Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint-Raymond

Prolongement d'une distance

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C4, p. C1-C5

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A12_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 4, 5 p.

PROLONGEMENT D'UNE DISTANCE

par Jean SAINT-RAYMOND

Le but de cette note est de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. - Si F est un fermé d'un espace métrisable E, et d une distance sur F qui définit la topologie de sous-espace, existe-t-il une distance δ sur E, prolongeant d, et définissant la topologie de E ?

LEMME 1. - Soient E un espace métrisable, et F un fermé de E. Si d est une distance sur F, continue sur $F \times F$, il existe sur E un écart g, fini et continu sur $E \times E$, qui prolonge d.

Si F est vide, il suffit de prendre $g = 0$.

Si F n'est pas vide, soit ω un point de F. Posons

$$f_y(x) = d(x , y) - d(x , \omega) \quad .$$

La fonction f_y est continue sur F, pour tout $y \in F$, et bornée, car

$$|f_y(x)| \leqslant d(y , \omega) \quad .$$

Il existe donc un prolongement continu $\overline{f}_y$ au compactifié de Stone-Čech $\check{F}$ de F. Si l'on pose, pour $x \in \check{F}$ et $y \in F$,

$$\psi(x , y) = \overline{f}_y(x) \quad ,$$

ψ est une fonction numérique continue sur $\check{F} \times F$. En effet, pour tout x de F, et pour y et y' dans F, on a

$$|f_{y'}(x) - f_y(x)| \leqslant d(y , y') \quad .$$

Comme F est dense dans $\check{F}$, l'inégalité est valable pour tout x de $\check{F}$. Alors

$$\begin{aligned} |\psi(x' , y') - \psi(x , y)| &\leqslant |\psi(x' , y') - \psi(x' , y)| + |\psi(x' , y) - \psi(x , y)| \\ &\leqslant d(y , y') + |\overline{f}_y(x') - \overline{f}_y(x)| \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de ψ au point (x , y). Comme E est paracompact et $\check{F}$ compact, $\check{F} \times E$ est paracompact, donc normal. De plus, $\check{F} \times F$ est fermé dans $\check{F} \times E$; il existe donc une fonction numérique continue φ sur $\check{F} \times E$, qui prolonge ψ.

Comme $\check{F}$ est compact, pour tout $\alpha \in E$,

$$M(\alpha) = \sup_{x \in F} |\varphi(x , \alpha)|$$

est fini. De plus, les fonctions $[\varphi(x , .)]_{x \in F}$ sont équicontinues en tout point de E . Par conséquent, si l'on pose, pour tout couple (α , β) de points de E ,

$$g(\alpha , \beta) = \sup_{x \in F} |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)| \ ,$$

$g(\alpha , \beta)$ est majoré par $M(\alpha) + M(\beta)$, donc fini, et continu. Chacun des $g_x(\alpha , \beta) = |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)|$ est un écart ; il en est donc de même de g .

Si α et β appartiennent à F , on a

$$\begin{cases} |\varphi(x , \alpha) - \varphi(x , \beta)| = |d(x , \alpha) - d(x , \omega) - d(x , \beta) + d(x , \omega)| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant d(\alpha , \beta) \ , \\ |\varphi(\alpha , \alpha) - \varphi(\alpha , \beta)| = d(\alpha , \beta) \ . \end{cases}$$

Ceci montre que l'écart fini et continu g prolonge d , et termine la démonstration du lemme.

THÉORÈME 2. - Soient E un espace métrisable, et F un sous-espace fermé de E . Si les distances d_1 sur E et d sur F définissent les topologies de E et de F , et si, pour tout couple (x , y) de points de F , on a

$$d(x , y) \leqslant d_1(x , y) \ ,$$

il existe sur E une distance δ , inférieure à d_1 , compatible avec la topologie de E , et qui prolonge d .

Définissons sur $E \times E$ la fonction numérique h par

$$h(\alpha , \beta) = \inf_{x,y \in F} [d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta)] \ .$$

Il est clair que

$$h(\alpha , \beta) \geqslant d_1(\alpha , F) + d_1(\beta , F) \ ,$$

et que

$$h(\alpha , \beta) = h(\beta , \alpha) \ .$$

Si α et β appartiennent à F , on a

$$h(\alpha , \beta) \leqslant d_1(\alpha , \alpha) + d(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \beta) = d(\alpha , \beta) \ ,$$

$$d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta) \geqslant d(\alpha , x) + d(x , y) + d(y , \beta) \geqslant d(\alpha , \beta) \ .$$

On en déduit que h prolonge d . De plus, comme

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \beta) + d_1(\beta , \gamma) ,$$

on a

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) .$$

Posons maintenant

$$\delta(\alpha , \beta) = \inf[h(\alpha , \beta) , d_1(\alpha , \beta)] .$$

Il est clair que $\delta \leqslant d_1$, et que δ prolonge d , puisque h prolonge d et que d est inférieur à d_1 sur F .

Si $\delta(\alpha , \beta) = 0$, ou bien $\alpha = \beta$, ou bien $h(\alpha , \beta) = 0$. Dans ce dernier cas, α et β appartiennent à F , puisque $h(\alpha , \beta) \leqslant d_1(\alpha , F) + d_1(\beta , F)$. Mais alors $d(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta) = 0$, ce qui entraîne $\alpha = \beta$.

Pour vérifier que δ est une distance sur E , il reste à vérifier l'inégalité du triangle.

- Si $\delta(\alpha , \beta) = d_1(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = d_1(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , \gamma) \leqslant d_1(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \leqslant \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) ;$$
- Si $\delta(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = d_1(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + d_1(\beta , \gamma) \leqslant \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) ;$$
- Si $\delta(\alpha , \beta) = h(\alpha , \beta)$ et $\delta(\beta , \gamma) = h(\beta , \gamma)$, on a
$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) = \inf_{x,y \in F} [d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)] .$$

Comme on a, quels que soient x , y , z , t dans F ,

$$d_1(\alpha , x) + d(x , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant d_1(\alpha , x) + d(x , z) + d_1(z , t) + d(t , y) + d_1(y , \gamma)$$
$$\leqslant [d_1(\alpha , x) + d(x , z) + d_1(z , \beta)] + [d_1(\beta , t) + d(t , y) + d_1(y , \gamma)]$$

on en déduit

$$h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + h(\beta , \gamma) ,$$

et donc

$$\delta(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \gamma) \leqslant h(\alpha , \beta) + h(\beta , \gamma) = \delta(\alpha , \beta) + \delta(\beta , \gamma) .$$

δ est donc une distance sur E qui prolonge d . Comme $\delta \leqslant d_1$, pour montrer que δ est compatible avec la topologie de E , il suffit de montrer que toute suite (α_n) , telle que $\delta(\alpha_n , \alpha_0) \to 0$, converge vers α_0 .

- Si $\alpha_0 \notin F$,

$$h(\alpha_0 , \alpha_n) \geqslant d_1(\alpha_0 , F) > 0 \quad .$$

Donc, puisque $\delta(\alpha_n , \alpha_0) \to 0$, $d_1(\alpha_n , \alpha_0) \to 0$, et (α_n) converge vers α_0 .

- Si $\alpha_0 \in F$,

$$d_1(\alpha_n , F) \leqslant d_1(\alpha_n , \alpha_0) \qquad \text{et} \qquad d_1(\alpha_n , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_0) \quad .$$

Donc $d_1(\alpha_n , F) \leqslant \delta(\alpha_n , \alpha_0)$.

Il existe donc $x_n \in F$ tel que

$$d_1(\alpha_n , x_n) \leqslant 2d_1(\alpha_n , F) \leqslant 2\delta(\alpha_n , \alpha_0) \quad .$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(\alpha_0 , x_n) = \delta(\alpha_0 , x_n) &\leqslant \delta(\alpha_0 , \alpha_n) + \delta(\alpha_n , x_n) \\ &\leqslant \delta(\alpha_0 , \alpha_n) + d_1(\alpha_n , x_n) \leqslant 3\delta(\alpha_0 , \alpha_n) \quad . \end{aligned}$$

On en déduit que (x_n) converge vers α_0 , donc que $d_1(\alpha_0 , x_n) \to 0$. Comme $d_1(x_n , \alpha_n) \to 0$, et que $d_1(\alpha_0 , \alpha_n) \leqslant d_1(\alpha_0 , x_n) + d_1(x_n , \alpha_n)$, (α_n) converge vers α_0 . Ceci achève la démonstration du théorème 2.

THÉORÈME 3. - Soient E un espace métrisable, et F un sous-espace fermé de E . Si d est une distance sur F compatible avec la topologie de F , il existe sur E une distance δ compatible avec la topologie et prolongeant d .

Soit d_0 une distance sur E , compatible avec la topologie. Il existe, en vertu du lemme 1, un écart g fini et continu sur E , qui prolonge d . Si l'on pose

$$d_1 = d_0 + g \quad ,$$

d_1 est une distance continue sur E , majorant g , donc d , sur F . La topologie définie par d_1 est plus fine que la topologie initiale, puisque $d_1 \geqslant d_0$, et moins fine, puisque d_1 est continue. d_1 est donc compatible avec la topologie. Il suffit donc d'appliquer le théorème 3 pour obtenir le résultat.

Si on suppose de plus que E est complet pour d_0 , et F complet pour d , E est complet pour d_1 : en effet, toute suite de Cauchy pour d_1 est une suite de Cauchy pour d_0 , donc une suite convergente. Si (α_n) est alors une suite de Cauchy pour la distance δ définie à partir de d_1 et d dans la démonstration du théorème 3, la suite $(d_1(\alpha_n , F))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels. En effet,

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant d_1(\alpha_n , \alpha_p) \quad ,$$

et

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant d_1(\alpha_n , F) + d_1(\alpha_p , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_p) ,$$

ce qui entraîne

$$|d_1(\alpha_n , F) - d_1(\alpha_p , F)| \leqslant \delta(\alpha_n , \alpha_p) .$$

Il existe donc un nombre réel $\lambda \geqslant 0$, limite de la suite $(d_1(\alpha_n , F))$.

Si $\lambda = 0$, il existe, pour tout n , un point x_n de F tel que

$$d_1(x_n , \alpha_n) \leqslant 2d_1(\alpha_n , F) .$$

Comme $\delta(x_n , \alpha_n) \leqslant d_1(x_n , \alpha_n)$, (x_n) est une suite de Cauchy pour δ . Comme δ prolonge d , et que F est complet pour d , la suite (x_n) converge, et la suite (α_n) converge vers la même limite.

Si $\lambda > 0$, il existe un nombre N tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$, on ait

$$\begin{cases} d_1(\alpha_n , F) > \frac{\lambda}{2} , \\ \delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) < \lambda . \end{cases}$$

On a alors

$$\delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) < \lambda < d_1(\alpha_n , F) + d_1(\alpha_{n+p} , F) \leqslant h(\alpha_n , \alpha_{n+p}) .$$

Ceci entraîne $\delta(\alpha_n , \alpha_{n+p}) = d_1(\alpha_n , \alpha_{n+p})$, et la suite (α_n) est une suite de Cauchy pour d_1 , donc une suite convergente. E est donc complet pour δ .

Ceci achève de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Soient E un espace métrisable, complet pour une distance compatible avec sa topologie, et F un sous-espace fermé. Si d est une distance compatible avec la topologie de F , pour laquelle F est complet, il existe sur E une distance δ , compatible avec la topologie, prolongeant d , et pour laquelle E est complet.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08