Astérisque

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Algèbre de Hopf des diagrammes de Feynman, renormalisation et factorisation de Wiener-Hopf

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 900, p. 149-165

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__149_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 2002
54e année, 2001-2002, nO 900, p. 149 à 165

ALGÈBRE DE HOPF DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN, RENORMALISATION ET FACTORISATION DE WIENER-HOPF
[d'après A. Connes et D. Kreimer]

par **Louis BOUTET de MONVEL**

1. INTRODUCTION

1.1. Renormalisation

Cet exposé a pour objet de décrire le point de vue de A. Connes et D. Kreimer sur la renormalisation en théorie quantique des champs (théorie perturbative), expliquées dans les articles [CK1, CK2]. La plupart des démonstrations sont omises, et on en trouvera les détails dans *loc. cit.*. Je remercie chaleureusement A. Connes, J. Zinn-Justin, A. Arabia pour leur aide et leurs conseils. Je remercie particulièrement P. Cartier qui a relu et corrigé ces notes dans la meilleure tradition de N. Bourbaki.

Un des effets frappants de la théorie de la renormalisation est de faire prévoir que les constantes de structure qui gouvernent un grand système physique dépendent de l'échelle d'observation. Ce fait se constate aussi dans d'autres phénomènes étendus où tous les ordres de grandeur contribuent, en particulier dans la description des transitions de phase pour lesquelles aussi l'idée de la renormalisation est pertinente (*cf.* [ZJ]). Il s'observe déjà dans des phénomènes plus classiques et connus depuis le 19ème siècle : ainsi une balle de ping-pong de masse $m = 2$gr, immergée dans l'eau (masse d'eau déplacée : $M = 32$gr environ), subit une poussée vers le haut correspondant au poids $M - m = 30$gr (force d'Archimède moins son poids). Mais, si on la lâche, elle ne remonte pas avec une accélération de $\frac{M-m}{m}g = 15g$: il y a une interaction avec l'eau environnante et le résultat final est que, tant que la vitesse reste petite, la balle remonte avec une accélération de $\frac{M-m}{m+\frac{M}{2}}\ g < 2g$. Vu de l'extérieur, tout se passe comme si la balle était affectée de la masse apparente $m' = m + \frac{M}{2}$, et si l'on n'avait pas le moyen de disséquer en détail l'interaction qui a lieu près de la balle, m' serait la seule « masse effective » qu'on puisse lui attribuer à cette échelle.

La théorie quantique des champs veut décrire et expliquer les phénomènes fondamentaux qui gouvernent la physique à l'échelle nucléaire ou particulaire. Dès le départ, elle se heurte à des difficultés considérables car les quantités « naturelles » qu'on veut

calculer sont décrites par des analogues d'intégrales qui n'ont pour l'instant pas beaucoup de sens mathématique, ou dans le cas plus simple de la théorie perturbative, par des séries asymptotiques d'intégrales divergentes[1].

Un des objets de la renormalisation est d'attribuer à ces intégrales une valeur (« partie finie »). Les parties finies d'intégrales interviennent dans beaucoup de questions d'E.D.P. et Hadamard en a donné une description systématique par troncature ou par prolongenment analytique. Ici, elles arrivent en série et il faut les organiser de façon cohérente. Les théoriciens du champ ont énoncé pour cela un certain nombre de règles qui, pour être précises et efficaces, n'en sont pas moins très compliquées.

A. Connes et D. Kreimer montrent que ces règles peuvent être résumées très élégamment par une factorisation à la Wiener-Hopf (ou Riemann-Hilbert) d'un lacet à valeurs dans un groupe associé aux diagrammes de Feynman, et que cela donne lieu à des formules « universelles » qui vivent dans le groupe « universel » des difféomorphismes formels tangents à l'identité.

1.2. Champs

Dans la théorie classique, un champ[2] est une fonction A sur $\mathbf{R}^d$ qui satisfait une équation

$$\partial^2 A - F'(A) = 0$$

où ∂^2 désigne le d'Alembertien $-\partial_t^2 + \sum \partial_{x_i^2}$, et F' est la dérivée d'une fonction donnée F. Il revient au même de dire que A extrémise l'intégrale d'action $\int d^d x\ \mathcal{L}(A)$ où le lagrangien est $\mathcal{L}(A) = \frac{1}{2}(\partial A)^2 + F(A)$; d est la dimension de l'espace-temps ; dans les formules finales c'est un entier D, $D = 4$ dans notre monde, $D = 6$ ci-dessous, mais de toute façon on devra « le faire varier continûment » pour la régularisation dimensionnelle.

Un champ quantique ϕ est une fonction (généralisée) à valeurs opérateurs, satisfaisant à un certain nombre d'axiomes pour lesquels je renvoie à la bibliographie. Il est déterminé par un état vide (d'énergie minimale) noté $\langle 0 \rangle$, et les « fonctions de Green »

$$G(x_1, \ldots, x_N) = \langle 0 | T\phi(x_1) \ldots \phi(x_N) | 0 \rangle ,$$

(le signe T signifie qu'on réordonne les facteurs x_i par ordre de temps $t = x^0$ décroissant).

---

[1] Il ne s'agit en aucune façon d'une théorie floue ou imprécise puisque les résultats théoriques qu'elle fournit concordent aussi bien que possible avec les résultats expérimentaux — jusqu'à 14 chiffres significatifs en électrodynamique quantique — ce qui est un exploit inégalé par la physique antérieure. C'est plutôt un exemple de plus du fait que les résultats les plus spectaculaires dans la description du monde qui nous entoure précèdent souvent les mathématiques qui les expliquent le plus élégamment.

[2] Pour simplifier, nous ne considérerons ici qu'un champ scalaire, i.e. A est une fonction numérique ; la physique utilise aussi des champs vectoriels, tensoriels, spinoriels, etc.

Pour quantifier une théorie classique, les physiciens s'inspirent de la formulation variationnelle et de la mécanique statistique, et affirment que la fonction de Green doit être décrite par une intégrale fonctionnelle sur l'espace de tous les champs classiques :

$$G(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N}^{-1} \int [dA]\ e^{iS(A)} A(x_1) \dots A(x_N)$$

où $S(A) = \int d^d x\ \mathcal{L}(A))$ est l'intégrale d'action, et $\mathcal{N} = \int [dA] e^{iS(A)}$ est un facteur de normalisation assurant $\langle 0|0\rangle = 1$. Dans cette intégrale aucun des termes $\mathcal{N}, [dA], \int$ n'a de sens, du moins pris séparément ; le tout évoque une intégrale gaussienne comme celles du mouvement brownien, mais la notation des physiciens est plus suggestive.

Dans la théorie perturbative, l'action est $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}_0(A) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A)$ où

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial A)^2 - \frac{m^2}{2} A^2 \tag{1}$$

est le lagrangien du champ libre de masse m, et $\mathcal{L}_{\text{int}}(A)$ est le terme perturbatif. Le développement en série (formelle) de l'exponentielle suggère

$$G(x_1, \dots, x_N) \sim \mathcal{N}^{-1} \sum \frac{i^n}{n!} \int [dA] e^{iS_0(A)} \left(S_{\text{int}}(A)\right)^n A(x_1) \dots A(x_N)$$

avec

$$\mathcal{N} \sim \sum \frac{i^n}{n!} \int [dA] e^{iS_0(A)} (S_{\text{int}}(A)^n.$$

Dans ces expressions interviennent une foison d'intégrales « gaussiennes » de la forme

$$\sum \int [dA] e^{iS_0(A)}\ S_{\text{int}}(A)^n\ A(x_1) \dots A(x_N) \tag{2}$$

qui se ramènent à des intégrales en dimension finie.

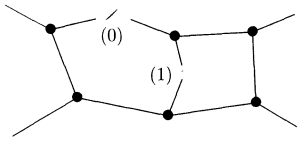
Dans [CK1, CK2] et dans beaucoup d'autres travaux, les auteurs ont choisi comme exemple le lagrangien correctif $\mathcal{L}_{\text{int}}(A) = \frac{g}{3!} A^3$ en dimension $d = 6$ (« théorie ϕ^3 »), parce que cela illustre déjà de façon simple, mais significative, le cas général, même si cela ne correspond pas à une théorie physique vraisemblable. Nous ferons de même ici.

2. INTÉGRALES ET DIAGRAMMES DE FEYNMAN

2.1. Diagrammes de Feynman

Les intégrales de Feynman (2) et les problèmes que pose leur divergence sont connus depuis le début de la théorie (Dirac). Le génie de Feynman l'a conduit à les indexer par les diagrammes qui portent son nom, qui en plus d'indiquer clairement l'intégrand et l'espace où l'on intègre, évoquent de façon imagée des interactions ou collisions virtuelles.

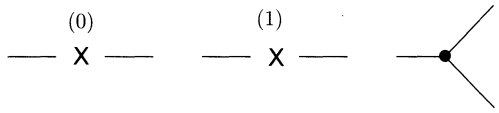
Un diagramme de Feynman est un graphe coloré (non orienté)[3] : il a un ensemble de sommets colorés, reliés par des arêtes.



Les arêtes extérieures, ou pattes, n'ont qu'un seul sommet ; les arêtes intérieures ont deux sommets distincts. Les types de sommets se distinguent par le nombre d'arêtes, et une couleur (pour les sommets à deux arêtes).

Dans la théorie ϕ^3, il y a 3 types de sommets :

(3)



correspondant respectivement aux termes quadratiques A^2, $(\partial A)^2$ et au terme cubique A^3 de $\mathcal{L}(A)$.

2.2. Intégrales de Feynman

Un tel diagramme Γ code une distribution U_Γ de N variables vectorielles $(x_1, \ldots, x_N)$, N le nombre de pattes, qu'on repère plutôt par sa transformée de Fourier $U_\Gamma(p_1, \ldots, p_N)$ des moments extérieurs p_e, qui vérifient des relations de conservation $\sum p_e = 0$ (une pour chaque composante connexe). Celle-ci est définie comme suit : à chaque arête i est associée une variable de moment p_i à d dimensions, libre si i est une patte extérieure, muette (variable d'intégration, notée k_i dans [CK1]) sinon. U_Γ est alors définie par une intégrale sur l'espace des moments internes (ou plutôt sur un sous-espace, car l'intégrand comporte des facteurs δ) :

$$U_\Gamma(p_1, \ldots, p_N) = \int \prod d^d p_i \;\; I_\Gamma(p_i). \tag{4}$$

L'intégrand I_Γ est un produit de facteurs auxquels contribuent séparément les arêtes intérieures et les sommets, par des règles explicites suivantes (pour un autre $\mathcal{L}_{\text{int}}$ il faudrait en général plus de types de sommets (ou d'arrêtes), et compléter les règles qui décrivent les facteurs associés aux sommets ou aux arêtes).

I_1 Chaque arête i produit un facteur $\frac{1}{m^2+p_i^2}$.

I_2 Chaque sommet v produit un facteur $\delta(\sum_{i \ni v} p_i^v)$ (cela fait autant de relations linéaires que de sommets, exprimant la conservation des moments)[4].

---

[3] on est aussi amené à colorer les arêtes, et à orienter le graphe, s'il y a plusieurs espèces de particules et qu'on doit distinguer entre particules et anti-particules

[4] p_i^v désigne le flux de moment entrant dans v indexé par l'arête i : si v, v' sont les deux sommets d'une arête i, on a $p_i^{v'} = -p_i^v$.

I_3 Chaque 2-sommet de type 0 produit un facteur m^2.

I_4 Chaque 2-sommet de type 1 produit un facteur p^2 (les deux moments associés sont opposés et ont même p^2).

I_5 Chaque 3-sommet produit un facteur $\mu^{3-d/2}g$.

μ est l'unité de masse — pour l'instant une variable formelle — introduite pour que les constantes qui figurent dans les intégrales à renormaliser soient des nombres purs, « sans dimension ». (Il s'agit cette fois de la dimension des physiciens : les mesures sont éléments des puissances tensorielles d'un espace vectoriel (ou sections d'un fibré vectoriel) de base. Dans une théorie scalaire relativiste comme ici, celui-ci est de rang 1, et la dimension d'une quantité physique est l'exposant de la puissance tensorielle où on la mesure ; de façon équivalente, toutes les quantités (masse, moment,...) de la théorie sont commensurables à une puissance de l'unité de masse μ ; la « dimension » d'une quantité P est l'exposant s tel que $\mu^{-s}P$ soit un nombre pur).

On peut résumer l'effet des facteurs δ en disant que les moments extérieurs vérifient la relation de conservation $\sum p_e = 0$ et que l'intégrale est effectuée sur l'espace E^i_Γ de dimension $(I - V + C)d$ des moments intérieurs indépendants (I est le nombres d'arêtes internes, V le nombre de sommets, C le nombre de composantes connexes).

Ces intégrales sont le plus souvent divergentes — doublement : à distance finie elles ont des singularités car la norme utilisée est celle de la relativité : $p^2 = -p_0^2 + \sum p_i^2$; les physiciens s'empressent de la remplacer par la norme euclidienne en faisant une « rotation de Wick » (i.e. en remplaçant le temps $t = x^0$ par un temps imaginaire pur it), ce qui élimine ces singularités (sauf pour le cas limite $m = 0$) ; le cas relativiste s'en déduit en principe par prolongement analytique, et cela ne change de toute façon pas grand'chose au principal problème de la renormalisation, qui vient des divergences à l'infini de ces intégrales (« catastrophe ultra-violette »).

2.3. Parties finies

Hadamard nous a montré comment on peut attribuer une valeur à une intégrale divergente. Par exemple, pour une singularité à l'origine, on tronque et on enlève une partie infinie « évidente » dans un développement asymptotique :

$$\mathrm{pf}\int_0^1 dt\; t^{s-1}\varphi(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 dt\; t^{s-1}\varphi(t) + \sum \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\,\frac{\varepsilon^{s+j}}{s+j}.$$

Il y a un problème supplémentaire dans le cas — le plus utile — où l'exposant s est entier.

Un autre moyen « canonique » est de remarquer que le membre de gauche est une fonction méromorphe de s, avec ici des pôles simples aux entiers négatifs. Ce prolongement redonne la partie finie pour s régulier. Aux pôles, on retient le terme constant du développement de Laurent ; c'est un peu moins canonique, car il dépend du choix de la borne supérieure d'intégration, ou d'une unité de longueur.

Une des méthodes utilisées par les physiciens, qui est celle qu'utilisent Connes et Kreimer, est la méthode de régularisation dimensionnelle, qui est une méthode de prolongement analytique : pour une fonction $f(p)$ invariante par rotation sur $\mathbf{R}^d$, cela revient à intégrer en coordonnées polaires :

$$\int d^d p\ f(p) = v_d \int_0^\infty dr\ r^{d-1} f(r),$$

où $v_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ est le $(d-1)$-volume de la sphère unité, de sorte qu'on ait $\int d^d x\ e^{-x^2} = \pi^{d/2}$. Le résultat est une fonction méromorphe de d.

La régularisation dimensionnelle peut être effectuée pour les intégrales de Feynman. Elle conduit pour chacune à une distribution $U_\Gamma = U_\Gamma(p, \mu, d)$ des moments extérieurs, qui dépend du paramètre μ et, de façon méromorphe, de la dimension d, avec un pôle pour $d = D$ (en général multiple, mais d'ordre fini ; ici $D = 6$; il peut y avoir d'autres pôles en dehors de D).

Remarque 2.1. — Les valeurs (renormalisées) des intégrales de Feynman sont intéressantes pour elles-mêmes : en dehors de puissances de π, on trouve (entre autres) des combinaisons rationnelles de $\zeta(3), \zeta(5), \ldots$ et plus généralement de nombres multizêtas dont le degré de complexité (poids, profondeur) est lié à la topologie du diagramme ; mais ceci est une autre histoire.

3. ALGÈBRE DE HOPF DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN

3.1. Diagrammes habillés et coproduit

Dans la théorie ϕ^3, les diagrammes utiles (nous dirons « admissibles ») sont réunion disjointe de diagrammes « simples », i.e. connexes, et qui restent connexes si on leur enlève une arête (le sigle des physiciens est 1PI = irréductibles à une particule) ; comme pour les groupes, on compte que les objets de la fig. (3), les plus « simples », ne le sont pas.

Pour fabriquer des nombres à partir des diagrammes et des intégrales de Feynman, et surtout pour décrire la règle de réinsertion de diagrammes pour le calcul de ces intégrales par itération d'intégrations partielles, il convient de les « habiller ». Un diagramme « habillé » est une combinaison de diagrammes admissibles :

$$\sum \sigma_\Gamma \otimes \Gamma,$$

où chaque coefficient σ_Γ est une distribution sur l'espace E_Γ des moments extérieurs p_e (indexés par les N arêtes extérieures, et liés par la relation de conservation $\sum p_e = 0$, de sorte que E_Γ est de dimension $(N-1)d$).[5]

[5] L'espace des coefficients distribution n'est pas précisé et cela n'a guère d'importance ; on peut se limiter à des distributions invariantes par le groupe de Lorentz, et il faut en outre qu'on puisse

Les diagrammes admissibles, habillés ou non, forment une algèbre commutative graduée $\mathcal{H}$: la loi de produit est la somme disjointe, et $\otimes$ pour les coefficients, l'unité est le diagramme vide (affecté du coefficient 1). La graduation est définie par le nombre de boucles $L = I + V - C = \dim H^1(\Gamma)$, voir ci-dessous § 3.2.

Connes et Kreimer définissent sur $\mathcal{H}$ une structure d'algèbre de Hopf au moyen du coproduit

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma, \iota} \gamma_{(\iota)} \otimes \Gamma/\gamma_{(\iota)}. \tag{5}$$

Dans cette somme, γ désigne un diagramme admissible non vide, inséré dans Γ, dont les composantes ont deux ou trois pattes : les ensembles de sommets des composantes de γ dans Γ sont deux à deux disjoints, seules des arêtes extérieures peuvent être communes.

ι est une collection de signes 0 ou 1 indexée par les composantes à deux pattes.

Le deuxième facteur, $\Gamma/\gamma_{(\iota)}$ s'obtient en contractant en un point chaque composante α, et en l'affectant de la couleur $\iota(\alpha)$ (0 ou 1) s'il s'agit d'une composante à deux pattes.

Dans le premier facteur les composantes de $\gamma_{(\iota)}$ ont deux ou trois pattes, et un habit fixé par ι : $\sigma_0 \otimes \gamma_\alpha$ si γ_α est une composante à trois pattes, ou deux pattes et la couleur est $\iota(\alpha) = 0$, $\sigma_1 \otimes \gamma_\alpha$ si γ_α a deux pattes et la couleur correspondante est 1. Les distributions $\sigma_{0,1}$ sont choisies de sorte que $\sigma_0(am^2 + bp^2) = a$, $\sigma_1(am^2 + bp^2) = b$ [6].

THÉORÈME 3.1. — *Muni du coproduit Δ ci-dessus, $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf.*

Ce théorème est démontré en détail dans [CK1] et nous ne reproduisons pas ici la démonstration. En fait, il correspond à l'idée naturelle qu'on peut dans les intégrales (4) faire des intégrations partielles par paquets sur des sous-diagrammes (pourvu que ceux-ci restent admissibles), et itérer cette opération autant de fois qu'on veut. Il y a une complication mineure venant du fait que, pour les diagrammes à deux pattes, la règle de réinsertion dépend de la couleur du diagramme qu'on réinsert.

3.2. Graduation

Un poids multiplicatif sur $\mathcal{H}$ (valuation) est une fonction w à valeurs entières telle que

$$w(fg) = w(f) + w(g).$$

---

appliquer le procédé de régularisation dimensionnelle, pour pouvoir faire varier d continûment autour de $D = 6$ en contournant le pôle.

[6] L'article [CK1] dit plutôt que $\gamma_{(0)}$ est le diagramme γ affecté de moments extérieurs nuls, et $\gamma_{(1)} = \frac{\partial}{\partial p^2}\gamma|_{p=0}$: j'espère avoir interprété correctement. Il faut modifier cette règle dans le cas limite $m = 0$.

Il est complètement défini par ses valeurs sur les diagrammes simples puisque $\mathcal{H}$ est l'algèbre de polynômes engendrée par ceux-ci. Nous nous intéressons plus particulièrement à ceux qui respectent le coproduit : $w(\Delta f) = w(f)$: les plus évidents sont

$$I(\Gamma) = \quad I \quad = \text{ le nombre d'arêtes intérieures de } \Gamma$$
$$v(\Gamma) = \quad V - C \quad = \text{ le nombre de sommets } - \text{ le nombre de composantes.}$$

DÉFINITION 3.2. — *La graduation canonique de $\mathcal{H}$ est définie par $L(\Gamma) = I - V + C = \dim H^1(\Gamma)$. Pour cette graduation $\mathcal{H}$ est connexe, i.e. $\mathcal{H}^0$ est le corps des constantes (**C** ou n'importe quel corps de caractéristique 0).*

L'assertion résulte de ce que, par définition, on a $\dim H^1(\Gamma) > 0$ si Γ est non vide.

On note $\mathcal{H}_+$ l'idéal des éléments de degré > 0.Il est immédiat qu'on a

$$\Delta(X) - X \otimes 1 - 1 \otimes X \in \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_+ \quad \text{si} \quad X \in \mathcal{H}_+.$$

Un autre poids de bigèbre utile est

$$\omega(\Gamma) = V_3 - N + 2, \tag{6}$$

où V_3 est le nombre de sommets à trois pattes, N le nombre d'arêtes extérieures.

3.3. Groupe dual

Le dual gradué $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ (ou plutôt un prédual) est l'espace des $\sum \varphi_\Gamma \Gamma$ où pour chaque Γ le coefficient φ_Γ parcourt un espace de fonctions test $\mathcal{S}(E_\Gamma)$. C'est une algèbre de Hopf graduée, cocommutative, mais non commutative. On notera $\widehat{\mathcal{A}}$ le complété.

Un élément $x \in \widehat{\mathcal{A}}$ est de type groupe, resp. de type Lie (primitif) si

$$\Delta_{\mathcal{A}} x = x \otimes x \quad \text{resp.} \quad \Delta_{\mathcal{A}} x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

(rappelons que le coproduit $\Delta_{\mathcal{A}}$ est dual du produit de $\mathcal{H}$). Les éléments de type groupe sont les caractères de $\mathcal{H}$; ils forment un groupe G_F gradué pronilpotent, dont l'algèbre de Lie est constituée des éléments de type Lie.

4. RENORMALISATION

4.1. Lacet fondamental

À chaque diagramme de Feynman Γ est donc associée une distribution $U_\Gamma(\mu, d)$. Dans cette théorie, il est essentiel de ne renormaliser que des nombres purs (quantités « sans dimension »).

La dimension $\dim \Gamma$ de la distribution U_Γ résulte des règles $I_1, \ldots, I_5$ ci-dessus. Pour un diagramme simple (1PI), compte tenu des relations de conservation de moment (on intègre sur un espace de dimension Ld), de la définition $L = I - V + 1$ et de la relation de comptage élémentaire $3V_3 + 2V_2 = 2I + N$ obtenue en énumérant par

sommets ou par arêtes les couples (• —) constitués d'une arête et un de ses sommets (demi-arête), on obtient :

$$\begin{aligned}\dim \Gamma &= \dim \prod \frac{d^d p_i}{p_i^2 + m^2} \prod_{V_3} g\mu^{3-d/2} \prod_{V_2} (m^2 \text{ ou } p^2) \\ &= Ld - 2I + V_3(3 - \frac{d}{2}) + 2V_2 = (1 - \frac{N}{2})d + N.\end{aligned} \tag{7}$$

Noter que l'exposant de g est $V_3 = \omega(\Gamma) + N - 2$.

À chaque diagramme habillé $\varphi \otimes \Gamma$ on associe alors un nombre sans dimension, dépendant de μ et de d (d voisin de 6, $d \neq 6$) :

$$\langle \gamma_\mu(d), \varphi \otimes \Gamma \rangle = g^{2-N} \mu^{-B} U(\Gamma) = \langle \varphi, U_\Gamma \rangle \tag{8}$$

avec $B = (1 - \frac{N}{2})d + N$.[7]

On a ainsi défini un lacet $\gamma = \gamma_\mu(d)$ ou $\gamma(\mu, d)$ (méromorphe en d, dépendant de μ) autour de $d = D = 6$, à valeurs dans $G_F \subset \mathcal{A}$ (il s'agit évidemment d'un caractère de $\mathcal{H}$).

On pose $d = D - \varepsilon$ et on note $\mathcal{B}$ le complété, pour la graduation L, de $\mathcal{A}[1/\varepsilon, \varepsilon]]$, dont γ est un élément.

Il est clair que tout élément $\varphi = \sum \varphi_j \varepsilon^j \in \mathcal{B}$ se décompose additivement $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ avec $\varphi_+ = \sum_{j \geqslant 0} \varphi_j \varepsilon^j$, $\varphi_- = -\sum_{j<0} \varphi_j \varepsilon^j$ ($\varphi_\pm$ est holomorphe en ε resp. $1/\varepsilon$; ce sont les parties positive et négative d'une série de Laurent).

De même tout élément inversible $f \in 1 + \mathcal{B}_+$ (i.e. le terme de plus bas degré pour la graduation est $f^0 = 1$) admet une unique factorisation

$$f = f_-^{-1} f_+ ,$$

où de nouveau $f_\pm$ est holomorphe en ε, resp. $1/\varepsilon$, le terme de plus bas degré est 1, et $f_- = 1$ pour $1/\varepsilon = 0$ (factorisation de Wiener-Hopf, qui est liée à la classification des fibrés sur la sphère de Riemann, et au problème de Riemann-Hilbert, mais immédiate ici dans une algèbre filtrée complète). L'unicité de la factorisation assure que f_+ et f_- sont de type groupe si f l'est, de même que, dans la version infinitésimale additive, φ_+ et φ_- sont de type Lie si φ l'est.

Le résultat principal de [CK1] est le suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Le lacet renormalisé γ_{renorm} est la valeur pour $d = D$ ($\varepsilon = 0$) du facteur γ_+ dans la factorisation de Wiener-Hopf $\gamma = \gamma_-^{-1}\gamma_+$.*

Une quantité observable se réinterprète comme série à coefficients dans $\mathcal{H}$ ou, ce qui revient au même, comme fonction $F(\gamma)$ sur le groupe G_F :

[7] Il est parfois utile de prolonger cette définition au cas où l'habit φ est dimensionné : on remplace alors par $B = (1 - \frac{N}{2})d + N + \dim \varphi$.

SCHOLIE. — *La quantité effective renormalisée (resp. effective non renormalisée, nue) s'obtient en substituant $\gamma_{\mu+}(\varepsilon)$ resp. $\gamma_\mu(\varepsilon), \gamma_{\mu-}$ dans son expression en fonction de γ. La valeur renormalisée est la valeur en $\gamma_{\mu+}$ pour $\varepsilon = 0$.*

(Cette dernière dépend encore de l'unité de masse μ, i.e. de l'échelle d'observation).

Ce théorème regroupe de façon concise et élégante toutes les règles de la renormalisation par régularisation dimensionnelle. Il est démontré dans [CK1]. Il n'est pas question de le démontrer ici, ne serait-ce que parce qu'il faudrait d'abord décrire les règles en question.

Rappelons que la régularisation dimensionnelle est essentiellement équivalente aux autres procédés de régularisation, par exemple par troncature, du moins pour les intégrales de dimension finie ; elle n'est pas définie pour les intégrales de dimension infinie (qui ne le sont guère non plus), et ne s'applique donc qu'à la théorie perturbative.

4.2. Groupe de renormalisation

La L-graduation et l'unité de masse sont liées de façon étroite en vertu des règles ci-dessus. De façon plus précise, notons (comme dans [CK2]) Y l'opérateur de la graduation L : ($Y \sum f_n = \sum n f_n$ si f_n est de degré n). C'est une dérivation (automorphisme infinitésimal) de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{A}$, i.e. à la fois pour le produit et le coproduit.

PROPOSITION 4.2. — *On a $e^{t\varepsilon Y}\gamma(\varepsilon, \mu) = \gamma(\varepsilon, e^t\mu)$.*

La graduation et les exposants de μ ont été choisis de sorte que cela soit évident. Le groupe de renormalisation est le groupe à 1 paramètre $e^{t\varepsilon Y}$.

4.3. Contreterme, fonction β

Le résultat suivant résulte simplement des règles $I_1 - I_5$ pour les intégrales de Feynman et est démontré dans [CK2]. En fait, il s'agit plutôt d'un axiome pour la renormalisation, et il faut s'assurer qu'on a fait les bons choix pour μ :

THÉORÈME 4.3. — *Dans la factorisation $\gamma = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ le facteur γ_- est indépendant de μ.*

Il est alors important d'analyser quels sont les contretermes γ_- possibles. L'inverse $\varphi(1/\varepsilon) = \gamma_-^{-1}$ a la propriété suivante : son terme de degré 0 est 1, il est de type groupe, et on a

$$e^{t\varepsilon Y}(\varphi) = \varphi F_t(\varepsilon), \tag{9}$$

où $F_t \in \mathcal{A}[[\varepsilon]]$ est holomorphe en ε. F_t vérifie évidemment la condition de cocycle

$$F_{t+s} = F_t \; e^{t\varepsilon Y}(F_s) \; .$$

En particulier, pour $\varepsilon = 0$, il définit un groupe à un paramètre

$$F_t|_{\varepsilon=0} = e^{\beta t} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathcal{A}_+. \tag{10}$$

L'élément primitif $\beta \in \mathcal{A}_+$ est le « résidu » de la théorie.

Dérivant (9) pour $t = 0$ on obtient $\varepsilon\varphi^{-1} \cdot Y\varphi = \frac{d}{dt} F_t(\varepsilon)|_{t=0}$. Le premier membre de cette égalité est holomorphe en $1/\varepsilon$, le second en ε, donc les deux sont constants et égaux à β :

$$Y\varphi = \varphi \frac{\beta}{\varepsilon}. \tag{11}$$

PROPOSITION 4.4. — *Soient $\mathcal{C}$ le complété pour la graduation L de $\mathcal{A}[1/\varepsilon]$, et $\alpha \in \mathcal{C}_+$; alors l'équation $Y\varphi = \varphi\alpha$ admet pour unique solution $\varphi \in 1 + \mathcal{C}_+$ la série*

$$\varphi = (1 - Y^{-1}R_\alpha)^{-1}(1) \tag{12}$$

où R_α désigne la multiplication à droite par α. Alors φ est de type groupe ssi α est de type Lie.

Preuve : Y est inversible sur $\mathcal{C}_+$; l'équation équivaut donc à

$$Y(1 - Y^{-1}R_\alpha)\varphi = 0, \quad \text{i.e.} \quad (1 - Y^{-1}R_\alpha)\varphi = \text{constante} = 1$$

puisque le terme de degré 0 de φ est 1. On a alors aussi

$$Y(\varphi \otimes \varphi) = (\varphi \otimes \varphi)(\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha), \quad Y(\Delta\varphi) = \Delta\varphi.\Delta\alpha,$$

donc $\Delta\varphi = \varphi \otimes \varphi$ ssi $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

Ainsi, les contretermes possibles dans une théorie de renormalisation comme ci-dessus sont de la forme $(1 - Y^{-1}R_\alpha)^{-1}(1)$, avec $\alpha = \beta/\varepsilon$, $\beta \in \mathcal{A}_+$ de type Lie.

Dans [CK2] on trouve la description suivante du contreterme : adjoignons à $\mathcal{A}$ un nouvel élément Z_0 avec la relation $\operatorname{ad} Z_0 = Y$. On a alors $Z_0\varphi = \varphi(Z_0 + \beta/\varepsilon)$ d'où $e^{tZ_0}\varphi = \varphi e^{t(Z_0+\beta/\varepsilon)}$. Compte tenu que $e^{-tZ_0}\varphi e^{tZ_0} = e^{-tY}(\varphi) = \sum e^{-nt}\varphi_n \to 1$ pour $t \to \infty$, on obtient :

$$\varphi = e^{-tY}(\varphi)\, e^{-tZ_0} e^{t(Z_0+\beta/\varepsilon)} = \lim_{t\to\infty} e^{-tZ_0} e^{t(Z_0+\beta/\varepsilon)}. \tag{13}$$

L'élément $\beta \in \mathcal{A}$ qui apparaît dans la théorie est étroitement lié à la « fonction β » des physiciens.

5. CONSTANTE DE STRUCTURE ET FORMULES UNIVERSELLES.

5.1. Diagrammes réduits (cas $m = 0$)

Dans ce dernier numéro, on se limite à des diagrammes réduits correspondant au cas $m = 0$. Dans ce cas limite, on peut effacer tous les sommets de type 2 : ceux de couleur 0 produisent un facteur $m^2 = 0$, donc ne contribuent plus du tout, et ceux de couleur 1 produisent un facteur p^2 qui neutralise le facteur $\frac{1}{p^2+m^2}$ d'une des arêtes adjacentes, donc on peut aussi les effacer. La règle de réinsertion définissant le coproduit doit être modifiée : elle reste la même pour les diagrammes à trois pattes,

mais les diagrammes à deux pattes sont réinsérés au milieu de n'importe quelle arête intérieure. On peut en outre oublier les habits puisqu'il ne reste qu'une couleur et un habit pour la réinsertion des diagrammes à deux pattes.

Notons $\mathcal{H}_r$ et G_r l'algèbre de Hopf et le groupe correspondants (ce sont respectivement une sous-algèbre de $\mathcal{H}$ et un quotient de G_F).

On repère les éléments primitifs de $\mathcal{H}_r^*$ comme suit : à tout diagramme simple Γ on associe l'élément

$$\underline{\Gamma} = S(\Gamma)\ p\Gamma \in \mathcal{H}^*, \tag{14}$$

où $S(\Gamma)$ est le nombre d'automorphismes de Γ et p désigne le projecteur canonique sur les éléments primitifs (si $x \in \mathcal{H}_+$, px est l'unique élément primitif égal à x mod. $\mathcal{H}_+^{*2}$). Suivant F. Patras [Pat1, Pat2] p se calcule ainsi : si $a, b \in L(\mathcal{H}^*)$, on pose $a * b = M \circ (a \otimes b) \circ \Delta$ (où $M : \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ est la multiplication) ; il s'agit d'un produit associatif, qui prolonge celui de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$, et pour lequel l'unité est le projecteur p_0 sur le corps de base (la counité) ; on a $\mathrm{Id} = p_0 + p_+$ où p_+ est le projecteur sur l'idéal des éléments de degré > 0 de $\mathcal{H}^*$. On a alors $p = \mathrm{Log}^* \mathrm{Id} = \sum \frac{(-1)}{k}^{k-1} p_+^{*k}$.

Les $\underline{\Gamma}$ forment une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_r \subset \mathcal{H}_r^*$, et la règle de réinsertion définissant le coproduit donne

$$[\underline{\Gamma}, \underline{\Gamma'}] = \sum_{v'} \underline{\Gamma' \circ^{v'} \Gamma} - \sum_{v} \underline{\Gamma \circ^{v} \Gamma'}\ , \tag{15}$$

où v' resp. v parcourt l'ensemble des sommets (resp. lignes pour les diagrammes à deux pattes) et $\circ^v$ signifie qu'on greffe le diagramme de gauche à la v-ième place du diagramme de droite.

Pour un diagramme simple et réduit à N pattes, on a $V = 2(L-1) + N$, $\quad I = 3(L-1) + N$. Observons qu'il y a (à un isomorphisme près) un seul diagramme simple $\Gamma_{2,L}$ à deux pattes de degré L, resp. $\Gamma_{3,L}$ à trois pattes, et pour ceux-ci on a $I = 3L-1, V = 2L$, resp. $I = 3L, V = 2L+1$; en outre, le degré du diagramme greffé $\Gamma \circ^v \Gamma'$ est toujours $L + L'$.

On obtient donc pour les crochets de diagrammes simples à 2 ou 3 pattes :

$$\begin{aligned}
[\underline{\Gamma}_{2,L}, \underline{\Gamma}_{2,L'}] &= 3(L' - L)\ \underline{\Gamma}_{2,L+L'} \\
[\underline{\Gamma}_{3,L}, \underline{\Gamma}_{3,L'}] &= 2(L' - L)\ \underline{\Gamma}_{3,L+L'} \\
[\underline{\Gamma}_{3,L}, \underline{\Gamma}_{2,L'}] &= 3L'\ \underline{\Gamma}_{3,L+L'} - 2L\ \underline{\Gamma}_{2,L+L'}.
\end{aligned} \tag{16}$$

5.2. Groupe des difféomorphismes formels de la droite

Notons G_2 le groupe des difféomorphismes formels tangents à l'identité sur la droite :

$$\varphi = X + \sum_{2}^{\infty} a_n X^n.$$

Son algèbre de Hopf $\mathcal{H}_2$ est l'algèbre des polynômes en les $a_n = a_n(\varphi)$; si T désigne la série de Taylor $X + \sum a_n X^n$ ($T_\varphi = \langle T, \varphi \rangle$) $= \varphi(X)$, le coproduit est défini par

$$\langle \Delta T, \varphi \otimes \psi \rangle = T_\varphi \circ T_\psi.$$

C'est un groupe gradué, la graduation correspondant à l'action du groupe des homothéties (a_n est de degré $n-1$). Son algèbre de Lie admet pour base graduée les champs de vecteurs

$$Z'_k = X^{k+1} \frac{\partial}{\partial X}.$$

Z_k est de degré k et on a

$$[Z'_p, Z'_q] = (p-q) Z'_{p+q}. \tag{17}$$

Les formules de crochet (16) impliquent :

PROPOSITION 5.1. — *Posons $\rho_\Gamma = 1$ si Γ a trois pattes, $\rho_\Gamma = 3/2$ s'il en a deux ; il existe un unique homomorphisme ρ d'algèbres de Lie ou de groupes formels $G_r \to G_2$ tel que*

$$\rho(\underline{\Gamma}) = \rho_\Gamma Z'_{2L} \quad (L = L(\Gamma)). \tag{18}$$

5.3. Constante de couplage et difféomorphismes

La renormalisation a pour effet de remplacer les quantités observables par des séries de diagrammes (dépendant de ε et μ) ; en particulier, à la constante de couplage g est associée la série génératrice

$$g_0 = X + \sum_2^\infty \alpha_n X^n = (gZ_1)(Z_3)^{-3/2} \quad \text{(série impaire)} \tag{19}$$

avec

$$gZ_1 = \Big(X + \sum_{\Gamma \in F_3} X^{2L+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\Big) \quad Z_3 = \Big((1 - \sum_{\Gamma \in F_2} X^{2L} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\Big) \tag{20}$$

où F_2 resp. F_3 désigne l'ensemble des diagrammes simples et réduits à deux resp. trois pattes ($2L$, resp. $2L+1$ est l'exposant de g dans ces diagrammes) ; $S(\Gamma)$ est le nombre d'automorphismes de Γ.

La série génératrice g_0 définit une fonction $\Phi^* : G_r \to G_2$: si $m \in G_r$, $\Phi^*(m) = \varphi(X)$ est l'évaluation en m de la série $g_0(X)$ (de façon duale : un homomorphisme d'algèbres $\Phi : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_r$ qui envoie a_n sur le coefficient α_n).

THÉORÈME 5.2. — *La fonction $\Phi^* : G_F \to G_2$ définie par la série génératrice g_0 est un homomorphisme de groupes (de façon duale : Φ est un homomorphisme d'algèbres de Hopf).*

En fait, Connes et Kreimer montrent qu'on a $\Phi^* = \rho$, en prouvant que les deux transportent de la même façon le champ de vecteurs invariant à droite ∂_Z associé à un élément primitif $Z \in \mathcal{H}_r$ ($\partial_Z a = \langle Z \otimes \mathrm{Id}, \Delta a \rangle$; il suffit de vérifier ceci quand Z parcourt l'ensemble des éléments basiques $\underline{\Gamma}$).

5.4. Remarques finales

L'homomorphisme ρ défini précédemment est compatible avec les graduations (plus exactement, il est homogène de degré 2) puisque a_{n+1} et $X^{n+1}\partial/\partial X$ sont de degré n). Le paramètre g est essentiellement reflété dans la graduation, car on a, élémentairement, en remettant dans la notation le paramètre g qui n'y figurait pas : $\gamma_{\mu,g}(\varepsilon) = e^{2tY}\gamma_{\mu,1}(\varepsilon)$.

On montre que l'image $\rho(\beta)$ de l'élément générateur β du n° 4.3 est exactement la « fonction » β des physiciens, d'où la notation.

Le théorème 5.2 implique que la renormalisation pour g_{eff} se lit directement dans la factorisation $g_{\mathrm{eff}} = g_{\mathrm{eff}-}^{-1} g_{\mathrm{eff}+}$ dans le groupe G_2, et G_r n'intervient plus. En ce sens G_2 apparaît comme groupe universel pour ces calculs, et on peut imaginer qu'un groupe des difféomorphismes à plusieurs variables intervient de même pour une théorie de champ vectorielle.

Le lacet universel $\gamma_\mu(d)$ définit, par recollement via g_{eff} un fibré P sur la droite projective P_1, de fibre la droite formelle X. Ici, comme probablement dans toute théorie perturbative, le lacet se factorise et ce fibré est trivialisable ; on peut imaginer que dans une théorie non perturbative, comme dans le problème de Riemann-Hilbert non nilpotent, interviendront de tels fibrés non triviaux.

RÉFÉRENCES

[CK1] A. Connes & D. Kreimer – « Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem », *Comm. Math. Phys.* **210** (2000), no. 1, p. 249–273.

[CK2] ———, « Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II : the β-function, diffeomorphisms and the renormalization group », *Comm. Math. Phys.* **216** (2001), no. 1, p. 215–241.

[BK1] D.J. Broadhurst & D. Kreimer – « Knots and numbers in ϕ^4 theory to 7 loops and beyond », *Internat. J. Modern Phys. C* **6** (1995), no. 4, p. 519–524.

[BK2] ———, « Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops », *Phys. Lett. B* **393** (1997), no. 3-4, p. 403–412.

[BK3] D.J. Broadhurst, J.A. Gracey & D. Kreimer – « Beyond the triangle and uniqueness relations : non-zeta counterterms at large N from positive knots », *Z. Phys. C* **75** (1997), no. 3, p. 559–574.

[BK4] D.J. BROADHURST & D. KREIMER – « Feynman diagrams as a weight system : four-loop test of a four-term relation », *Phys. Lett. B* **426** (1998), no. 3-4, p. 339–346.

[BK5] ———, « Renormalization automated by Hopf algebra », *J. Symbolic Comput.* **27** (1999), no. 6, p. 581–600, and `hep-th/9810087`.

[BK6] ———, « Combinatoric explosion of renormalization tamed by Hopf algebra : 30-loop Padé-Borel resummation », *Phys. Lett. B* **475** (2000), no. 1-2, p. 63–70, and `hep-th/9912093`.

[BK7] ———, « Towards cohomology of renormalization : bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees », *Comm. Math. Phys.* **215** (2000), no. 1, p. 217–236.

[CK3] A. CONNES & D. KREIMER – « Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry », *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), no. 1, p. 203–242.

[CK4] ———, « Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry », in *Quantum field theory : perspective and prospective (Les Houches 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 530, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, p. 59–108.

[CK5] ———, « Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem », *J. High Energy Phys.* (1999), no. 9, p. Paper 24, 8 pp., (electronic) and `hep-th/9909126`.

[CK6] ———, « Lessons from quantum field theory : Hopf algebras and spacetime geometries, Moshé Flato (1937-1998) », *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 1, p. 85–96, and `hep-th/9904044`.

[CK7] ———, « From local perturbation theory to Hopf- and Lie-algebras of Feynman graphs », in *Mathematical physics in mathematics and physics (Siena, 2000)*, Fields Inst. Commun., vol. 30, Amer. Math. Soc., 2001, p. 105–114.

[DK] R. DELBOURGO & D. KREIMER – « Using the Hopf algebra structure of QFT in calculations », *Phys. Rev. D (3)* **60** (1999), no. 10, and `hep-th/9903249`.

[K1] D. KREIMER – « Renormalization and knot theory », *J. Knot Theory and Ramifications* **6** (1997), no. 4, p. 479–581.

[K2] ———, « On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories », *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), no. 2, p. 303–334.

[K3] ———, « On overlapping divergences », *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), no. 3, p. 669–689, and `hep-th/9810022`.

[K4] ———, « Chen's iterated integral represents the operator product expansion », *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999), no. 3, and `hep-th/9901099`.

[K5] ———, *Knots and Feynman diagrams*, Cambridge Lecture Notes in Physics, vol. 13, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[K6] ———, « Shuffling quantum field theory », *Lett. Math. Phys.* **51** (2000), no. 3, p. 179–191.

Renormalisation

[Coll] J. COLLINS – *Renormalization,*, Cambridge monographs in math. phys., Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[Dres] M. DRESDEN – « Renormalization in historical perspective – The first stage », in *Renormalization*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[Drou] J.-M. DROUFFE & C. ITZYKSON – *Théorie statistique des champs*, Savoirs actuels, InterEditions/Editions du C.N.R.S., 1989, 2 volumes.

[EG] H. EPSTEIN & V. GLASER – « The role of locality in perturbation theory », *Ann. Inst. H. Poincaré A* **19** (1973), p. 211–295.

[FMRS] J. FELDMAN, J. MAGNEN, V. RIVASSEAU & R. SENEOR – « Massive Gross-Neveu model : a rigorous perturbative construction », *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985).

[GK] K. GAWEDSKI & A. KUPIANEN – « Exact renormalization of the Gross-Neveu model of quantum fields », *Phys. Rev. Lett* **54** (1985).

[GJ] J. GLIMM & A. JAFFE – *Quantum Physics*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987.

[LeBe] M. LE BELLAC – *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, Savoirs actuels, InterEditions/Editions du C.N.R.S., 1988.

[ZJ] J. ZINN-JUSTIN – *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International series of monographies on physics, vol. 92, Oxford science publications, 1996.

Wiener-Hopf, Riemann-Hilbert, algèbres de Hopf

[Beau] A. BEAUVILLE – « Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann », in *Sém. Bourbaki*, Astérisque, vol. 216, Soc. Math. France, Paris, 1993, exp. n° 765 (mars 1993), p. 103–119.

[Boli] A. BOLIBRUCH – « Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem », Lecture Notes in Math., vol. 1250, Springer, 1992, p. 139–155.

[BKI] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres* 1 *à* 3, Masson, Paris, 1982.

[ENS] L. BOUTET DE MONVEL, A. DOUADY & J.-L. VERDIER (éds.) – *Mathématique et Physique, Séminaire de l'E.N.S. 1979-82*, Progress in Math., vol. 35, Birkhäuser, 1983.

[Drin] V.G. DRINFEL'D – « Almost cocommutative Hopf algebras », *Algebra i Analiz* **1** (1989), no. 2, p. 30–46, and translation in *Leningrad Math. J.* **1** (1990), no. 2, p. 321-342.

[WH] I. GOHBERG & M.A. KAASHOEK (éds.) – *Constructive methods of Wiener-Hopf factorization*, Operator Theory : Advances and Applications, vol. 21, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[LP] I. LAPPO-DANILEVSKII – *Mémoire sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires*, Chelsea, New York, 1953.

[Pat1] F. PATRAS & C. REUTENAUER – « Higher Lie idempotents », *J. Algebra* **222** (1999), no. 1, p. 51–64.

[Pat2] F. PATRAS – « La décomposition en poids des algèbres de Hopf », *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), no. 4, p. 1067–1087.

[Spe] F.-O. SPECK – *General Wiener-Hopf factorization methods*, vol. 119, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985, With a foreword by E. Meister.

Général

[BCE] J. BRODZKI, A. CONNES & D. ELLWOOD – « Polarized modules and Fredholm modules », *Mat. Fiz. Anal. Geom.* **2** (1995), no. 1, p. 15–24.

[C1] A. CONNES – *Noncommutative geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994, 661 pp.

[C2] ———, « Non-commutative geometry and physics », in *Gravitation et quantifications (Les Houches, 1992)*, North-Holland, Amsterdam, 1995, p. 805–950.

[C3] ———, « Géométrie non commutative et physique quantique », in *Mathématiques quantiques*, SMF Journ. Annu., Soc. Math. France, Paris, 1992, 20 pp.

[C4] ———, « The action functional in noncommutative geometry », *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), no. 4, p. 673–683.

[CM] A. CONNES & H. MOSCOVICI – « Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem », *Comm. Math. Phys.* **198** (1998), no. 1, p. 199–246.

[CS] A. CONNES & E. STØRMER – « A connection between the classical and the quantum mechanical entropies », in *Operator algebras and group representations (Neptun, 1980)*, vol. I, Monographs Stud. Math., vol. 17, Pitman, Boston, Mass.-London, 1984, p. 113–123.

Louis BOUTET de MONVEL

Université de Paris VI, analyse algébrique
Institut de Math. de Jussieu
UMR 7586 du CNRS
Case 82, 4 place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
E-mail : `boutet@math.jussieu.fr`