Astérisque

PIERRE VAN MOERBEKE

Algèbres $\mathcal{W}$ et équations non-linéaires

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 839, p. 105-129

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__105_0>

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
50ème année, 1997-98, n° 839

Novembre 1997

ALGÈBRES $\mathcal{W}$ ET ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

par **Pierre VAN MOERBEKE**

Les $\mathcal{W}$-algèbres trouvent leur origine en théorie quantique des champs (en dimension 2), possédant des symétries conformes. Donc il n'est guère étonnant que le groupe des difféomorphismes joue un rôle important, en particulier les difféomorphismes du cercle et son algèbre, engendrée par $z^{n+1}\,\partial/\partial z$. L'algèbre de Virasoro W_2, qui est son extension centrale, apparaît naturellement dans l'*operator product expansion* $T(z)T(w)$ du tenseur stress-énergie $T(z)$, exprimé en séries de Fourier; du côté mathématique, cette algèbre remonte à Gel'fand et Fuks [28].

Encore dans le cadre de la théorie conforme des champs, Zamolodchikov [53] découvre l'algèbre W_3, engendrée par $T(z)$ et un courant $W(z)$, primaire de spin 3 par rapport à $T(z)$. Indépendamment, Gervais [29] démontra que l'algèbre des fonctions pour la seconde structure symplectique de l'équation de Korteweg-de Vries est équivalente à l'algèbre de Virasoro; l'équation KdV est la réduction de l'équation KP aux opérateurs différentiels d'ordre 2. Ce même lien étroit fut établi entre la 3-réduction de l'équation KP et l'algèbre W_3 par Fateev et Lukyanov [22]. Voir [13] et [23] pour de bons exposés en la matière.

Indépendamment de tout ceci, la théorie intégrable, relancée au début des années 70 après un long sommeil, reconnut le caractère hamiltonien de l'équation KdV par rapport à une structure symplectique [26, 52]. Ensuite Lenart construisit les autres équations de la hiérarchie, de façon inductive, à l'aide d'un certain opérateur différentiel anti-symétrique, que Magri [37] reconnut comme étant une seconde structure symplectique; il montra que toutes les combinaisons linéaires de ces deux structures sont symplectiques. Ces deux structures sont responsables de l'existence de nombreux invariants en involution. Adler [1] montra que la première structure apparaît dans le cadre des orbites coadjointes et il exhiba la seconde structure pour les p-réductions de l'équation KP, ce qui fut démontré par Gel'fand et Dickey [27]. Dans [2], nous montrions que la structure symplectique d'un très grand nombre d'équations de la théorie intégrable apparaît dans le cadre des orbites coadjointes des algèbres de Kac-Moody.

L'auteur a bénéficié du soutien de la National Science Foundation (# DMS-9503246), de l'OTAN, du FNRS et de la Fondation Francqui.

Cet exposé contient deux parties relativement distinctes: dans la première, je compte aborder certains aspects des algèbres $\mathcal{W}_n$; elles sont définies comme l'algèbre des fonctions pour la seconde structure symplectique de la n-réduction de l'équation KP. Le cours de Dickey [17] à Cortona contient un excellent exposé en la matière. En vue d'initier le lecteur au formalisme, il sera nécessaire de faire un exposé rapide sur la première structure. Les difféomorphismes qui conservent la nature des opérateurs différentiels sont des champs de vecteurs hamiltoniens naturels pour la seconde structure symplectique.

Dans la seconde partie, il s'agira de l'algèbre w_∞ des opérateurs différentiels réguliers de $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ et de son extension centrale $\mathcal{W}_\infty$. L'algèbre w_∞ engendre des déformations naturelles des opérateurs pseudo-différentiels, tout comme la hiérarchie KP. En vue des représentations de son extension centrale $\mathcal{W}_\infty$ de charge centrale $c = 1$, il sera nécessaire d'introduire l'opérateur vertex, en réalité une transformée de Darboux déguisée. La représentation agit de façon naturelle sur la fonction τ associée au système intégrable. L'intérêt de ces algèbres se situe également au niveau des nombreuses applications aux modèles matriciels, ainsi qu'au spectre des matrices stochastiques. La section 3 sera consacré à ces questions.

Les $\mathcal{W}_\infty$-algèbres sont à la croisée de nombreuses idées mathématiques et physiques; elles portent la marque de grandes mathématiques!

1. ALGÈBRES $\mathcal{W}_n$

1.1. Une structure symplectique sur l'algèbre des opérateurs différentiels

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ des opérateurs pseudo-différentiels L à coefficients holomorphes et la décomposition usuelle en deux sous-algèbres de Lie (opérateurs strictement pseudo-différentiels et différentiels)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \mathcal{D}_- + \mathcal{D}_+ \\
&= \{Y = \sum_{i>0} a_{-i}(x)D^{-i}\} \oplus \{X = \sum_{i\geq 0} a_i(x)D^i, \text{ somme finie}\}, \text{ où } D = \tfrac{\partial}{\partial x} \\
&= \{Y = D^{-1}b_0 + D^{-2}b_1 + \dots\} \oplus \{X = \sum_{i\geq 0} a_i D^i, \text{ somme finie}\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ est également une algèbre associative pour la multiplication standard

$$L \cdot L' = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} : \partial_D^k(L) \cdot \partial_x^k(L') : \ .$$

Il existe un couplage naturel entre $\mathcal{D}_-$ et $\mathcal{D}_+$ défini par

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= \langle a_0 D^0 + a_1 D^1 + \cdots, D^{-1} b_0 + D^{-2} b_1 + \cdots\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}(XY)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots)\, dx\ ,\end{aligned}$$

où $\operatorname{Res}(XY)$ est le coefficient de D^{-1} dans XY. Donc, si l'on définit $n := \mathcal{D}_-$ et $n^* := \mathcal{D}_+$, alors le groupe (de Volterra) $N = I + n$ agit sur n par l'action adjointe et sur n^* par l'action coadjointe; le calcul qui suit est dû à Adler [1].

L'opération ad^* peut être obtenue par le calcul suivant: pour $X \in n^*$ et $Y_i \in n$,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{ad}^*_{Y_1}(X), Y_2\rangle &= \langle X, \operatorname{ad}_{Y_1}(Y_2)\rangle \\ &= \langle X, [Y_1, Y_2]\rangle \\ &= \int (D^{-1}\text{-terme de } (XY_1Y_2 - XY_2Y_1))\, dx \\ &= \int (D^{-1}\text{-terme de } (XY_1 - Y_1X)_+ Y_2)\, dx \\ &= \langle [X, Y_1]_+, Y_2\rangle.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des opérateurs différentiels

$$L = D^N + \sum_0^{N-2} a_i(x) D^i, \quad \text{pour } N \text{ fixé}, \tag{1.1.1}$$

constitue une orbite coadjointe dans n^*. On considère des fonctionnelles $H(L)$ sur n^*

$$H(L) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \ldots, a_k^{(\ell)}, \ldots)\, dx$$

où f est une fonction-$\mathcal{C}^\infty$ en x et les $a_n^{(\ell)}$; ces dernières sont les dérivées des coefficients a_k de L. Par définition, le gradient ∇H est défini comme l'opérateur pseudo-différentiel

$$\nabla H(L) = \sum_0^{N-1} D^{-i-1} \frac{\delta H}{\delta a_i}, \tag{1.1.2}$$

tel que

$$dH = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^{N-1} \frac{\delta H}{\delta a_j} da_j = \langle dL, \nabla H\rangle, \text{ où } dL = \sum_0^N da_i D^i.$$

À noter que l'absence du coefficient a_{N-1} dans L fait que le gradient $\delta H/\delta a_{N-1}$ devra être remplacé par une autre expression à préciser dans un moment. Étant donné le hamiltonien $H(L)$ sur n^*, les champs de vecteurs hamiltoniens sur l'orbite coadjointe sont fournis par

$$\dot{L} = \operatorname{ad}^*_{\nabla H(L)}(L) = [L, \nabla H(L)]_+ \tag{1.1.3}$$

Une réduction de ce champ de vecteurs hamiltonien aux opérateurs L de la forme (1.1.1) nous donne la contrainte

$$\text{Res}\,[L, \nabla H(L)] = 0\,; \tag{1.1.4}$$

donc $\delta H/\delta a_{N-1}$ sera remplacé par une expression telle que la contrainte (1.1.4) soit satisfaite.

Le (premier) crochet de Poisson est donc fourni par

$$\begin{aligned}\{H, H'\}_1 = \int \text{Res}\,(\nabla H[L, \nabla H']_+)dx &= \int \text{Res}\,(\nabla H[L, \nabla H'])\,dx \\ &= \int \text{Res}\,([\nabla H, L]\nabla H')\,dx.\end{aligned}$$

Appliqués aux hamiltoniens

$$H_{k+N} = \frac{N}{k+N}\int \left(\text{Res}\, L^{\frac{k+N}{N}}\right) dx, \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

dont on calcule le gradient $\nabla H_{k+N} = (L^{k/N})_-$, les champs de vecteurs (1.1.3) deviennent les équations familières de la théorie intégrable (N-réduction de Gel'fand-Dickey de la hiérarchie KP) :

$$\dot{L} = [L, \nabla H_{k+N}(L)]_+ = -[(L^{k/N})_-, L]_+ = [(L^{k/N})_+, L]. \tag{1.1.5}$$

Exemple: Pour $L = D^2 + q$, on calcule $\nabla H(L) = D^{-1}\frac{\delta H}{\delta q} + D^{-2}\frac{1}{2}(\frac{\delta H}{\delta q})'$ et donc

$$\begin{aligned}\dot{q} = \dot{L} = \frac{1}{2}[L, \nabla H]_+ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta q} \\ &= \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6q\frac{\partial q}{\partial x} \text{ pour } H := \int \left(q^3 - \frac{1}{2}q'^2\right) dx,\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

ce qui est l'équation KdV. Le crochet de Poisson s'écrit

$$\{H, H'\}_1 = \int \frac{\delta H}{\delta q}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H'}{\delta q} \text{ et donc } \{q(x), q(y)\}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y).$$

On considère le changement de coordonnées $q(x) \longmapsto (\varphi_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, défini par la série de Fourier

$$q(x) = \alpha \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-inx}\varphi_n + \beta. \tag{1.1.7}$$

En ces nouvelles coordonnées, la dérivée de Fréchet d'une fonctionnelle H de q peut être exprimée comme

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\partial H}{\partial \varphi_k}\frac{\delta \varphi_k}{\delta q} = \alpha^{-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} e^{ikx}. \tag{1.1.8}$$

En mettant ces expressions (1.1.7) et (1.1.8) dans (1.1.6), et en comparant les coefficients de Fourier, nous obtenons

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \alpha^{-2} in \frac{\partial H}{\partial \varphi_{-n}}.$$

Comme, de façon générale, la structure symplectique est donnée, en coordonnées, par la matrice des crochets de Poisson des coordonnées,

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \{\varphi_n, \varphi_m\}_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi_m}, \tag{1.1.9}$$

il s'ensuit que

$$\{\varphi_n, \varphi_m\}_1 = \alpha^{-2} in\, \delta_{m,-n}, \tag{1.1.10}$$

ce qui est l'algèbre de Heisenberg, en choisissant $\alpha^{-2} i = 1$.

1.2. **Une seconde stucture symplectique**

En posant $\hat{L} = L + z$, le champ de vecteurs (1.1.3) possède une généralisation intéressante, due à Adler [1] et Gel'fand-Dickey [27]; pour plus de détails, voir les travaux de Dickey [15, 16], en particulier son excellent exposé de Cortona [17]. Nous avons

$$\dot{L} = (\hat{L}\nabla H)_+ \hat{L} - \hat{L}(\nabla H\ \hat{L})_+ \tag{1.2.1}$$

$$= -(\hat{L}\nabla H)_- \hat{L} + \hat{L}(\nabla H\ \hat{L})_- \tag{1.2.2}$$

$$= (L\nabla H)_+ L - L(\nabla H\ L)_+ + z[\nabla H, L]_+. \tag{1.2.3}$$

La définition (1.2.1) et la formule (1.2.2) montrent qu'il s'agit bien de champs de vecteurs agissant sur les opérateurs différentiels L d'ordre n, tandis que (1.2.3) montre que ce champ de vecteurs est une interpolation entre (1.1.3), pour $z = \infty$, et un nouveau champ de vecteurs, pour $z = 0$. De plus, on a une formule récursive utile dans la suite

$$(LX_1)_+ L - L(X_1 L)_+ + [X_2, L]_+ = 0, \text{ pour } X_1 = (L^{\frac{r}{n}-1})_- \text{ et } X_2 = (L^{\frac{r}{n}})_-. \tag{1.2.4}$$

Pour montrer que (1.2.1) est un champ de vecteurs hamiltonien, on définit la fonction :

$$J : \mathcal{D}_-/\mathcal{D}_{(-\infty,N-1)} \longrightarrow \mathcal{D}_{0,N-1}$$

$$\begin{aligned} X \longmapsto J(X) &= (\hat{L}X)_+ \hat{L} - \hat{L}(X\hat{L})_+ \\ &= -(\hat{L}X)_- \hat{L} + \hat{L}(X\hat{L})_-, \end{aligned}$$

qui, elle, conduit au champ de vecteurs

$$\dot{L} = \partial_{J(X)}(L) := (\hat{L}X)_+ \hat{L} - \hat{L}(X\hat{L})_+.$$

Si l'on définit la 2-forme :

$$\omega(\partial_{J(X)}, \partial_{J(Y)}) = \langle J(X), Y \rangle = \int \operatorname{Res}(J(X)Y)\, dx\ ,$$

alors,

(i) ω est anti-symétrique, c.à.d., $\langle J(X), Y\rangle = -\langle X, J(Y)\rangle$
(ii) ω est fermée
(iii) $[\partial_{J(X)}, \partial_{J(Y)}] = \partial_{J(Z)}$, où

$$Z = (-X(\hat{L}Y)_+ + (X\hat{L})_-Y)_- - (-Y(\hat{L}X)_+ + (Y\hat{L})_-X)_- + \partial_{J(X)}Y - \partial_{J(Y)}X.$$

DÉFINITION.— *La $\mathcal{W}$-algèbre est l'algèbre des fonctionnelles sur l'espace des opérateurs du type* (1.1.1) *pour cette seconde structure symplectique.*
Posons $J = J_1$ pour $z = \infty$ et $J = J_2$ pour $z = 0$; le crochet de Poisson est donné par

$$\begin{aligned}\{H, H'\}_2 &= \langle \nabla H, J_2(\nabla H')\rangle \\ &= \int \text{Res}\,(\nabla H\,((L\nabla H')_+ L - L(\nabla H' L)_+))\,dx \\ &= \int \text{Res}\,(L\nabla H(L\nabla H')_+ - \nabla H L(\nabla H' L)_+)\,dx,\end{aligned}$$

et les hamiltoniens $H_k, H_{k+N}, H_{k+2N}, \ldots$, définis en (1.1.5), sont tous en involution pour $\{\ ,\ \}_1$, car

$$\begin{aligned}\{H_j, H_k\}_1 &= \int \text{Res}\,(\nabla H_j J_1(\nabla H_k)) \\ &= \int \text{Res}\,(\nabla H_j J_2 \nabla H_{k-N}) \quad \text{en vertu de (1.2.4)} \\ &= -\int \text{Res}\,(\nabla H_{k-N} J_2(\nabla H_j)) \quad \text{en vertu de (i)} \\ &= -\int \text{Res}\,(\nabla H_{k-N} J_1 \nabla H_{j+N}) \\ &= \int \text{Res}\,(\nabla H_{j+N} J_1(\nabla H_{k-N})) = \{H_{j+N}, H_{k-N}\}_1.\end{aligned}$$

Donc $\{H_j, H_k\}_1 = \{H_{j+\alpha N}, H_{k-\alpha N}\}_1$ et en choisissant α suffisamment grand tel que $H_{k-\alpha N}$ devienne trivial et donc $J_1(\nabla H_{k-\alpha N}) = 0$, on trouve que $\{H_j, H_k\}_1 = 0$. Donc le caractère bihamiltonien de Magri [37] garantit l'existence de nombreuses constantes du mouvement en involution.

Exemple: Dans le cas $N = 2$ (KdV),

$$\dot{q} = \dot{L} = (L\nabla H)_+ L - L(\nabla H L)_+ = (D^3 + 2(Dq + qD))\frac{\delta H}{\delta q} =: K_x \frac{\delta H}{\delta q}.$$

Le crochet de Poisson s'écrit

$$\{H, H'\}_2 = \int \frac{\delta H}{\delta q} K_x \frac{\delta H'}{\delta q} \text{ et donc } \{q(x), q(y)\}_2 = K_x\,\delta(x-y).$$

Comme avant, on exprime cette structure symplectique en fonction des coefficients de Fourier de q

$$\alpha \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = i\sum_m (m-n)\varphi_{n+m}\frac{\partial H}{\partial \varphi_m} + \frac{i}{2\alpha}(n^3 - 4\beta n)\frac{\partial H}{\partial \varphi_{-n}};$$

utilisant (1.1.7), et posant $4\beta = 1$ et $\alpha = 6i/c$, on trouve la structure de l'algèbre de Virasoro (voir Gervais [29]) :

$$\{\varphi_n, \varphi_m\}_2 = (n-m)\varphi_{n+m} + c\frac{n^3-n}{12}\delta_{n,-m}.$$

1.3. **Action des difféomorphismes sur les opérateurs différentiels**

Kirillov [35] observe qu'un difféomorphisme infinitésimal de $D^2+q(x)$ induit une déformation de $q(x)$, selon la seconde structure symplectique de KdV. Di Francesco, Itzykson, Zuber [18] et Radul [41] ont démontré qu'il s'agit d'un phénomène bien plus général. Soient

$$L_x = D_x^n + a_{n-2}D_x^{n-2} + \cdots + a_0, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.3.1}$$

un opérateur différentiel et $x = x(t)$ un difféomorphisme ; alors $D_x = \varphi^{-1}(t)D_t$, où $\dot{x}(t) = \varphi(t)$. La transformation suivante conserve la forme de L et conduit à une expression contenant la dérivée Schwarzienne[1]

$$\begin{aligned} L_t &= (\dot{x})^{\frac{n+1}{2}} \left((\tfrac{1}{\dot{x}}D_t)^n + a_{n-2}(x(t))(\tfrac{1}{\dot{x}}D_t)^{n-2} + \cdots\right)(\dot{x})^{\frac{n-1}{2}} \\ &= D_t^n + \left(a_{n-2}(x)\dot{x}^2 + \tfrac{n^3-n}{12}\, S(\dot{x})\right) D_t^{n-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Ceci induit une transformation des solutions $y(x)$ de $L_x y(x) = 0$:

$$y(x) \longmapsto \tilde{y}(t) = \dot{x}^{-\frac{n-1}{2}} y(x(t)), \tag{1.3.3}$$

c'est-à-dire, $y(x)$ est un *champ primaire de poids* $h = -\frac{n-1}{2}$.

Une fonction $y(x)$ qui se transforme sous le difféomorphisme $x(t)$ par $\tilde{y}(t) = y(x(t))\,\dot{x}(t)^h$ est appelée un champ primaire de poids conforme h. Sous l'action d'un difféomorphisme infinitésimal $x(t) = t + \varepsilon r(t)$, un champ primaire de poids h se transforme comme $y' = r\dot{y} + h\dot{r}y$; en effet,

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= (1+\varepsilon\dot{r}(t))^h \left(y(t) + \varepsilon\dot{y}(t)r(t) + O(\varepsilon^2)\right) \\ &= (1+h\varepsilon\dot{r}(t))\,(y(t) + \varepsilon\dot{y}(t)r(t)) + O(\varepsilon^2) \\ &= y(t) + \varepsilon\,(r\dot{y}(t) + h\dot{r}(t)y(t)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

THÉORÈME.— *Étant donné le hamiltonien*

$$H = \int r(x)a_{n-2}(x)\,dx\ , \tag{1.3.5}$$

défini sur l'espace des opérateurs différentiels (1.3.1) *d'ordre* n, *le champ de vecteurs hamiltonien*

$$\dot{L} = (L\ \nabla H)_+ L - L(\nabla H\ L)_+ \tag{1.3.6}$$

[1] $S(\varphi) = \frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{3}{2}(\frac{\varphi'}{\varphi})^2$

définit un difféomorphisme infinitésimal sur L tel que la fonction $y(x)$ du noyau de L reste dans la classe des champs primaires de poids conforme $-\frac{n-1}{2}$.

Démonstration: Pour H défini par (1.3.5), on calcule

$$\nabla H = D^{-n+1}r + D^{-n}\left(\frac{n-1}{2}r'\right)$$

et son champ de vecteurs hamiltonien

$$\begin{aligned}\dot{L} &= -L(\nabla H \cdot L)_+ + (L\nabla H)_+ L \\ &= -L(\nabla H \cdot L)_+ + (L(\nabla H \cdot L)_+ L^{-1})_+ L + (L(\nabla H \cdot L)_- L^{-1})_+ L \\ &= -LP + (LPL^{-1})_+ L = -(LPL^{-1})_- L,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}P &:= (\nabla H\ L)_+ \\ &= ((D_t^{-n+1}r + \frac{n-1}{2}D_t^{-n}r')(D_t^n + a_{n-2}D_t^{n-2} + \cdots))_+ \\ &= r(t)D_t - \frac{n-1}{2}r'(t).\end{aligned}$$

Noter que P est exactement l'opérateur qui apparaît dans la transformation infinitésimale (1.3.3) sous l'action du difféomorphisme infinitésimal $x(t) = t + \varepsilon r(t)$. En effet,

$$\tilde{y}(t) = (1+\varepsilon r')^{-\frac{n-1}{2}}\left(y(t) + \varepsilon y'(t)r(t) + O(\varepsilon^2)\right) = y(t) + \varepsilon P y(t) + O(\varepsilon^2).$$

Cherchons les déformations de l'opérateur différentiel L, telles que sous la déformation $y(t) \mapsto y(t) + \varepsilon P y(t)$ l'on reste dans le noyau de la déformation de L. Cherchons $V(P)$ tel que

$$L \mapsto L + \varepsilon V(P), \quad \text{où } V(P) = D_t^{n-1} + \cdots$$

et

$$(L + \varepsilon V(P))\,(y(t) + \varepsilon P y(t)) = O(\varepsilon^2).$$

Donc, il faut que

$$Ly(t) = 0 \text{ implique } (V(P) + LP)y(t) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\ker L \subseteq \ker(V(P) + LP).$$

Ceci équivaut à l'existence d'un opérateur différentiel Q tel que

$$V(P) + LP = QL, \text{ avec } Q = Q_+,$$

et donc

$$\mathcal{D}_- \ni V(P)L^{-1} = Q - LPL^{-1},$$

impliquant

$$Q = Q_+ = (LPL^{-1})_+ = rD + \frac{n+1}{2}r'.$$

Par conséquent, la version infinitésimale de (1.3.2) est fournie par

$$\begin{aligned}\dot{L} = V(P) &= -LP + QL = -LP + (LPL^{-1})_+ L = -(LPL^{-1})_- L \\ &= -[L,P] + (Q-P)L \\ &= -\left[\sum_0^n a_k D^k, rD - \frac{n-1}{2}r'\right] + nr'\sum_0^n a_k D^k.\end{aligned}$$

□

Di Francesco, Itzykson et Zuber[18] ont montré que l'on peut remplacer les coefficients a_i par des nouvelles coordonnées w_i, telles que les difféomorphismes infinitésimaux transforment les w_{n-k}, selon des champs primaires de poids k.

THÉORÈME.— *Pour tout $k \leq n-2$, il existe une combinaison linéaire*

$$w_k = a_k + \sum_{r_i<k} A_{k,r_i}(a_{n-2}) a_{n-r_i}^{(p_i)}, \quad w_{n-2} = a_{n-2},$$

où les $A_{k,r}(a_{n-2})$ sont des polynômes différentiels de a_{n-2}, tels que les champs de vecteurs (1.3.6) *pour $H = \int r(x) a_{n-2}(x)\,dx$ ont la forme simple que voici:*

$$\dot{w}_{n-2} = rw'_{n-2} + 2r'w_{n-2} + \frac{n^3-n}{12}r'''$$

$$\dot{w}_{n-k} = rw'_{n-k} + kr'w_{n-k} \quad \textit{pour } k \geq 3;$$

c'est-à-dire, les w_{n-k} sont des champs primaires de poids k, sauf pour w_{n-2}, qui est un champ quasi-primaire[2] *de poids* 2.

Exemple: Voici quelques w_{n-k}:

$$w_{n-3} = a_{n-3} - \frac{n-2}{2}a'_{n-2}$$

$$w_{n-4} = a_{n-4} - \frac{n-3}{2}a'_{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{10}a''_{n-2} - \frac{(n-2)(n-3)(5n+7)}{10n(n^2-1)}a^2_{n-2}.$$

Aussi

$$\begin{aligned}\{\int r(x)w_{n-2}\,dx \quad , \quad \int s(x)w_{n-2}\,dx\} & \\ = \int \left(rw'_{n-2} + 2r'w_{n-2} + \frac{n^3-n}{12}r'''\right) s\,dx & \\ = \int (r's - rs')(x)w_{n-2}\,dx + \frac{n^3-n}{12}\int r'''s\,dx & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\int r(x)w_{n-2}\,dx, \int s(x)w_{n-3}\,dx\} &= \int r(sw'_{n-3} + 3s'w_{n-3})\,dx \\ &= \int (-r's + 2rs')w_{n-3}\,dx.\end{aligned}$$

[2] à cause du terme supplémentaire.

Au-delà, les crochets de Poisson sont non-linéaires par rapport aux hamiltoniens $\int r(x) w_{n-k}\, dx$. Il s'ensuit que $\mathcal{W}_n$ est *une algèbre non-linéaire.*

2. L'ALGÈBRE $\mathcal{W}_\infty$

2.1. L'algèbre w_∞ et son extension centrale

On définit

$$\begin{aligned} w_\infty &:= \{\text{L'algèbre de Lie des opérateurs différentiels réguliers sur } \mathbf{C}\backslash\{0\}\} \\ &= \text{plan}_{\mathbf{C}}\{z^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbf{Z}, \beta \geq 0\} \\ &= \text{plan}_{\mathbf{C}}\{z^k E^m,\ k, m \in \mathbf{Z}, m \geq 0\} = \mathbf{C}[E][z, z^{-1}] \end{aligned}$$

pour l'opérateur d'Euler $E = z\,\partial/\partial z$. L'algèbre w_∞ a deux fonctions génératrices intéressantes, une première due à Kac et collaborateurs [32, 24] :

$$z^r e^{\lambda E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^r E^n \tag{2.1.1}$$

et une seconde, introduite dans [7, 8][3]

$$n(z;\mu,\lambda) := \delta(\lambda, z) e^{(\mu-\lambda)\frac{\partial}{\partial z}}, \tag{2.1.2}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda)^k}{k!} \sum_{\ell:-\infty}^{\infty} \lambda^{-\ell-k} k z^{k-1+\ell} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} \tag{2.1.3}$$

Les relations de commutation de chacune de ces fonctions génératrices sont données par

$$[z^r e^{\lambda E}, z^s e^{\lambda E}] = e^{\lambda s - \mu r} z^{r+s} e^{(\lambda+\mu)E} \tag{2.1.4}$$

et

$$[n(z;\mu,\lambda), n(z;x,y)] = \delta(\mu, y) n(z;x,\lambda) - \delta(\lambda, x) n(z;\mu,y). \tag{2.1.5}$$

L'extension centrale est l'algèbre de Lie $\mathcal{W}_\infty$ rendant la suite

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{W}_\infty \to w_\infty \to 0$$

[3] La fonction delta

$$\delta(\lambda, z) := \frac{1}{z} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\lambda}{z}\right)^n$$

est fonction de $\lambda - z$ seulement et possède la propriété suivante :

$$f(y,z)\,\delta(y,z) = f(y,y)\delta(y,z).$$

exacte. L'unique extension centrale (non-triviale) de l'algèbre w_∞ par une algèbre unidimensionnelle est déterminée par le cocycle Ψ, (voir [32, 24]), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&[z^m f(E), z^n g(E)]\\&= z^{m+n}(f(E+n)g(E) - f(E)g(E+m)) - \frac{c}{2}\Psi(z^m f(E), z^n g(E)),\end{aligned}$$

où

$$\Psi(z^m f(E), z^n g(E)) \begin{cases} = \sum_{-m\le j\le -1} f(j)g(j+m), & \text{si } m = -n > 0 \\ = 0, & \text{si } m+n \neq 0 \text{ ou } m = n = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\Psi\left(f(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m, g(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\right) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=0} dz\, f^{(n+1)}(z)g^{(m)}(z).$$

En termes de la fonction génératrice (2.1.1), le crochet de Lie dans l'extension centrale $\mathcal{W}_\infty$ a la forme suivante :

$$[z^r e^{\lambda E}, z^s e^{\mu E}] = e^{\lambda s - \mu r} z^{r+s} e^{(\lambda+\mu)E} - \frac{1}{2}c\delta_{r,-s}\frac{e^{-\lambda r} - e^{-\mu s}}{1 + e^{\lambda+\mu}}.$$

L'algèbre $\mathcal{W}_\infty$ contient l'algèbre de Virasoro de charge centrale c, car

$$-\frac{c}{2}\Psi(z^{k+1}\frac{\partial}{\partial z}, z^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial z}) = -\frac{c}{2}\sum_{-k\le j\le -1} j(j+k)\delta_{k,-\ell} = c\delta_{k,-\ell}\frac{k^3 - k}{12}.$$

2.2. **Une représentation de w_∞ contenant la hiérarchie KP**

La hiérarchie KP

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L] = -[(L^n)_-, L], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2.1}$$

définit des champs de vecteurs commutants qui sont des déformations de l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned}L &= D + \sum_{-\infty}^{-1} a_j(x; t_1, t_2, \ldots)D^j, \quad D = \partial/\partial x\\ &= WDW^{-1};\end{aligned}$$

cette dernière expression se réfère à *l'habillage* de l'opérateur D par l'*opérateur d'onde* W. En accord avec (2.2.1), on demande que W satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = (L^n)_+ W.$$

Notez le changement de notation par rapport à la section 1 ; ici, L désigne l'opérateur pseudo-différentiel ci-dessus.

Selon la théorie de Sato, W peut s'exprimer en termes d'une fonction[4] $\tau(t_1, t_2, \dots)$

$$W = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(-\tilde{\partial})\tau(t)}{\tau(t)} D^{-n} \right) e^{\sum_1^\infty t_k D^k}. \tag{2.2.2}$$

DÉFINITION.— *Une fonction* $\tau(t)$ *de* $t = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbf{C}^\infty$ *est* définie *par la relation Wronskienne suivante pour tout*[5] y *et* $z \in \mathbf{C}\backslash 0$:

$$\{\tau(t - [y^{-1}]), \tau(t - [z^{-1}])\} + (y - z)\left(\tau(t - [y^{-1}])\tau(t - [z^{-1}]) - \tau(t)\tau(t - [y^{-1}] - [z^{-1}])\right) = 0. \tag{2.2.3}$$

Cette relation de Fay différentielle, qui figure dans [3, 48], suffit à définir les fonctions τ ; en effet Takasaki et Takebe [43] montrent que, si τ satisfait à cette relation, alors l'opérateur $L := WDW^{-1}$, où W est défini par (2.2.2), satisfait à la hiérarchie KP (2.2.1). La relation (2.2.3) implique la hiérarchie bilinéaire suivante pour τ :

$$\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial t_1 \partial t_k} - \frac{\partial \tau}{\partial t_k}\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} - \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 0}} p_i(\tilde{\partial})\tau \cdot p_j(-\tilde{\partial})\tau = 0, \quad k = 3, 4, \dots \tag{2.2.4}$$

Exemple: Lorsque $L^2 = D^2 + q$ est un opérateur différentiel, la fonction τ est indépendante des variables $t_2, t_4, t_6, \dots$; dans ce cas, en posant $x = t_1$ et $t = t_3$, la fonction $q(x,t) := 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log \tau$ satisfait à l'équation de Korteweg-de Vries, déja introduite en (1.1.6).

Nous définissons *la fonction d'onde* Ψ qui, en vertu de la représentation (2.2.2), aura la forme, pour $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{C}^\infty$, $z \in \mathbf{C}$:

$$\Psi(x, t; z) = We^{xz} = e^{xz + \sum_1^\infty t_i z^i} \frac{\tau(t - [z^{-1}]}{\tau(t)}, \tag{2.2.5}$$

et la *fonction d'onde adjointe*

$$\Psi^*(x, t; z) = (W^\top)^{-1} e^{-xz} = e^{-xz - \sum_1^\infty t_i z^i} \frac{\tau(t + [z^{-1}]}{\tau(t)}. \tag{2.2.6}$$

Selon [9, 10], l'identité de Fay (2.2.3) peut s'écrire de la façon suivante :

$$D^{-1}\, \Psi(x, t; y)\Psi^*(x, t; z) = \frac{\tau(t - [y^{-1}] + [z^{-1}])}{\tau(t)} e^{x(y-z) + \sum_1^\infty t_i (y^i - z^i)}. \tag{2.2.7}$$

Par ailleurs, la fonction d'onde Ψ conduit aux opérateurs pseudo-différentiels L (déjà définis) et l'opérateur d'Orlov-Schulman M [39] :

$$z\Psi = Wze^{xz} = WDe^{xz} = WDW^{-1}\Psi = L\Psi$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi = W\frac{\partial}{\partial z}e^{xz} = Wxe^{xz} = WxW^{-1}\Psi = M\Psi\ ,$$

[4] Les polynômes de Schur élémentaires $p_n(t)$ sont définis par $e^{\sum_1^\infty t_i z^i} = \sum_0^\infty p_n(t) z^n$; par ailleurs $p_n(\pm\tilde{\partial}) = p_n(\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{1}{2}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \pm\frac{1}{3}, \frac{\partial}{\partial t_3}, \dots)$

[5] $\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial t_1} g - f \frac{\partial g}{\partial t_1}$; pour $\alpha \in \mathbf{C}$, $[\alpha] := (\alpha, \frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^3}{3}, \dots) \in \mathbf{C}^\infty$.

qui satisfont à la relation de commutation

$$[L, M] = W[D, x]W^{-1} = 1.$$

Dans [7, 8], nous montrons qu'il existe un anti-homomorphisme naturel d'algèbre de Lie dans l'algèbre des déformations infinitésimales de l'opérateur pseudo-différentiel L:

$$w_\infty \longrightarrow \{\text{champs de vecteurs sur les } \Psi \text{ et les } L\}$$

$$z^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta \longmapsto \begin{cases} \mathbf{Y}_{z^\alpha(\frac{\partial}{\partial z})^\beta}\Psi = -(M^\beta L^\alpha)_-\Psi \\ \mathbf{Y}_{z^\alpha(\frac{\partial}{\partial z})^\beta}L = [-(M^\beta L^\alpha)_-, L] \end{cases} \tag{2.2.8}$$

c'est-à-dire

$$[\mathbf{Y}_{z^\alpha(\frac{\partial}{\partial z})^\beta}, \mathbf{Y}_{z^{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial z})^{\beta'}}] = \mathbf{Y}_{-[z^\alpha(\frac{\partial}{\partial z})^\beta, z^{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial z})^{\beta'}]}.$$

Remarquons que les champs de vecteurs $\mathbf{Y}_{z^\alpha}$ coïncident avec les $\frac{\partial}{\partial t_\alpha}$ de la hiérarchie KP (2.2.1)

$$\mathbf{Y}_{z^\alpha}L = [-(L^\alpha)_-, L] = \frac{\partial L}{\partial t_\alpha};$$

en particulier

$$[\mathbf{Y}_{z^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial z}}, \frac{\partial}{\partial t_k}] = -k\frac{\partial}{\partial t_{k+\ell}} \quad \text{et} \quad [\mathbf{Y}_{z^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial z}}, \mathbf{Y}_{z^{k+1}\frac{\partial}{\partial z}}] = (\ell - k)\mathbf{Y}_{z^{k+\ell+1}\frac{\partial}{\partial z}}.$$

Exemple: Pour $D^2 + q(x)$, les champs de vecteurs $\mathbf{Y}$, correspondant aux opérateurs

$$\sqrt{z}\left(y^n\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{y=z^2}\frac{1}{\sqrt{z}}\ ,\ n = 0, 1, 2, ...$$

de w_∞, conservent la forme $D^2 + q(x)$; à titre d'exemple, pour $n = 0, 1$ et 2, ces $\mathbf{Y}$, restreints à $t = 0$, sont donnés par les équations suivantes (voir [47, 8]):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= 1 \\ \dot{q} &= \frac{x}{2}q' + q \\ \mathbf{V}(q) = \dot{q} &= \frac{1}{8}(xq''' + 6xqq' + 4q'' + 8q^2 + 2q'\int_{-\infty}^{x} q). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Dans [5], nous démontrons que la dérivée de Lie de la première structure symplectique $\{q(x), q(y)\}_1$ de KdV, par rapport au champ de vecteurs $\mathbf{V}$ dans (2.2.9), fournit la seconde structure $\{q(x), q(y)\}_2$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}D_x\delta(x - y) = -\left(\frac{1}{2}D_x^3 + D_xq + qD_x\right)\delta(x - y).$$

Ceci est un phénomène général pour la p-réduction de KP, établi dans [5].

2.3. Transformations de Darboux et opérateur vertex

En vue de motiver les opérateurs vertex, commençons par l'exemple de l'équation KdV. Darboux introduit la transformation suivante, à partir d'une décomposition arbitraire de l'opérateur $L^2 - \lambda^2 = D^2 + q - \lambda^2$ en opérateurs différentiels d'ordre 1 :

$$L^2 - \lambda^2 = (D+v)(D-v) \longmapsto \tilde{L}^2 - \lambda^2 = (D-v)(D+v).$$

L'évolution de L^2 selon l'équation KdV définit une fonction τ. Quelle est la nouvelle fonction τ, associée à $\tilde{L}$? Dans [47], il est démontré que

$$\tau(t) \longmapsto \tilde{\tau}(t) = b_+ X(t,\lambda)\tau + b_- X(t,-\lambda)\tau, \tag{2.3.1}$$

où b_+ et $b_- \in \mathbf{C}$ sont tels que

$$b_+\Psi(x,t;\lambda) + b_-\Psi(x,t;-\lambda) \in \ker(D-v)$$

et

$$X(t,z) := e^{\sum_1^\infty t_i z^i} e^{-\sum_1^\infty \frac{z^{-i}}{i}\frac{\partial}{\partial t_i}}.$$

La relation (2.3.1) est étonnante et déconcertante, sachant que τ est la solution d'une équation non-linéaire! En effet, la somme (2.3.1) et chacun des termes de la somme satisfont à la même équation non-linéaire (2.2.4).

De façon plus générale, étant donné une fonction τ pour l'équation KP, satisfaisant donc à (2.2.3), la somme

$$\tau + \varepsilon X(t;y,z)\tau \tag{2.3.2}$$

est également une fonction τ, où

$$X(t;y,z) := -\frac{1}{z}X(-t,z)X(t,y) = \frac{1}{y-z} e^{\sum_1^\infty (y^i - z^i)t_i} e^{\sum_1^\infty (z^{-i} - y^{-i})\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_i}} \tag{2.3.3}$$

est *l'opérateur vertex* de Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa [14]. Ceci implique que

$$\dot{\tau} = X(t;y,z)\tau$$

est un champ de vecteurs sur la variété (de dimension infinie) des fonctions τ.

2.4. Représentation de $\mathcal{W}_\infty$ pour $c = 1$ dans l'algèbre des champs de vecteurs sur τ

THÉORÈME.— *Une représentation de l'extension centrale $\mathcal{W}_\infty$ (pour $c = 1$) est donnée par les générateurs $\frac{1}{k+1}W_\ell^{(k+1)}$, figurant dans le développement en μ autour de λ de l'opérateur vertex $X(t;\mu,\lambda)$, introduit en* (2.3.3) :

$$X(t;\mu,\lambda) = \frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu-\lambda)^k}{k!}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\lambda^{-\ell-k}W_\ell^{(k)} \tag{2.4.1}$$

où les $W_\ell^{(k)}$ *sont des opérateurs différentiels et de multiplication en* $(t_1, t_2, \ldots)$. *Plus exactement*

$$y^{k+\ell}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \in w_\infty \longmapsto \frac{1}{k+1} W_\ell^{(k+1)} \in \mathcal{W}_\infty. \tag{2.4.2}$$

En effet, l'opérateur vertex admet exactement la même relation de commutation que la fonction génératrice $n(z;\mu,\lambda)$ de w_∞ (voir [14, 7]) :

$$[X(t;\mu,\lambda), X(t;x,y)] = -\delta(\mu,y)X(t;x,\lambda) + \delta(\lambda,x)X(t;\mu,y) \tag{2.4.3}$$

$$= (n(\lambda;x,y)^\top - n(\mu;x,y))X(t;\mu,\lambda). \tag{2.4.4}$$

En utilisant le développement (2.1.3) de $n(\lambda;x,y)$ dans (2.4.4), on trouve pour $k, \ell \in \mathbf{Z}$, $k \geq 0$:

$$\left(y^{k+\ell}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^k z^{k+\ell}\right) X(t;y,z) = \left[\frac{1}{k+1} W_\ell^{(k+1)}, X(t;y,z)\right], \tag{2.4.5}$$

ce qui montre (2.4.2).

Exemple: $W_\ell^{(0)} = \delta_{\ell,0}$ et[6]

$$W_\ell^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_\ell}, & \ell > 0 \\ (-\ell)t_{-\ell}, & \ell \leq 0 \end{cases}, \quad W_\ell^{(2)} = \sum_{i+j=\ell} :W_i^{(1)} W_j^{(1)}: -(\ell+1)W_\ell^{(1)}.$$

En vertu de l'expression de Ψ en fonction de τ, la dérivée logarithmique de Ψ par rapport aux champs de vecteurs (2.2.8) et celle de τ par rapport aux champs de vecteurs définis par les générateurs de $\mathcal{W}_\infty$, sont étroitement liées ; ce théorème, dû à Adler-Shiota-van Moerbeke [7, 8], s'avère être très robuste ; de telles relations sont également valables pour les réseaux 1-Toda et 2-Toda. Voir Fastré [21] pour une version Boson-Fermion de cette correspondance et van de Leur [46] pour des généralisations et interprétations en théorie des représentations.

THÉORÈME.— *On a la correspondance suivante entre champs de vecteurs*[7]

$$\mathbf{Y}_{n(z;\mu,\lambda)} \log \Psi = (e^{-\eta} - 1)\mathbf{Y}_{X(t,\mu,\lambda)} \log \tau,$$

où

$$\mathbf{Y}_{n(z;\mu,\lambda)} \log \Psi = \frac{-(e^{(\mu-\lambda)M}\delta(\lambda,L))_-\Psi}{\Psi} \text{ et } \mathbf{Y}_{X(t;\mu,\lambda)} \log \tau = \frac{X(t;\mu,\lambda)\tau}{\tau}.$$

COROLLAIRE.— *En particulier,*

$$\frac{-(M^n L^{n+\ell})_-\Psi}{\Psi} = (e^{-\eta} - 1)\frac{\frac{1}{n+1} W_\ell^{(n+1)}(\tau)}{\tau}. \tag{2.4.6}$$

[6]L'ordre normal :: signifie que les dérivées figurent toujours à la droite, indépendamment des relations de commutation.

[7]$\eta := \sum_1^\infty \frac{z^{-i}}{i} \frac{\partial}{\partial t_i}$ et donc pour $t \in \mathbf{C}^\infty$, on a $e^{-\eta} f(t) = f(t - [z^{-1}])$, en accord avec la note 5.

2.5. **Modèles matriciels comme points fixes d'une sous-algèbre de $\mathcal{W}_\infty$**

Considérons un plan de dimension infinie, dans la Grassmannienne Gr, engendré par des fonctions $\varphi_k(z)$, ayant un comportement prescrit pour $z \to \infty$:

$$\mathbb{W} = \text{plan}_{\mathbf{C}}\{\varphi_k(z) = z^k(1 + O(z^{-1})), \quad k = 0, 1, 2, \dots\} \in Gr$$

et un opérateur différentiel

$$A = \sum_{\substack{-\infty<i<\infty \\ 0\le j<\infty}} c_{ij} z^{i+j} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j.$$

L'énoncé suivant combine des résultats de [7] et [34], et repose sur les contributions pionnières de Bessis, Itzykson, Zuber [12], de Witten [51] et de Kontsevich [36].

THÉORÈME.— *Si A laisse invariant $\mathbb{W}$ (i.e., $A\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$), alors la fonction*

$$\tau(t) = \det(Proj : e^{-\sum_1^\infty t_i z^i}\mathbb{W} \longrightarrow H_+), \tag{2.5.1}$$

est une fonction τ et est un point fixe pour le champ de vecteurs associé:

$$\left(\sum_{\substack{-\infty<i<\infty \\ 0\le j<\infty}} \frac{c_{ij}}{j+1} W_i^{(j+1)} - c \right) \tau = 0. \tag{2.5.2}$$

Démonstration: L'invariance de $\mathbb{W}$ sous l'action de A implique que $P_A := \sum c_{ij} M^j L^{i+j}$ est un opérateur différentiel et donc

$$(P_A)_- = (\sum c_{ij} M^j L^{i+j})_- = 0.$$

De la correspondance (2.4.6) il suit que (2.5.2) est valable, puisque $(e^{-\eta} - 1)f(t) = 0$ implique que $f =$ constante.

Exemple (selon [6]): Soit $V(x)$ une fonction sur $\mathbf{R}$ qui croît suffisamment rapidement à l'infini. Alors la "transformée de Fourier" $a(y)$ et la fonction $\rho(z)$,

$$a(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)+xy}\, dx \text{ et } \rho(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{V(z)-zV'(z)} \sqrt{V''(z)} \tag{2.5.3}$$

définissent un plan de dimension infinie

$$\mathbb{W} = \text{plan}_{\mathbf{C}}\{\rho(z) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n a(y) \mid_{y=V'(z)} = z^n(1 + O(z^{-1})),\ n = 0, 1, 2, \dots\}$$

invariant sous l'action des opérateurs A et $V'(z)$ (qui satisfont aux relations de commutation $[A, V'(z)] = 1$)

$$\begin{cases} A\mathbb{W} \subset \mathbb{W} \\ V'(z)\mathbb{W} \subset \mathbb{W} \end{cases} \quad \text{où } A := \rho(z) \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{y=V'(z)} \rho(z)^{-1}.$$

Il s'ensuit

(i) que pour $i, j \geq 0$, les opérateurs

$$(P_A)^i V'(L)^j = \left(\rho(L)^{-1} M V''(L)^{-1} \rho(L)\right)^i V'(L)^j = \sum_{\alpha,\beta} c^{ij}_{\alpha,\beta} M^\alpha L^{\alpha+\beta}$$

sont différentiels (en x);

(ii) les opérateurs différentiels P_A et $V'(L)$ satisfont à l'équation:

$$[P_A, V'(L)] = 1; \text{ (\textbf{Equation string})}$$

(iii) que la fonction[8]

$$\tau(t) = \frac{\int_{\mathcal{H}_N} dY\, e^{-trV(Y+Z)_{\geq 2}}}{\int_{\mathcal{H}_N} dY\, e^{-trV(Y+Z)_2}}, \quad \begin{cases} t_n := -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N z_i^{-n}, \\ Z := \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_N) \end{cases} \tag{2.5.4}$$

est la fonction τ, associée au plan $\mathbb{W}$, selon la recette (2.5.1), et satisfait donc aux équations KP; l'intégrale (2.5.4) est une généralisation de l'intégrale de Kontsevich (voir [4, 36]);

(iv) la fonction $\tau(t)$ satisfait aux contraintes supplémentaires pour tout $i, j \geq 0$,

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{c^{ij}_{\alpha\beta}}{\alpha+1} W^{(\alpha+1)}_\beta \tau = c_{ij}\tau. \tag{2.5.5}$$

2.6. **Déterminant de Fredholm du noyau d'Airy et matrices stochastiques**

Cette section donne un aperçu des travaux [9, 10]. Si $V(z) = z^{p+1}/(p+1)$, la transformée de Fourier (2.5.3) devient l'intégrale d'Airy généralisée

$$a(y) = \int e^{-\frac{x^{p+1}}{p+1} + xy} dx;$$

la fonction $\rho(z)$ en (2.5.3) et l'opérateur A deviennent:

$$\rho(z) = \sqrt{\frac{p}{2\pi}} e^{-\frac{p}{p+1} z^{p+1}} z^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{pz^{p-1}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{p-1}{2p} z^{-p} + z.$$

Il s'ensuit que

$$V'(L) = L^p \quad \text{et} \quad P(A) = \frac{1}{p} M L^{-p+1} - \frac{p-1}{2p} L^{-p} + L$$

sont des opérateurs différentiels, y compris le produit de leurs puissances non-négatives. La fonction τ dans (2.5.4) devient l'intégrale matricielle

$$\tau(t) = \frac{\int_{\mathcal{H}_N} dY\, e^{-\frac{1}{p+1} tr((Y+Z)^{p+1})_{\geq 2}}}{\int_{\mathcal{H}_N} dY\, e^{-\frac{1}{p+1} tr((Y+Z)^{p+1})_2}}, \tag{2.6.1}$$

[8] $\mathcal{H}_N$ est l'espace des matrices Hermitiennes de taille N; dY est la mesure de Haar sur $\mathcal{H}_N$. Enfin $V(Y+Z)_{\geq 2} = V(Y+Z) - V(Z) - YV'(Z)$ fait référence aux termes non-linéaires (en Y) du développement de Taylor de $V(Y+Z)$ tandis que $V(Y+Z)_2$ fait référence aux termes quadratiques en Y.

satisfaisant non seulement à la p-réduction de KP, mais aussi aux contraintes de Virasoro, qui, à une translation près de la composante $p+1$ième de $t \in \mathbf{C}^\infty$ (i.e., $t_{p+1} \longmapsto t_{p+1} + \frac{p}{p+1}$), ont la forme (voir (2.5.5)) :

$$\left(W_{kp}^{(2)} + p\, W_{(k+1)p+1}^{(1)}\right)\tau = 0 \quad \text{pour} \quad k \geq -1. \tag{2.6.2}$$

À partir de de la fonction τ en (2.6.1), on définit la fonction d'onde Ψ, la fonction d'onde adjointe Ψ^* (cf. (2.2.5) et (2.2.6)), et enfin le noyau intégral :

$$k_{x,t}(y,z) := \int^x \Psi(x,t;\omega y)\Psi^*(x,t;\omega' z)dx\ . \tag{2.6.3}$$

On considère une réunion disjointe $E = \bigcup_{i=1}^{r}[a_{2i-1}, a_{2i}] \subset \mathbf{R}^+$, le noyau associé $k_{x,t}^E(y,z) = k_{x,t}(y,z)I_E(z)$ et des p-racines distinctes ω et ω' de l'unité. Alors, le noyau $k_{x,t}(y,z)$ a les propriétés suivantes, découlant respectivement de l'identité (2.2.7), d'une version multilinéaire de l'identité de Fay (2.2.3) et de la série de Neumann pour un déterminant de Fredholm :

$$\begin{aligned} k_{x,t}(y,z) &= \frac{1}{\tau(t)}X(t;\omega y,\omega' z)\tau(t), \\ \det\left(k_{x,t}(y_i,z_j)\right)_{1\leq i,j\leq n} &= \frac{1}{\tau(t)}X(t;\omega y_1,\omega' z_1)...X(t;\omega y_n,\omega' z_n)\tau \\ \det(I-\lambda k_{x,t}^E)_{1\leq i,j\leq n} &= \frac{1}{\tau(t)}e^{-\lambda\int_E dz\ X(t;\omega z,\omega' z)}\tau(t) =: \frac{\tau^E}{\tau}. \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

En utilisant (2.4.5), on démontre que cette nouvelle expression τ^E satisfait aux mêmes équations (2.6.2), mais augmentées d'un terme frontière, pour tous les $k \geq -1$:

$$\left(-\sum_{i=1}^{2r} a_i^{kp+1}\frac{\partial}{\partial a_i} + \frac{1}{2}\left(W_{kp}^{(2)} + p\, W_{(k+1)p+1}^{(1)}\right)\right)\tau\det(I-\lambda k_{x,t}^E) = 0; \tag{2.6.5}$$

c'est-à-dire les termes *frontière* et *temps* se découplent.

Dans le cas $p=2$, et pour $\tau(t)$, comme dans (2.6.1), le noyau (2.6.3), pour $t=0$, n'est autre que le "noyau d'Airy" qui intervient dans la théorie des matrices stochastiques :

$$\frac{1}{2}\frac{k_{x,t}(\lambda^{1/2},\lambda'^{1/2})}{\lambda^{1/4}\lambda'^{1/4}}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int^x F(x+\lambda)F(x+\lambda')dx\ ,$$

où

$$F(iu) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^3/3+iyu}dy\ . \qquad \text{(Fonction d'Airy)}$$

Nous pouvons donc conclure que $\tau^E(t) = \tau\det(I-\lambda k_{x,t}^E)$, défini en (2.6.4), satisfait aux équations KP :

$$\tau^E\frac{\partial^2\tau^E}{\partial t_1\partial t_k} - \frac{\partial\tau^E}{\partial t_k}\frac{\partial\tau^E}{\partial\tau_1^E} - \sum_{\substack{i+j=k+1\\ i,j\geq 0}} p_i(\tilde\partial)\tau^E\cdot p_j(-\tilde\partial)\tau^E = 0, \quad k=3,4,\dots\ , \tag{2.6.6}$$

et aux équations de Virasoro

$$\left(-\sum_{i=1}^{2r} a_i^{n+1}\frac{\partial}{\partial a_i} + \frac{1}{2}(W_n^{(2)} + 2\,W_{n+3}^{(1)})\right)\tau^E = 0\ ,\ n = -2, 0, 2, 4\ldots\ . \tag{2.6.7}$$

Les équations (2.6.7) nous permettent d'exprimer les dérivées partielles (en t) de τ^E au temps $t = 0$ en fonction d'opérateurs différentiels $\mathcal{A}_n$ de τ^E, où

$$\mathcal{A}_n = \sum_{i=1}^{2r} a_i^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial}{\partial a_i} \quad n = 1, 3, 5, \ldots\ ,$$

et de les substituer dans l'équation (2.6.6). Ce procédé conduit aux équations ci-dessous pour τ^E et pour le déterminant de Fredholm $f(x) = \det(I - \lambda k^E_{x,0})$:

$$f\cdot\mathcal{A}_n\mathcal{A}_1 f - \mathcal{A}_n f\cdot\mathcal{A}_1 f - \sum_{i+j=n+1} p_i(\tilde{\mathcal{A}})f\cdot p_j(\tilde{\mathcal{A}})f = 0\ , n = 3, 4, \ldots, \tag{2.6.8}$$

(Équations d'Hirota non-commutatives)

où p_i sont les polynômes de Schur élémentaires et $p_i(\tilde{\mathcal{A}}) = p_i(\mathcal{A}_1, 0, \frac{1}{3}\mathcal{A}_3, 0, \frac{1}{5}\mathcal{A}_5, \ldots)$. Notez que les opérateurs $\mathcal{A}_i$, qui figurent dans (2.6.8), ne commutent pas, contrairement aux dérivées partielles en t, qui figurent dans l'équation KP. Posant

$$R := \mathcal{A}_1 \log f = \sum_1^{2r} \frac{\partial \log\det(I - \lambda k^E)}{\partial a_i}\ ,$$

la première équation de la hiérarchie (2.6.8) a la forme suivante:

$$\left(\mathcal{A}_1^3 - 4(\mathcal{A}_3 - \frac{1}{2})\right)R + 6(\mathcal{A}_1 R)^2 = 0\ .$$

Lorsque $E = (-\infty, a)$, cette équation devient une équation différentielle ordinaire et donc $R = \mathcal{A}_1 \log f = \frac{\partial}{\partial a}\log\det(I - k^E)$ est solution de l'équation

$$R''' - 4aR' + 2R + 6R'^2 = 0. \qquad \textbf{(Painlevé II)}$$

Auparavant, Tracy et Widom [44] ont obtenu, par des méthodes d'analyse fonctionnelle, un système d'équations très différent du nôtre (2.6.8), mais qui, pour $E = (-\infty, a)$ se réduit également à l'équation de Painlevé II.

3. LE SPECTRE DE MATRICES ALÉATOIRES

Considérons un poids $\rho_0(dz) := e^{-V(z)}dz$, défini sur l'intervalle $F = [A, B] \subseteq \mathbf{R}$, dont la dérivée logarithmique est rationnelle et satisfaisant aux conditions aux frontières suivantes:

$$V' = \frac{g}{f} = \frac{\sum_0^\infty c_i z^i}{\sum_0^\infty b_i z^i},\quad \lim_{z\to A,B} f(z)e^{-V(z)}z^k = 0 \text{ pour tout } k \geq 0. \tag{3.0.9}$$

Sur l'ensemble

$$\mathcal{H}_n = \{n \times n \text{ matrices hermitiennes}\},$$

on définit la probabilité

$$P(M_n \in dM) = c_n(t) e^{-\mathrm{Tr}V(M) + \sum_1^\infty t_i \mathrm{Tr}M^i} dM$$

avec mesure de Haar dM sur $\mathcal{H}_n$, décomposable en une partie radiale (spectrale) et une partie angulaire. L'objectif est de trouver les équations que satisfait la probabilité [9] pour $E \subset F$:

$$P(\text{spectre } M_n \in E) = \frac{\int_{E^n} \Delta^2(z) \prod_{k=1}^n \rho_t(dz_k)}{\int_{F^n} \Delta^2(z) \prod_{k=1}^n \rho_t(dz_k)} =: \frac{\tau_n(t, E)}{\tau_n(t)}, \tag{3.0.10}$$

où

$$\rho_t(dz) = e^{\sum_1^\infty t_i z^i} e^{-V(z)} dz = e^{\sum_1^\infty t_i z^i} \rho_0(dz). \tag{3.0.11}$$

Comme précédemment, l'introduction du temps $t = (t_1, t_2, ...)$ dans cette probabilité est un artifice: d'abord on montre que $\tau_n(t)$ et $\tau_n(t, E)$ satisfont aux équations aux dérivées partielles, KP et Virasoro; ensuite on pose $t = 0$.

Pour des ensembles gaussiens, pour $t = 0$, et pour n très grand, la probabilité P (une valeur propre $\in dz$) tend vers la distribution demi-cercle de Wigner sur l'intervalle $[-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}]$. En normalisant la distribution telle que les écarts moyens entre valeurs propres égalent 1, l'on trouve diverses limites pour $n \nearrow \infty$, selon que l'on considère la partie du spectre au voisinage de $z = 0$ (bulk scaling limit) ou la partie du spectre près du bord $\sqrt{2n}$ (edge scaling limit). La première situation conduit au noyau sinus et la seconde au noyau d'Airy.

On sait également que la probabilité ci-dessous peut s'exprimer comme un déterminant de Fredholm pour n fini et n infini. Donc le vrai problème consiste à calculer pour $E \subset F$, la probabilité suivante:

$$P(\text{exactement } k \text{ valeurs propres dans } E) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^k \det(I - \lambda K_n^E)\Big|_{\lambda=1} \tag{3.0.12}$$

pour le noyau

$$K^E(y, z) = K(y, z) I_E(z). \tag{3.0.13}$$

Voici quelques exemples importants de noyaux $K(y, z)$, le premier apparaissant dans la formule de Christoffel-Darboux pour les polynômes orthogonaux classiques et le troisième (noyau d'Airy), faisant l'objet de la section 2.6. Les fonctions figurant dans ces noyaux

[9] $\Delta(z)$ est le déterminant de Vandermonde.

sont toutes des fonctions propres d'opérateurs différentiels du second ordre:

(3.0.14)

- $e^{-\frac{1}{2}(V(y)+V(z))}\sum_{k=1}^{N} p_{k-1}(y)p_{k-1}(z)$ (noyau "Christoffel-Darboux")
- $\frac{1}{2}\int_0^x (e^{-ixy} \pm e^{ixy})(e^{ixz} \pm e^{-ixz})dx = \frac{\sin x(y-z)}{y-z} \pm \frac{\sin x(y+z)}{y+z}$ (noyau sinus)
- $\int_0^x A(x+y)A(x+z)dx$ (noyau Airy)
- $\frac{1}{2}\int_0^x xJ_\nu(x\sqrt{y})J_\nu(x\sqrt{z})dx$ (noyau Bessel).

Les matrices aléatoires fournissent un modèle pour le spectre d'excitation de noyaux lourds à excitation très élevée (Wigner [50], Dyson [19, 20] et Mehta [38]). Comme les niveaux d'énergie sont régis par le spectre d'un hamiltonien quantique agissant sur un espace de Hilbert, il est raisonnable, en tronquant, de supposer que l'hamiltonien est représenté par une grande matrice, et du point de vue de la mécanique statistique par un ensemble de matrices, satisfaisant à certaines propriétés de symétrie. Dans leur analyse de données expérimentales, Porter et Rosenzweig [40] observent que l'existence de deux niveaux proches est un évènement rare (level repulsion), montrant ainsi que les écarts ne sont pas Poissonniens!

La première approche pour le noyau sinus est due à Jimbo, Miwa, Mori and Sato [31], qui ont montré que certaines variables auxilaires (p, q) satisfont à un système hamiltonien complètement intégrable du type Neumann. Tracy et Widom [44] ont utilisé des outils de l'analyse fonctionnelle pour le calcul des écarts pour des noyaux plus généraux par le biais des variables (p, q).

Pour cet exposé, nous nous limitons ici aux ensembles de matrices hermitiennes finies, dont la distribution est fournie par (3.0.2) avec V satisfaisant à (3.0.1); voir aussi notre exposé [48]. Notre approche [9, 10] a été de montrer que les probabilités satisfont aux équations KP (2.6.6) et aux contraintes de Virasoro pour $m = -1, 0, 1, \ldots$:

$$\sum_{i\geq 0}\left(b_i\mathbb{J}^{(2)}_{i+m} - c_i\mathbb{J}^{(1)}_{i+m+1}\right)\tau(F,t) = 0. \tag{3.0.15}$$

$$\left(-\sum_{1}^{2r} a_i^{m+1}f(a_i)\frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{i\geq 0}\left(b_i\mathbb{J}^{(2)}_{i+m} - c_i\mathbb{J}^{(1)}_{i+m+1}\right)\right)\tau(E,t) = 0, \tag{3.0.16}$$

où les $\mathbb{J}_k^{(i)}$ sont des opérateurs différentiels vectoriels[10] (en fait correspondant aux symétries du réseau de Toda),

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_k^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{1}{2}(-k)t_{-k} + \delta_{k,0}\,\mathrm{diag}(...,-2,-1,0,1,2,...), \\ \mathbb{J}_k^{(2)} &= \sum_{i+j=k} :\mathbb{J}_i^{(1)}\mathbb{J}_j^{(1)}:\,, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{3.0.17}$$

c'est-à-dire, les générateurs de l'algèbre de Heisenberg (oscillateur) et de l'algèbre de Virasoro.

Si la fonction rationnelle $V'(z)$ figurant dans le poids (2.7.1) a la forme

$$V'(z) = \frac{g}{f} = \frac{c_0 + c_1 z}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}, \tag{3.0.18}$$

alors les équations (3.0.8) et leurs puissances successives nous permettent d'extraire les dérivées partielles $\partial^{k_1+...+k_\ell}\tau(E,t)/\partial t_1^{k_1}...\partial t_\ell^{k_\ell}$, evaluées en $t=0$, en termes des opérateurs différentiels $\mathcal{A}_k$ en les points frontières a_i de la réunion disjointe $E = \bigcup_{i=1}^{r}[a_{2i-1}, a_{2i}] \subset \mathbf{R}^+$,

$$\mathcal{A}_k = \sum_{i=1}^{2r} a_i^{k-m} f(a_i)\frac{\partial}{\partial a_i} \quad k = 1,2,3,..., \tag{3.0.19}$$

où $m = \max(\deg f - 1, \deg g)$. En substituant les dérivées partielles en t dans l'équation KP (2.6.6), l'on trouve une hiérarchie d'équations analogues aux équations (2.6.8). Au cas, où la frontière de E est un point a, les équations se réduisent aux équations de Painlevé.

Actuellement, la théorie des matrices aléatoires joue un rôle réel en mathématiques; elle intervient non seulement dans l'étude des écarts entre zéros de la fonction zêta de Riemann, mais leur importance a été observée dans le contexte des billards de Sinaï chaotiques et, en général dans les flots géodésiques chaotiques. Sarnak [42] conjecture que le chaos conduit à la rigidité spectrale, typique des matrices aléatoires, tandis que le spectre d'un système intégrable est aléatoire (Poisson)!

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Adler: *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the KdV equations*, Inv. Math. **50**, 219–248 (1979).

[2] M. Adler, P. van Moerbeke: *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and Curves*, Adv. Math. **38**, 267–317 (1980).

[3] M. Adler, P. van Moerbeke: *Birkhoff strata, Bäcklund transformations and regularization of isospectral operators*, Adv. Math. **108**, 140-204 (1994).

[10] la convention est la suivante: $\frac{\partial}{\partial t_k} = 0$ pour $k \geq 0$ et $t_k = 0$ pour $k \leq 0$.

[4] M. Adler, P. van Moerbeke: *A matrix integral solution to two-dimensional $\mathcal{W}_p$-Gravity*, Comm. Math. Phys. **147**, 25-56 (1992).

[5] M. Adler, P. van Moerbeke: *Compatible Poisson structures and the Virasoro algebra*, Comm. Pure and Appl. Math. **47**, 5–37 (1994).

[6] M. Adler, A. Morozov, T. Shiota and P. van Moerbeke: *A matrix integral solution to $[P,Q] = P$ and matrix Laplace transforms*, Comm. Math. Phys. **180**, 233-263 (1996).

[7] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *A Lax pair representation for the vertex operator and the central extension*, Comm. Math. Phys. **171**, 547-588 (1995).

[8] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *From the w_∞-algebra to its central extension: a τ-function approach*, Physics Letters **A194**, 33–43 (1994).

[9] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *Random matrices, vertex operators and the Virasoro algebra*, Phys. Lett. **A208**, 67–78 (1995).

[10] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *Random matrices, Virasoro algebras and non-commutative KP*, Duke math. J. **94**, 379–431 (1998).

[11] B. Bakalov, E. Horozov and M. Yakimov: *General methods for constructing bispectral operators* , Phys. Letters A, **222** 59–66 (1996).

[12] Bessis, D., Itzykson, Cl., Zuber, J.-B.: *Quantum field theory techniques in graphical enumeration*, Adv. Appl. Math. **1**, 109-157 (1980).

[13] P. Bouwknegt, K. Schoutens: *W-symmetry in conformal field theory*, Phys. Rep. **223**, 183–286 (1993).

[14] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa: *Transformation groups for soliton equations*, Proc. RIMS Symp. Nonlinear integrable systems, Classical and quantum theory (Kyoto 1981), pp. 39-119. Singapore: World Scientific (1983).

[15] L. Dickey: Soliton equations and integrable systems, World Scientific (1991).

[16] L. Dickey: *Additional symmetries of KP, Grassmannian, and the string equation*, preprint 1992.

[17] L. Dickey: *Lectures on classical W-algebras (Cortona Lectures)*, Acta Appl. Math. **47**, 243-321 (1997).

[18] P. Di Francesco, Cl. Itzykson, J.-B. Zuber: *Classical $\mathcal{W}$-algebras*, Comm. Math. Phys. **140**, 543–567 (1991).

[19] F. Dyson: *Fredholm determinants and inverse scattering problems*, Commun. Math. Phys. **47**, 171–183 (1976).

[20] F. Dyson: *Statistical theory of energy levels of complex systems*, I, II and III, J. Math Phys **3** 140–156, 157–165, 166–175 (1962).

[21] J. Fastré: *Boson-correspondence for W-algebras, Bäcklund-Darboux transformations and the equation $[L,P] = L^n$*, Bull. des Sciences Math. (1997)

[22] V.A. Fateev, S.L. Lukyanov: *Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory*, Int. J. Modern Phys. **A3** 507 (1988).

[23] L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf: *On Hamiltonian reductions of the Wess-Zumino-Novikov-Witten theories*, Phys. reports **222(1)**,1-64 (1992).

[24] E. Frenkel, V. Kac, A. Radul, W. Wang: $\mathcal{W}_{1+\infty}$ *and* $\mathcal{W}_{gl_N}$ *with central charge* N, Comm. Math. Phys. **170**, 337-357 (1995).

[25] E. Frenkel and N. Reshetikin: *Quantum affine algebras and deformations of the Virasoro and W-algebras*, Comm. Math. Physics (1997).

[26] I.M. Gardner: *KdV equation and generalizations IV*, J. Math. Phys. **12**, 1548–1551 (1971).

[27] I.M. Gel'fand, L. Dickey: *Family of Hamiltonian structures connected with integrable non-linear differential equations*, Funct. Anal. Appl. **2**, 92–93 (1968).

[28] I.M. Gel'fand, D.B. Fuks: *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle*, Funct. Anal. Appl. **2**, 92–93 (1968).

[29] J.-L. Gervais: *Infinite family of polynomial functions of the Virasoro generators with vanishing Poisson bracket*, Phys. letters 16013, 277 (1985).

[30] L. Haine, E. Horozov: *Toda Orbits of Laguerre Polynomials and Representations of the Virasoro Algebra*, Bulletin des Sciences Math. (1993).

[31] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato: *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent*, Physica 1D, 80–158 (1980).

[32] V. Kac, A. Radul: *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Comm. Math. Phys. **157**, 429-457 (1993).

[33] V.G. Kac, A.K. Raina: Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie Algebras, Adv. Series Math. Phys. vol. 2, 1987.

[34] V. Kac, A. Schwarz: *Geometric interpretation of partition function of* $2D$*-gravity*, Phys. lett. **257B**, 329-334 (1991).

[35] A.A. Kirillov: *Orbits of the group of diffeomorphisms of a circle and local Lie superalgebras*, Funkt. Anal. Appl. **21**, 19-55 (1981).

[36] M. Kontsevich: *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147**, 1-23 (1992).

[37] F. Magri: *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. **19**, 1156–1162 (1978).

[38] M.L. Mehta: Random matrices, 2nd ed. Boston: Acad. Press, 1991.

[39] A.Y. Orlov, E.I. Schulman: *Additional Symmetries for Integrable and Conformal Algebra Representation*, Letters in Math. Phys. **12**, 171-179 (1986).

[40] C.E. Porter and N. Rosenzweig, *Statistical properties of atomic and nuclear spectra*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Serie A, VI Physica **44**, 1-66 (1960); *Repulsion of energy levels* in complex atomic spectra, Phys. Rev **120**, 1698–1714 (1960).

[41] A. Radul: *Lie algebras of differential operators, their central extensions, and W-algebras*, Funct. Anal. Appl. **25**, 33-49 (1991).

[42] P. Sarnak: *Arithmetic quantum chaos*, Israel Math. Conf. Proceedings, **8**, 183–236 (1995).

[43] K. Takasaki, T. Takebe: *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, Reviews in Math. Phys. **7**, 743–808 (1995) .

[44] C.A. Tracy, H. Widom: *Level-spacings distribution and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159**, 151-174 (1984).

[45] K. Ueno, K. Takasaki: *Toda Lattice Hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. **4**, 1-95 (1984).

[46] J. van de Leur: *The $\mathcal{W}_{1+\infty}(gl_s)$-symmetries of the s-component KP hierarchy*, J. of Math. Phys. **37**, 2315–2337 (1996).

[47] P. van Moerbeke: Integrable foundations of string theory, in Lectures on Integrable systems, Proceedings of the CIMPA-school, 1991, Ed.: O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach, World scientific, 163–267 (1994).

[48] P. van Moerbeke: The spectrum of random matrices and integrable systems, Group 21, Physical applications and Mathematical aspects of Geometry, Groups and Algebras, Vol.II, 835-852, Eds.: H.-D. Doebner, W. Scherer, C. Schulte, World scientific, Singapore, 1997.

[49] P. van Moerbeke: Cours à l'Institut H. Poincaré (automne 1996).

[50] E.P. Wigner: *On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **47**, 790–798 (1951).

[51] Witten, Ed.: *Two-dimensional gravity and intersection theory of moduli space*, Harvard University lecture, May 1990, Journal of diff. geometry, 1991.

[52] V. Zakharov, L.D. Faddeev: *The KdV equation is a completely integrable Hamiltonian system*, Funct. Anal. Appl. **5**, 18–27 (1971).

[53] A.B. Zamolodchikov: *Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory*, Theoret. Math. Phys. **65**, 1205 (1985).

Pierre VAN MOERBEKE

Université de Louvain
Département de Mathématiques
2, chemin du Cyclotron
B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
BELGIQUE
E-mail : vanmoerbeke@geom.ucl.ac.be

et

Brandeis University
WALTHAM, Mass 02454, USA
E-mail : vanmoerbeke@math.brandeis.edu