque l'espace $\mathcal{C}_\delta(X_0)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}_\sigma(X)$. De plus, comme E est séparable, l'espace $X/\mathcal{R}$ est métrisable.

Ceci étant, soit Φ le plongement canonique naturel de X dans l'espace E', défini par $\Phi(x)(f) = f(x)$, $\forall\, f \in E$. Il est clair que Φ est une homéomorphie de X sur son image, et de plus $\Phi(X) \subset B(E')$. Une application du théorème de

Krejn-Mil'man montre que $\Phi(X) \supseteq \overline{\mathcal{E}(B(E'))}$. Soit $Y \subset X$ l'image réciproque de $\overline{\mathcal{E}(B(E'))}$ par Φ , l'ensemble Y est un sous-compact de X stable par l'involution σ ; d'après le théorème 4, il existe un sous-espace Z de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ isométrique à $\mathcal{C}_\sigma(Y)$ qui est l'image de $\mathcal{C}_\sigma(X)$ par une projection contractante π . Si E est complémenté dans l'espace $\mathcal{C}_\sigma(Y)$, on pose $P_X = P_Y \circ \pi$ après avoir effectué les identifications nécessaires. Inversement, si E est complémenté dans $\mathcal{C}_\sigma(X)$, la trace de P_X sur Z est la projection P_Y recherchée, et elle vérifie $\|P_Y\| \leq \|P_X\|$.

THÉORÈME 7. - Soient X un espace compact, et $H \subset \mathcal{C}(X)$,un sous-espace séparable image d'une projection contractante. Si l'espace H' n'est pas séparable pour sa norme, l'espace H est isomorphe à $\mathcal{C}([0 , 1])$.

Démonstration. - D'après le lemme précédent, on peut remplacer X par l'espace $\overline{\mathcal{E}(B(H'))}$; par suite, on peut supposer que le compact X est métrisable. Comme l'espace H' n'est pas séparable, l'ensemble $\mathcal{E}(B(H'))$ n'est pas dénombrable, et a fortiori $\overline{\mathcal{E}(B(H'))}$. D'après le théorème 2, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{E}(B(H'))})$ est isomorphe à $\mathcal{C}([0 , 1])$. D'autre part, comme $\overline{\mathcal{E}(B(H'))} = \mathcal{E}(B(H')) \cup \{0\}$ est un compact, métrisable, non dénombrable, il existe un sous-compact $Y \subset \mathcal{E}(B(H'))$, homéomorphe à l'ensemble de Cantor, et tel que $Y \cap \sigma(Y) = \emptyset$. D'après le théorème de Dugundji de [1], et le théorème 2, l'espace H contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace $\mathcal{C}([0 , 1])$; par le théorème 3 , on conclut que H est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}([0 , 1])$.

LEMME 8. - Soit V' un espace dual de dimension infinie, isométrique à un espace $L^1(\mu)$; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'espace V' est séparable pour sa norme ;
(b) L'espace V' est isométrique à l'espace $\ell^1(\underset{\sim}{N})$;
(c) L'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est dénombrable infini.

Démonstration. - (b) implique trivialement (a).

(a) $\Longrightarrow$ (c) : Soient p et q deux points extrémaux de la boule $B(V')$, avec $p \neq q$; comme les points extrémaux de la boule unité de l'espace $L^1(\mu)$ correspondent aux atomes de la mesure μ , il est clair que $\|p - q\| = 2$. Par conséquent, l'ensemble des points extrémaux de $B(V')$ est fini ou dénombrable. Comme on a supposé que l'espace V' est de dimension infinie, l'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est donc infini.

(c) $\Longrightarrow$ (b) : Comme l'ensemble des points extrémaux de $B(V')$ est dénombrable, l'expace V' est séparable d'après le théorème 3.1 de [5] ; de plus, l'ensemble $\mathcal{E}(B(V'))$ est dense dans l'espace V' muni de la topologie de la norme. La conclu-

sion recherchée est alors une conséquence du théorème 3 de [3].

Si ω est un espace localement compact, on notera $C_0(\omega)$ l'espace des fonctions réelles continues sur ω, et nulles à l'infini. Un espace de Banach V est dit un C_0-espace s'il existe un espace localement compact ω, tel que V soit isométrique à l'espace $C_0(\omega)$.

LEMME 9. - Soit V un C_σ-espace ; pour que V soit un C_0-espace, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert $\omega \subset \mathcal{E}(B(V'))$ tel que

$$\omega \cap \sigma(\omega) = \emptyset \quad \text{et} \quad \omega \cup \sigma(\omega) = \mathcal{E}[\mathcal{B}(V')] .$$

Démonstration. - La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Soient V un C_σ-espace, et ω un ouvert de $\mathcal{E}(B(V'))$ vérifiant les conditions du lemme. L'ouvert ω est localement compact, et l'opérateur T, défini par $T(f) = f_{|\omega}$, pour tout f dans V, est une isométrie de V sur un sous-espace de $C_0(\omega)$. En effet, le théorème 5 (b) montre que, pour toute $f \in V$, la fonction $f_{|\omega} \in C_0(\omega)$; d'autre part, comme $\omega \cup \sigma\omega = \mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]$, le principe du maximum de Bauer montre que l'on a $\|f\| = \|f_{|\omega}\|$.

Soit maintenant une fonction f dans $C_0(\omega)$; on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]}$ par

$$\tilde{f}_{|\omega} = f \quad ; \quad \tilde{f}_{|\sigma\omega} = -f \quad ; \quad \tilde{f}(0) = 0 .$$

Cette fonction est continue sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(V')]}$ et elle est σ-impaires ; d'après le théorème 5 (c), $\tilde{f}$ peut être considérée comme un élément de V, et il est clair que $T(\tilde{f}) = f$. par suite, T est une isométrie linéaire de V sur $C_0(\omega)$.

THÉORÈME 10. - Si X est un espace compact, et $H \subset C(X)$ un sous-espace séparable, image d'une projection contractante. Si l'espace H' est séparable pour sa norme, l'espace H est isomorphe à un espace $C(K)$, où K est un compact dénombrable.

Démonstration. - D'après le lemme 8, l'ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]$ est dénombrable ; comme $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \subset \mathcal{E}[\mathcal{B}(H')] \cup \{0\}$, le compact $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]}$ est aussi dénombrable. D'après le théorème 1, il existe un ordinal $\alpha < \Omega$ et un nombre entier $n \in \underset{\sim}{N}$, tel que l'espace $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \cup \{0\}$ soit homomorphe au segment d'ordre $[0 , \omega^{\alpha.n}+1]$. L'involution $x \to -x$, définie sur $\overline{\mathcal{E}[\mathcal{B}(H')]} \cup \{0\}$, se transporte en une involution σ, définie sur $[0 , \omega^{\alpha.n} + 1]$, et qui admet un seul point fixe. Soit β_0 ce point là. On note ω l'ensemble défini par

$$\omega = \{\beta \in [0 , \omega^{\alpha.n} + 1] \; ; \; \sigma(\beta) > \beta\} .$$

Comme l'involution σ n'est pas réduite à l'identité, l'ensemble ω est un ouvert non vide de $[0 , \omega^{\alpha.n} + 1]$ qui vérifie les conditions du lemme 9.

En effet, l'involution ne peut avoir qu'un seul point fixe ; comme $\omega = \emptyset$ implique $\sigma(0) = 0$, ceci prouve que 0 est l'unique point fixe de σ . D'autre part, $\sigma(1) \leq 1$; comme σ est injective, $\sigma(1) \neq 0$; par conséquent, $\sigma(1) = 1$, ce qui montre que σ admet au moins deux points fixes distincts. Maintenant, il est facile de vérifier que l'on a

$$\omega \cap \sigma(\omega) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \omega \cup \sigma(\omega) = [0 , \omega^{\alpha \cdot n} + 1) \setminus \{\mu_0\} .$$

L'espace H est donc isométrique à l'espace $C_0(\omega)$ d'après le lemme 9 . Comme ω est un espace localement compact, métrisable et dénombrable, il est facile de démontrer que l'espace $C_0(\omega)$ est isomorphe à l'espace $C_0(\omega^*)$, où ω^* est le compactifié d'Aleksandrov de ω . Ce qui achève la démonstration du théorème.

Les théorèmes 7 et 10 démontrent le résultat annoncé au début de ce travail, à savoir :

Un sous-espace séparable de $C(X)$, image d'une projection contractante, est isomorphe à l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un espace compact métrisable.

Remarques.

(a) Le théorème 10 montre aussi le fait suivant : Tout C_σ-espace, dont le dual est séparable pour sa norme, est isométrique à l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact, nulles à l'infini,

(b) Depuis la rédaction de cet article, nous avons appris que R. V. McPHERSON et H. E. LACEY, dans un article récent [7], ont démontré la remarque (a).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUGUNDJI (J.). - An extension of Tietze's theorem, Pacific J. of Math., t. 1, 1951, p. 353-367.

[2] FAKHOURY (H.). - Préduaux de L-espaces ; notion de "centre", J. of funct. Anal. (à paraître).

[3] FULLERTON (R.). - A characterization of L-spaces, Fund. Math., Warszawa, t. 38, 1951, p. 127-136.

[4] JONAC (M.-L.) et SAMUEL (C.). - Sur les sous-espaces complémentés de $C(S)$, Bull. Sc. math., 2e série, t. 94, 1970, p. 159-163.

[5] LINDENSTRAUSS (J.) and PHELPS (R. P.). - Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces, Israel J. Math., t. 6, 1968, p. 39-48.

[6] LINDENSTRAUSS (J.) and WULBERT (D. E.). - On the classification of Banach spaces whose duals are L_1-spaces, J. of funct. Anal., t. 4, 1969, p. 332-349.

[7] McPHERSON (R. V.) and LACEY (H. E.). - On certain classes of Banach spaces whose duals on abstract L-spaces, J. of funct. Anal. (à paraître).

[8] MAZURKIEWIC (S.) et SIERPINSKI (W.). - Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, Fund. Math., Warszawa, t. 1, 1920, p. 17-27.

[9] MILUTIN (A. A.). - Isomorphisms of spaces of continuous functions on compact of power continum [en russe], Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen., t. 2, 1966, p. 150-156.

[10] PEŁCZYNSKI (A.). - Projections in certain Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 209-228.

[11] PEŁCZYNSKI (A.). - On C(S)-subspaces of separable Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 31, 1968, p. 513-522.

[12] SAMUEL (C.). - Sur certains espaces $c_0(S)$ et sur les sous-espaces complémentés de C(S) , Bull. Sc. math., 2e série, t. 95, 1971, p. 65-82.

(Texte reçu le 2 septembre 1971)

Hicham FAKHOURY
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75 - PARIS 05