Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Brenda Taylor-MacGibbon

Un critère de métrisabilité d'un convexe compact X à partir de $E(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 13, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A9_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 13, 4 p.

4 février 1971

UN CRITÈRE DE MÉTRISABILITÉ D'UN CONVEXE COMPACT X À PARTIR DE $\mathcal{E}(X)$

par Brenda TAYLOR-MacGIBBON

Soit E un espace localement convexe séparé, et soit X une partie convexe compacte de E. Désignons par $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des points extrémaux de X. Le but de cet exposé est d'annoncer le résultat suivant : $\mathcal{E}(X)$ n'est une partie de Baire (ou plus généralement une partie Z-souslinienne) de X que si X est métrisable.

Ensuite, nous allons donner une réponse à une question de FAKHOURY [4] concernant l'existence d'un simplexe X tel que $\mathcal{E}(X)$ soit un sous-ensemble $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$ de X, sans que $\mathcal{E}(X)$ soit un $\mathcal{G}_\delta$ de $\overline{\mathcal{E}(X)}$ (la fermeture de $\mathcal{E}(X)$ dans X).

Nous publierons les démonstrations ultérieurement. Nous remercions J. JAYNE de nous avoir communiqué son manuscrit non encore publié [6].

Soit Y un espace topologique séparé.

Définition 1. - F est un sous-ensemble de zéros de Y s'il existe une fonction continue $f : Y \to \underset{\sim}{R}$ telle que $F = \{y \in Y ; f(y) = 0\}$.

On notera Z(Y) la famille de tous les sous-ensembles de zéros de Y.

Définition 2. - $\mathcal{B}(Z(Y))$ désigne la plus petite famille de sous-ensembles de Y telle que $\mathcal{B}(Z(Y)) \supset Z(Y)$ et telle que $\mathcal{B}(Z(Y))$ soit stable par intersection dénombrable et réunion dénombrable. On appelle les éléments de $\mathcal{B}(Z(Y))$ des parties de Baire de Y.

Définition 3. - A est une partie Z-souslinienne de Y, si A est un noyau d'un système déterminant sur Z(Y) (voir [1]). $\mathcal{A}(Z(Y))$ désigne la famille de parties Z-sousliniennes de Y.

THÉORÈME 4. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $\mathcal{E}(X)$ est une partie Z-souslinienne de X ;

2° X est métrisable ;

3° $\mathcal{E}(X)$ est une partie de Baire de X au plus de deuxième classe (c'est-à-dire un $Z_{\sigma\delta}$, une intersection dénombrable d'une réunion dénombrable d'ensembles de zéros de X).

La démonstration utilise un théorème de CORSON [3], et un théorème de métrisation

de JAYNE (voir [6], et l'appendice).

COROLLAIRE 5. - Supposons que $\mathcal{E}(X)$ soit Lindelöf. Alors $\mathcal{E}(X)$ est un $\mathcal{G}_\delta$ dans X si, et seulement si, X est métrisable. En particulier, ce résultat s'applique au cas où $\mathcal{E}(X)$ est $\mathcal{K}$-analytiques.

COROLLAIRE 6. - Supposons que $\mathcal{E}(X)$ soit $\mathcal{K}$-analytique. Alors

$$(X \text{ est parfaitement normal}) \iff (X \text{ est métrisable}).$$

COROLLAIRE 7. - Il existe un convexe compact X non parfaitement normal bien que $\mathcal{E}(X)$ le soit.

Pour chaque $i \in I$, soit X_i un simplexe (compact) contenu dans un espace localement convexe séparé E_i. Supposons que, pour chaque i, existe un hyperplan $\{f_i = 1\}$ tel que $X_i \subset \{f_i = 1\}$. Soit Y_i l'enveloppe convexe de $\{0, X_i\}$, et soit $\tilde{X}_i$ le cône engendré par Y_i. Pour chaque $i \in I$, soit ρ_i la projection $\rho_i : Z = \prod_i \tilde{X}_i \to \tilde{X}_i$. Considérons la jauge suivante j sur Z : $j = \sum_i f_i \circ \rho_i$, $i \in I$. On appelle somme directe des simplexes $\{X_i\}_{i\in I}$, l'ensemble $\{j \leqslant 1\}$. On la note $\bigoplus_{i\in I} X_i$ (Cette somme est définie dans [5]).

PROPOSITION 8. - Soit I non dénombrable, et pour chaque $i \in I$, soit X_i un simplexe tel que $\mathcal{E}(X_i)$ soit homéomorphe à $[0, 1[$, muni de la topologie usuelle. Alors $\bigoplus_i X_i$ $(i \in I)$ est un simplexe ; $\mathcal{E}(\bigoplus X_i)$ est un $\mathcal{K}_\sigma$ de $\bigoplus_I X_i$ $(i \in I)$, mais $\mathcal{E}(\bigoplus_i X_i)$ n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathcal{E}(\bigoplus_i X_i)$.

APPENDICE

Nous allons donner ici une indication de la démonstration du théorème de métrisation de JAYNE. Cette démonstration est la sienne.

THÉORÈME (JAYNE [6]). - Soit Y un espace compètement régulier, et soit βY la compactification de Stone-Čech de Y. Soit Y une partie Z-souslinienne de βY. Alors Y est métrisable si, et seulement si, la diagonale Δ est une partie Z-souslinienne de $Y \times Y$.

LEMME 1. - Y est une partie Z-souslinienne de βY si, et seulement si, Y est l'image réciproque d'un espace séparable, métrisable et analytique (au sens classique) par une application propre.

Démonstration. - Soit Y une partie Z-souslinienne de βY. Alors

$$Y = \bigcup_\sigma \bigcap_s Z(f_s) \quad (\sigma \in \Sigma^{\mathbb{N}},\ s < \sigma),$$

où chaque $Z(f_s)$ est l'ensemble de zéros de la fonction $f_s \in C(\beta Y)$.

Indexons à nouveau $\{f_s\}_{s<\sigma,\ \sigma\in\Sigma}$ comme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, et définissons

$$\Phi : \beta Y \to \overline{\prod}_i \underset{\sim}{R}_i \quad (1 \leqslant i < \infty) \quad \text{par} \quad \Phi(x) = (f_1(x) , f_2(x) , \dots) .$$

Puisque $\Phi^{-1}(\Phi(Y)) = Y$, la restriction de Φ à Y est propre. Evidemment, $\Phi(Y)$ est séparable, métrisable, et analytique (Voir [1]).

Soit $h : Y \to A$ une surjection propre, où A est un espace séparable, métrisable et analytique. Soit $\hat{A}$ une compactification métrisable de A , et soit $\hat{h}$ l'extension de Stone-Čech de h , c'est-à-dire que $\hat{h} : \beta Y \to \hat{A}$. Puisque $Y = \hat{h}^{-1}(A)$, Y est une partie Z-souslinienne de βY .

COROLLAIRE 2. - Si Y est une partie Z-souslinienne de βY , Y est un espace de Morita.

C'est une conséquence du fait que l'image réciproque d'un espace métrisable par une application propre est un espace de Morita [7] (Pour la définition d'un espace de Morita, voir [6] ou [7]).

COROLLAIRE 3. - Si Y et T sont des parties Z-sousliniennes de βY et βT respectivement, $Y \times T$ est une partie Z-souslinienne de $\beta(Y \times T)$.

LEMME 4. - Si Y est une partie Z-souslinienne de βY , et si F est une partie Z-souslinienne fermée de Y , alors F est un $\mathcal{G}_\delta$ de Y .

Démonstration. - On a $h : Y \to A$, où h est une surjection propre, et A est séparable, métrisable et analytique. Soit $\hat{A}$ une compactification métrisable de A , et soit $\hat{h} : \beta Y \to \hat{A}$ ($\hat{h}$ = l'extension Stone-Čech de h).

On a $F = \bigcup_\sigma \bigcap_s Z(f_s)$ $(\sigma \in \Sigma , s < \sigma)$, où chaque $f_s \in C^*(Y)$. Soit $\hat{f}_s$ l'extension de Stone-Čech de f_s à βY . Indexons à nouveau $\{f_s\}_{s<\sigma,\sigma\in\Sigma}$ comme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Puis définissons

$$\Phi : \beta Y \to \hat{A} \times \prod_i \underset{\sim}{R}_i \quad (1 \leqslant i < \infty) \quad \text{par} \quad \Phi(x) = (\hat{h}(x) , \hat{f}_1(x) , \dots) .$$

Soit $\overline{F}$ l'adhérence de F dans βY . Evidemment, $\Phi^{-1}(\Phi(\overline{F}))$ est un $\mathcal{G}_\delta$ de βY . On peut vérifier que $\Phi^{-1}\,\Phi(\overline{F}) \cap Y = F$; alors F est un $\mathcal{G}_\delta$ de Y .

Démonstration du théorème de Jayne. - Supposons que $Y \in \mathcal{A}(Z(\beta Y))$, et que la diagonale $\Delta \in \mathcal{A}(Z(Y \times Y))$. D'après le lemme 4, Δ est un $\mathcal{G}_\delta$ de $Y \times Y$. Y est évidemment Lindelöf, donc paracompact.

D'après le corollaire 2, Y est un espace de Morita. Maintenant, Y satisfait à toutes les conditions du théorème de métrisation des espaces de Morita [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-81.

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969,(Mathematics Lecture Note Series).

[3] CORSON (H.). - Metrizability of compact convex sets (à paraître).

[4] FAKHOURY (H.). - Stabilité des simplexes de Lion, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 110-112.

[5] GOULLET de RUGY (A.), SCHOL-CANCELIER (C.) et TAYLOR-MacGIBBON (B.). - Quelques résultats nouveaux sur les points extrémaux d'un simplexe compact, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 18,

[6] JAYNE (J.). - Spaces of Baire functions, Baire classes and Suslin sets, Thèse Sc. math., Columbia University (à paraître).

[7] MORITA (K.). - Products of normal spaces with metric spaces, Math. Annalen, t. 154, 1964, p. 365-382.

[8] OKUYAMA (A.). - On metrization of M-spaces, Proc. Japan Acad., t. 40, 1964, p. 176-179.

(Texte reçu le 30 juin 1970)

Brenda TAYLOT-MacGIBBON
McGill University
Department of Mathematics
MONTREAL, Québec (Canada)