Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Opérations sur les espaces vectoriels topologiques métrisables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C2, p. C1-C5

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A10_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 2, 5 p.

OPÉRATIONS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES MÉTRISABLES

par Gustave CHOQUET

La question suivante a été récemment posée oralement par R. C. JAMES :

Si X , Y sont deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach séparable B , avec $X \cap Y = \{0\}$, est-ce que la dimension algébrique du quotient $B/(X + Y)$ peut être infinie et dénombrable ?

Nous montrerons (corollaire 4) que la réponse est négative, ainsi que le conjecturait R. C. JAMES. Notre démonstration s'applique en fait à un cadre plus général, et elle conduit à plusieurs problèmes intéressants concernant les e. v. t. métrisables (sur $\mathbb{R}$) assez réguliers, tels que, par exemple, les espaces analytiques.

Une première partie, basée sur un théorème trop peu connu de BANACH, concerne les espaces séparables ; une seconde, basée sur le théorème classique de BANACH, concerne les espaces métrisables plus généraux.

Rappelons d'abord quelques définitions. Soient E un espace topologique, et X une partie de E .

On dira que X est analytique, si X est l'image de l'ensemble I des irrationnels de $(0 , 1)$ par une application continue de I dans E .

On dira que X possède la propriété faible de Baire dans E , s'il existe deux parties Y_1 , Y_2 de E , de 1re catégorie (i. e. maigre) dans E , et un ouvert Ω de E , tels que $X = (\Omega \cup Y_1) \setminus Y_2$. Il est immédiat, par induction transfinie, que l'ensemble des parties de E possédant la propriété faible de Baire est une tribu (stabilité par réunion dénombrable et passage au complémentaire) ; par exemple, toute partie borélienne de E a cette propriété. On démontre que toute partie analytique d'un espace métrisable E a la propriété faible de Baire dans E .

Rappelons enfin que E est appelé espace de Baire, si toute partie de E de 1re catégorie a un intérieur vide.

Voici, dans un cadre général, le théorème de Banach utilisé dans notre première partie (voir [1], p. 21-23 ; voir aussi [2], § 5, exercice 27) :

THÉORÈME 1. - Soit G un groupe topologique, et soit H un sous-groupe de G possédant la propriété faible de Baire dans G . Alors, ou bien H est de 1re catégorie dans G , ou bien G est de Baire, et H est à la fois ouvert et fermé dans G (d'où $H = G$, si G est connexe).

Rappelons sa démonstration : Supposons que H ne soit pas de 1re catégorie dans G ; alors G n'est pas non plus de 1re catégorie dans lui-même et, comme c'est un groupe, G est un espace de Baire. Comme H a la propriété faible de Baire dans G, et n'est pas de 1re catégorie, il existe un point $a \in H$, et un voisinage ouvert Ω de a dans G, tel que l'ensemble non vide $Y = \Omega \setminus (H \cap \Omega)$ soit de 1re catégorie. Comme toute translation est une homéomorphie de G, la même propriété a lieu pour tout $x \in H$, et en particulier pour $x = e$, élément neutre de G.

Supposons donc que l'ouvert Ω choisi contienne e, et supposons Ω symétrique, ce que l'on peut faire en remplaçant Ω par $\Omega \cap \Omega^{-1}$. Si l'on peut montrer que $\Omega \subset H$, on aura montré que H est voisinage de e, donc aussi de chacun de ses points ; donc H sera un sous-groupe ouvert de G (donc aussi fermé).

Soit donc $x \in \Omega$; posons $\Omega' = x\Omega \cap \Omega$; c'est un sous-groupe ouvert non vide de Ω ; or on a

$$(\Omega' \setminus H) \subset (\Omega \setminus H) \qquad \text{et} \qquad (\Omega' \setminus xH) \subset (x\Omega \setminus xH) = x(\Omega \setminus H) .$$

Donc $(\Omega' \setminus H)$ et $(\Omega' \setminus xH)$ sont de 1re catégorie, d'où $H \cap xH$ non vide, ce qui entraîne $x \in H$.

COROLLAIRE 2. - Tout e. v. t. métrisable analytique E est, ou bien complet, ou bien de 1re catégorie dans lui-même.

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $H = E$ et $G =$ (complété de E).

THÉORÈME 3. - Soit X une partie analytique d'un e. v. t. métrisable complet E ; et soit H l'espace vectoriel engendré par X ; alors :

- Ou bien H est lui-même complet ;
- Ou bien H est de 1re catégorie dans lui-même, et alors l'espace quotient E/H a une dimension algébrique $>$ (dénombrable).

Démonstration. - Montrons d'abord que H est analytique : L'ensemble $Y = \{\lambda x \ ; \ \lambda \in \underline{R}, \ x \in X\}$ est une image continue de $\underline{R} \times X$, donc est analytique. Pour tout entier n, l'ensemble $Y_n = \underbrace{Y + \ldots + Y}_{n \text{ fois}}$ est une image continue de $\underbrace{Y \times Y \times \ldots \times Y}_{n \text{ fois}}$, donc est analytique. Enfin $H = \bigcup_n Y_n$, donc H est analytique.

1° Si E/H est de dimension 1, on peut l'identifier à $\underline{R}$; soit alors φ l'application canonique de E sur $E/H = \underline{R}$. Pour tout ouvert ω de $\underline{R}$, les ensembles $\varphi^{-1}(\omega)$ et $\varphi^{-1}(\complement\omega)$ sont analytiques (comme somme vectorielle de deux ensembles analytiques), et comme ils sont complémentaires dans E, ils sont boréliens ; donc φ est mesurable (B) ; il en résulte que φ est continue (voir le

théorème 4, p. 23, dans [1]) ; donc H est fermé dans E , donc est complet.

2° Supposons E/H de dimension n finie, et soit $\{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ une base d'un espace supplémentaire à H dans E . L'espace vectoriel, engendré par H et les vecteurs a_i pour $i < n$, est analytique et de codimension 1 , donc ce qui précède montre que cet espace est fermé dans E . Un raisonnement par récurrence montre alors que H est fermé dans E .

3° Supposons que E/H soit de dimension algébrique dénombrable, et soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base d'un sous-espace supplémentaire de H . Pour tout entier n , soit H_n l'espace engendré par H et les vecteurs $e_1 , e_2 , \dots , e_n$. C'est la somme de H et d'un ensemble analytique, donc H_n est analytique, et comme $H_n \neq E$, H_n est de 1re catégorie dans E , d'après le corollaire 2. Or $E = \bigcup_n H_n$, donc E est aussi de 1re catégorie, ce qui est incompatible avec le fait que E est complet.

D'où le théorème, grâce au corollaire 2.

COROLLAIRE 4. - Soit (X_n) une suite finie ou infinie de sous-espaces séparables fermés d'un e. v. t. métrisable complet E , et soit H l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_n X_n$.

- Si E/H est de dimension finie, X est fermé ;
- Si E/H est de dimension infinie, cette dimension est > (dénombrable).

Nous allons maintenant étendre une partie de ces énoncés à certains espaces métrisables non séparables.

Rappelons d'abord le théorème classique de Banach :

Soient E , F deux e. v. t. métrisables sur $\mathbb{R}$, le premier E étant complet ; et soit φ une application linéaire continue de E dans F . Alors, ou bien $\varphi(E)$ est de 1re catégorie dans lui-même, ou bien $\varphi(E)$ est complet, et alors φ est ouverte de E sur $\varphi(E)$ (autrement dit, la bijection canonique de $E/\varphi^{-1}(0)$ sur $\varphi(E)$ est bicontinue).

On va en déduire aisément l'extension cherchée :

THÉORÈME 5. - Soit (X_n) une suite finie ou infinie de sous-espaces fermés d'un e. v. t. métrisable complet E , et soit H l'espace vectoriel engendré par les X_n ; alors :

- Ou bien H est lui-même complet ;
- Ou bien H est de 1re catégorie dans lui-même, et alors l'espace quotient E/H a une dimension algébrique > (dénombrable).

Démonstration. - Notons $H_n = (X_1 + \ldots + X_n)$; c'est l'image continue de $X_1 \times \ldots \times X_n$ par une application linéaire continue, donc, d'après le théorème de Banach, H_n est complet ou est de 1re catégorie dans lui-même.

La suite des H_n est croissante, et $H = \bigcup_n H_n$; donc, ou bien à partir d'un certain rang tous les H_n sont identiques et complets, et alors H est complet ; ou bien H est de 1re catégorie dans lui-même.

Plaçons-nous dans ce second cas, et supposons que E/H ait une base algébrique finie ou dénombrable ; soit alors e_1 , e_2 , ... une telle base. Soit K_p l'espace vectoriel engendré par $\{e_1 , e_2 , \ldots , e_p\}$; l'espace vectoriel $(H_p + K_q)$ est image continue de $(X_1 \times \ldots \times X_p) \times K_q$ par une application linéaire continue, donc, ou bien est complet, ou bien est de 1re catégorie dans lui-même.

Si $\dim(E/H) = n < \infty$, $E = \bigcup_p (H_p + K_n)$, donc, comme E est complet, il existe un p_0 tel que $H_{p_0} + K_n = E$. Or il existe un quotient complet Y_{p_0} de $X_1 \times \ldots \times X_{p_0}$ tel que H_{p_0} soit image continue injective de Y_{p_0} par une application linéaire continue φ ; soit alors ψ l'application linéaire de $(Y_{p_0} \times K_n)$ sur $(H_{p_0} + K_n)$, dont les traces sur Y_{p_0} et K_n respectivement sont φ et l'identité. C'est une bijection continue de $(Y_{p_0} \times K_n)$ sur E ; donc, d'après le théorème de Banach, c'est un isomorphisme ; en particulier, φ est aussi bicontinue, donc H_{p_0} est complet ; et comme $H_p = H_{p_0}$ pour tout $p > p_0$, l'espace $H = H_{p_0}$ est complet, contrairement à l'hypothèse.

Si $\dim(E/H)$ est infinie dénombrable, $E = \bigcup_p (H_p + K_p)$ et la suite des $(H_p + K_p)$ est strictement croissante ; comme chacun des $(H_p + K_p)$ est complet ou de 1re catégorie dans lui-même, ceci est en contradiction avec le fait que E est complet.

Voici maintenant plusieurs problèmes que suggèrent les énoncés qui précèdent.

Problème 6. - Peut-on préciser les énoncés 3 (ou 4) et 5 en démontrant que, lorsque $\dim E/H = \infty$, cette dimension a au moins la puissance du continu ?

Problème 7. - Si A est un e. v. t. métrisable séparable complet, B un e. v. t. métrisable, et $f \in L(A , B)$, l'espace $f(A)$ est borélien dans B , car c'est l'image d'un espace polonais (à savoir $A/f^{-1}(0)$) par une injection continue. Cette remarque conduit au problème suivant :

Si X est un sous-espace vectoriel borélien d'un e. v. t. métrisable séparable

complet B , trouver un critère pour qu'il existe un e. v. t. métrisable séparable complet A et une $f \in L(A , B)$ telle que $X = f(A)$.

Même question dans le cadre des espaces de Banach séparables. Notons que tout borélien X de B ne convient pas, puisque, par exemple, X ne peut pas avoir une base algébrique infinie dénombrable.

Problème 8. - Que dire du caractère borélien de l'image $f(A)$ d'un e. v. t. métrisable complet non séparable A dans un e. v. t. métrisable B par une $f \in L(A , B)$?

Problème 9. - Désignons par $\mathfrak{B}$ la plus petite classe d'e. v. t. métrisables qui contient tous les espaces complets et est stable par les opérations suivantes : image linéaire continue, intersection dénombrable, réunion dénombrable de suites croissantes.

Est-ce que tout $X \in \mathfrak{B}$ a la propriété faible de Baire dans son complété $\hat{X}$? Si X n'est pas complet, que dire de la dimension algébrique de $\hat{X}/X$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, 1932 (Monografje matematyczne, 1).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, chapitre 9. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92 - ANTONY