Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint-Raymond

Une caractérisation des $F_{\sigma\delta}$ d'un espace métrisable

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C3, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A11_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 3, 4 p.

UNE CARACTÉRISATION DES $F_{\sigma\delta}$ D'UN ESPACE MÉTRISABLE

par Jean SAINT-RAYMOND

Il est immédiat que l'ensemble des points, où une suite de fonctions numériques continues sur un espace métrique converge vers 0 , est un $F_{\sigma\delta}$. Nous montrerons que la réciproque est vraie, et nous en déduirons un corollaire, dont la démonstration directe ne semble pas facile.

DÉFINITION 1. - Une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur un espace métrisable L sera dite adaptée à une partie X de L , si X est l'ensemble des points de L , où (f_n) converge vers 0 .

DÉFINITION 2. - Une partie X d'un espace métrisable L sera dite de type (A), s'il existe une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur L , adaptée à X .

LEMME 3. - Dans un espace métrisable, tout ensemble de type (A) est un $F_{\sigma\delta}$.

Soit (f_n) une suite adaptée à un ensemble X de type (A). Le lemme résulte de l'égalité

$$X = \bigcap_n \Big[\bigcup_p \Big(\bigcap_q \{x \mid |f_{p+q}(x)| \leqslant \tfrac{1}{n}\} \Big) \Big] ,$$

puisque $\{x \mid |f_{p+q}(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}$ est fermé.

LEMME 4. - L'intersection d'une suite (X_p) de parties de type (A) d'un espace métrisable L est de type (A).

Choisissons, pour chaque p , une suite $(f_{n,p})_{n\in\underset{\sim}{N}}$, adaptée à X_p . En remplaçant au besoin $f_{n,p}$ par $\inf(1 , |f_{n,p}|)$, on peut supposer que toutes les $f_{n,p}$ prennent leurs valeurs dans $[0 , 1]$. En posant alors

$$g_n(x) = \sum_{p\in\underset{\sim}{N}} 2^{-p} f_{n,p}(x) ,$$

on définit une suite (g_n) de fonctions continues sur L . Les inégalités

$$2^{-p} f_{n,p}(x) \leqslant g_n(x) \leqslant 2^{-p} + \sum_{q\leqslant p} 2^{-q} f_{n,q}(x)$$

entraînent que $g_n(x)$ converge vers 0 si, et seulement si, $f_{n,p}(x)$ converge

vers 0 pour tout p . (g_n) est donc adaptée à $X = \cap X_p$, qui est de type (A).

LEMME 5. - Si X est différence de deux fermés de l'espace métrisable L , il existe une suite décroissante (g_n) de fonctions positives continues, telle que :

(i) Pour tout x de X , il existe un entier n tel que $g_n(x) = 0$;
(ii) Si x n'appartient pas à X , $\inf\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Une telle suite est clairement adaptée à X . Soit d une distance compatible avec la topologie de L . Pour tout fermé F de L , la distance $d(x , F)$ du point x à F est une fonction continue de x . Si X est différence des fermés F et H ,

$$X = F \cap \complement H \ .$$

On peut poser

$$g_n(x) = d(x , F) + \sup[0 ; 1 - nd(x , H)] \ .$$

Il est aisé de vérifier que (g_n) satisfait aux conditions de l'énoncé.

LEMME 6. - Si (X_p) est une suite de parties deux à deux disjointes d'un espace métrisable L , différences de fermés, la réunion des X_p est de type (A).

Choisissons, pour chaque p , une suite décroissante $(g_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives continues, vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 5 relativement à X_p . La fonction $g_{n,p}$ ne s'annule pas hors de X_p , puisque $\inf\limits_n g_{n,p}(x) > 0$ si $x \notin X_p$.

Puisque $X_p \cap X_q = \emptyset$ si $p \neq q$, la fonction $g_{n,p} + g_{n,q}$ est strictement positive, quel que soit n . Posons alors

$$c_n(x) = \inf\{g_{n,p}(x) + g_{n,q}(x) \mid p < q \leqslant n\} \ .$$

La fonction c_n est continue et strictement positive. De plus, comme la suite $(g_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

$$c_{n+1}(x) \leqslant \inf\{g_{n,p}(x) + g_{n,q}(x) \mid p < q \leqslant n + 1\} \leqslant c_n(x) \ .$$

On définit alors

$$f_n(x) = \left(n + \frac{1}{c_{n+1}(x)}\right) \inf\{g_{n,p}(x) \mid p \leqslant n\} \ .$$

La fonction f_n est continue. On va démontrer que la suite (f_n) est adaptée à $X = \cup X_p$. Soit x un point de X ; il existe q tel que $x \in X_q$; en vertu de l'hypothèse (i) sur la suite $(g_{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la décroissance, il existe un entier s tel que, pour tout $n \geqslant s$, $g_{n,q}(x) = 0$. Pour tout n supérieur à s et à q ,

on a donc $f_n(x) = 0$. La suite $f_n(x)$ converge donc vers 0 , si x appartient à X . Inversement, si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, il existe un entier s tel que, pour tout $n \geqslant s$, $f_n(x) \leqslant \frac{1}{3}$. Il existe donc, pour tout $n \geqslant s$, un entier p tel que

$$\text{(I)} \qquad \left(n + \frac{1}{c_{n+1}(x)}\right) g_{n,p}(x) \leqslant \frac{1}{3} \ .$$

On a alors

$$g_{n,p}(x) \leqslant \frac{c_{n+1}(x)}{3} \ .$$

Soit alors, pour tout $n \geqslant s$, $p(n)$ un entier vérifiant l'inégalité (I). Si $p(n) \neq p(n+1)$, on a

$$c_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1,p(n)}(x) + g_{n+1,p(n+1)}(x) \leqslant g_{n,p(n)}(x) + g_{n+1,p(n+1)}(x)$$

$$\leqslant \frac{c_{n+1}(x)}{3} + \frac{c_{n+2}(x)}{3} \leqslant \frac{2}{3}\, c_{n+1}(x) \ ,$$

ce qui est incompatible avec $c_{n+1}(x) > 0$. Donc $p(n)$ est déterminé de façon unique, et l'on a

$$q = p(s) = p(s+1) = \ldots = p(n) = \ldots \ .$$

On déduit alors de (I) que, si $n \geqslant s$,

$$g_{n,q}(x) \leqslant \frac{1}{3n} \ .$$

La suite $(g_{n,q}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 . Comme $(g_{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à X_q , x appartient à X_q , donc à X . La suite (f_n) est donc adaptée à X , et X est de type (A).

THÉORÈME 7. - <u>Dire qu'une partie</u> X <u>d'un espace métrisable</u> L <u>est un</u> $F_{\sigma\delta}$, <u>équivaut à dire qu'il est de type</u> (A).

D'après le lemme 3, si X est de type (A), c'est un $F_{\sigma\delta}$. Inversement, en vertu du lemme 4, il suffit de démontrer que tout F_σ dans L est de type (A). Si Y est un F_σ , il est réunion d'une suite croissante $(H_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de L . On a alors, en posant $H_0 = \emptyset$,

$$Y = \bigcup_{n\geqslant 0} (H_{n+1} \cap \complement H_n) \ .$$

Les $H_{n+1} \cap \complement H_n$ sont des différences de fermés deux à deux disjointes. Le résultat découle alors du lemme 6.

COROLLAIRE 8. - <u>La réunion de deux parties de type</u> (A) <u>d'un espace métrisable</u> L <u>est de type</u> (A) <u>dans</u> L .

En effet, la réunion de deux $F_{\sigma\delta}$ est un $F_{\sigma\delta}$.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08