Astérisque

OLIVIER DEBARRE

Variétés de Fano

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 827, p. 197-221

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__197_0>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1997
49ème année, 1996-97, n° 827

VARIÉTÉS DE FANO

par **Olivier DEBARRE**

1. INTRODUCTION

Une variété de Fano est une variété algébrique projective lisse connexe, définie sur un corps algébriquement clos, dont le fibré anticanonique (c'est-à-dire le déterminant du fibré tangent) est ample. Sur le corps des complexes, cela signifie que la première classe de Chern de la variété est représentée par une forme définie positive. On peut donner comme exemples les intersections complètes lisses dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ d'hypersurfaces dont la somme des degrés est au plus n, et, en caractéristique nulle, les variétés projectives homogènes sous un groupe algébrique linéaire connexe.

Leur géométrie très riche a permis de déterminer complètement les variétés de Fano complexes de dimension au plus 3 : en dimension 1, il n'y a que la droite projective; en dimension 2, ce sont les surfaces dites de Del Pezzo (c'est-à-dire $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et les éclatés de $\mathbf{P}^2$ en au plus 8 points en position générale, soit 10 familles); en dimension 3, elles se répartissent en 104 familles ([I1], [I2], [Sh], [MM]; *cf.* aussi [SB] et [Me] pour le cas de la caractéristique non nulle, et [Ka] pour le cas singulier). Fano s'intéressait principalement à la question de la rationalité de ces variétés en dimension 3 ([F]).

Le but de cet exposé est de montrer qu'*étant donnés un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle et un entier n, il n'y a qu'un nombre fini, borné par une fonction explicite de n, de types de déformation de variétés de Fano de dimension n définies sur k* (§5, th. 8).

Les courbes sur une variété, ou plus précisément les morphismes d'une courbe dans cette variété, sont récemment apparus comme un outil de première importance pour l'étude des propriétés géométriques de la variété. On pense bien sûr aux travaux de Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, à ceux de Kontsevich et Manin sur les invariants de Gromov-Witten et la cohomologie quantique, mais aussi au programme

de Mori de classification des variétés algébriques (« Minimal Model Program »). C'est d'ailleurs ce point de vue qui a permis à Mori de démontrer en 1979 que toute variété projective lisse dont le fibré tangent est ample est isomorphe à un espace projectif (conjecture de Hartshorne). Il établit au passage que toute variété de Fano X non réduite à un point est *uniréglée* : par chaque point passe une courbe rationnelle, c'est-à-dire l'image d'un morphisme non constant de la droite projective dans X. C'est cette idée (il y a « beaucoup » de courbes rationnelles sur une variété de Fano) qui est à la base de la démonstration du résultat de finitude ci-dessus.

Le plan de l'exposé est le suivant : dans le § 2, on rappelle brièvement comment Mori démontre que les variétés de Fano sont uniréglées, à l'aide de son célèbre « lemme de cassage ». En 1992, Campana, et indépendamment Kollár, Miyaoka et Mori, montrent que les variétés de Fano sont *rationnellement connexes* (r.c.) : deux points quelconques peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles. Ce théorème est démontré dans le § 3 : on construit, pour toute variété normale et propre, une sorte de quotient pour la relation d'équivalence « être relié par une chaîne de courbes rationnelles », et l'on démontre, en adaptant le lemme de cassage de Mori, que, pour les variétés de Fano, ce quotient n'a qu'un point.

L'étape suivante est due à Kollár, Miyaoka et Mori, qui montrent qu'en caractéristique nulle, deux points quelconques d'une variété r.c. lisse sont reliés par *une* courbe rationnelle ; elle est démontrée dans le § 4. Il s'agit de « lisser » une chaîne rationnelle reliant deux points ; on introduit à cet effet la notion de courbe rationnelle libre ou très libre (*cf.* déf. 2), qui fournit par ailleurs de très jolies caractérisations : pour qu'une variété lisse projective soit uniréglée (resp. r.c.), il faut et il suffit qu'elle possède *une* courbe rationnelle libre non constante (resp. très libre). Cela permet de montrer sans effort que les variétés complexes projectives lisses r.c. sont simplement connexes. On a de plus, dans les § 3 et 4, contrôlé le degré des courbes rationnelles qui interviennent ; une astuce de Fano permet alors, dans le § 5, de majorer, pour toute variété de Fano X de dimension n, l'entier $c_1(X)^n$ par une constante ne dépendant que de n (on donne aussi la borne, meilleure, que Nadel et Campana ont obtenu sous l'hypothèse que le groupe de Néron-Severi de la variété est de rang 1). On en déduit, en suivant Kollár, le résultat de finitude cherché.

Les variétés de Fano lisses (les seules que l'on considère ici) ont un intérêt essentiellement historique. Selon le programme de Mori, les objets vraiment importants sont d'une part les variétés de Fano *singulières* (« à singularités terminales »), d'autre part les variétés r.c.. Ces dernières, *a priori* plus générales que les variétés unirationnelles, mais d'une histoire plus récente, se sont révélées d'un maniement nettement plus

commode. Elles semblent constituer, selon les spécialistes, *la* bonne notion de variété « proche » de l'espace projectif.

Passons au point de vue de la géométrie différentielle : la théorie de Calabi-Yau entraîne que les variétés de Fano complexes sont les variétés kählériennes compactes dont la courbure de Ricci est définie positive ([Y1], [Y2], [Bou], [Be], 11.16.ii)) ; cela permet d'ailleurs de (re)démontrer qu'elles sont simplement connexes ([Be], th. 11.26). Les variétés compactes admettant une métrique de Kähler-Einstein de signe positif sont des variétés de Fano (mais on ne les obtient pas toutes ainsi : l'existence d'une telle métrique force le groupe d'automorphismes de la variété à être réductif, ce qui exclut par exemple l'éclaté du plan projectif en un ou deux points ; *cf.* [Be], cor. 11.54) ; on peut montrer le résultat de finitude pour ces variétés par des méthodes de géométrie différentielle (*cf.* 5.1).

Dans ce contexte, LeBrun et Salamon ([LBS]) ont donné une jolie application du résultat de finitude exposé ici : ils montrent qu'à isométrie et homothétie près, il n'y a, en chaque dimension $4n$, qu'un nombre fini de variétés riemanniennes compactes « quaternion-kählériennes » (c'est-à-dire dont l'holonomie est contenue dans le sous-groupe $\mathrm{Sp}(n)\,\mathrm{Sp}(1)$ de $\mathrm{SO}(4n)$) à courbure scalaire strictement positive. Leur point de départ est que l'espace des twisteurs attaché à une telle variété est une variété de Fano. Les seuls exemples connus de ces variétés sont des espaces symétriques homogènes (dits « espaces de Wolf »), et l'on soupçonne que ce sont les seuls (c'est le cas en dimension 4 et 8).

Quelques conventions : tous les schémas sont définis sur un corps algébriquement clos ; une variété est un schéma intègre de type fini ; si X est une variété lisse, on note T_X son fibré tangent et K_X un diviseur canonique. On rappelle qu'un point très général d'une variété est un point situé en dehors d'une réunion dénombrable de fermés propres.

Je voudrais remercier Frédéric Campana et János Kollár de l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de la rédaction de ces notes, ainsi que Michèle Audin, Christophe Margerin et Jean-Yves Mérindol de leurs conseils.

2. LES VARIÉTÉS DE FANO SONT UNIRÉGLÉES

Dans [Mo], Mori démontre, outre la conjecture de Hartshorne, que les variétés de Fano sont uniréglées. La démonstration, exposée au séminaire Bourbaki ([De]), utilise un astucieux « lemme de cassage » , qui permet non seulement de produire, en passant

à la caractéristique non nulle et en déformant une courbe passant par un point fixé, la courbe rationnelle cherchée, mais aussi d'en borner le degré. Nous décrivons dans ce numéro les outils utilisés.

Soient X une variété projective et H un diviseur ample sur X. Pour toute courbe projective C et tout morphisme $f : C \to X$, on appelle H-degré de f le degré du faisceau inversible f^*H. Lorsque X est une variété de Fano, le degré d'une courbe sera toujours, sauf mention du contraire, son $(-K_X)$-degré.

2.1. Espaces de courbes

Soit C une courbe projective réduite; on note $g(C)$ son genre, c'est-à-dire l'entier $1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. Soit B un sous-schéma fini du lieu lisse de C défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_B$, soit X une variété projective lisse et soit $g : B \to X$ un morphisme. D'après Grothendieck ([G]), il existe un schéma $\mathrm{Mor}(C, X)$ paramétrant les morphismes de C dans X dont un sous-schéma fermé $\mathrm{Mor}(C, X; g)$ paramètre les morphismes de C dans X qui étendent g. Nous admettrons le résultat suivant (*cf.* [K1], p. 95), qui permet de minorer la dimension de ces espaces.

PROPOSITION 1.— *Soit $f : C \to X$ un morphisme qui étend g. L'espace tangent à $\mathrm{Mor}(C, X; g)$ au point $[f]$ s'identifie à $H^0(C, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_B)$ et chaque composante de $\mathrm{Mor}(C, X; g)$ passant par $[f]$ est de dimension au moins*

$$\chi(C, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_B) = -(K_X \cdot f_*C) + (1 - g(C) - \deg B) \dim X .$$

2.2. Lemme de cassage (« bend and break ») de Mori

Il s'agit du résultat suivant, qui sert à fabriquer des courbes rationnelles de bas degré sur les variétés. On renvoie à [Mo] pour la démonstration (ou à celle du th. 2 pour celle de a)).

PROPOSITION 2 (Mori).— *Soient X une variété projective lisse, C une courbe projective lisse, c et c' des points de C et $f : C \to X$ un morphisme.*

a) *Si $\mathrm{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$ est de dimension au moins 1 en $[f]$, il existe une courbe rationnelle de X passant par $f(c)$.*

b) *Si C est rationnelle et que $\mathrm{Mor}(C, X; f|_{\{c,c'\}})$ est de dimension au moins 2 en $[f]$, on peut déformer f_*C en un cycle connexe non intègre, passant par $f(c)$ et $f(c')$, dont toutes les composantes sont rationnelles.*

Sur une variété de Fano X, l'hypothèse de b) est satisfaite dès que le degré de la courbe est au moins $\dim X + 2$ (prop. 1). Toute courbe rationnelle sur X peut donc

se « casser », en fixant deux points, en un cycle dont les composantes sont rationnelles de degré au plus $\dim X + 1$.

2.3. Les variétés de Fano sont uniréglées

Nous indiquons brièvement comment Mori démontre ce résultat. La seconde partie de son lemme de cassage lui permet même de construire par chaque point des courbes rationnelles de bas degré.

PROPOSITION 3.— *Soient* X *une variété de Fano non réduite à un point et* x *un point de* X. *Il existe une courbe rationnelle de* X *non constante passant par* x, *de degré au plus* $\dim X + 1$.

Idée de la démonstration. Il suffit de traiter le cas où le corps de base est de caractéristique non nulle. Soient C une courbe lisse et $f : C \to X$ un morphisme non constant dont l'image contient x. En composant f avec une puissance convenable du morphisme de Frobenius, on peut supposer $-(K_X \cdot f_*C) > g(C) \dim X$; les prop. 1 et 2.a) entraînent qu'il existe une courbe rationnelle $g : \mathbf{P}^1 \to X$ vérifiant $g(0) = x$. Supposons g de degré minimal ; le dernier paragraphe de 2.2 entraîne que son degré est au plus $\dim X + 1$. ∎

On dit qu'une variété X de dimension n est *uniréglée* s'il existe une variété Y de dimension $n - 1$ et un morphisme dominant $\mathbf{P}^1 \times Y \to X$ (un point n'est pas uniréglé).

3. CONNEXITÉ RATIONNELLE

Nous allons maintenant montrer que les variétés de Fano contiennent « beaucoup » de courbes rationnelles : non seulement il en passe une par chaque point, mais deux points quelconques peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles. On définit précisément cette propriété de « connexité rationnelle » en 3.1. En 3.2, on construit, pour toute variété propre et normale, une sorte de quotient pour la relation d'équivalence « être relié par une chaîne de courbes rationnelles » ; on démontre en 3.3, en adaptant les idées de Mori exposées au § 2, que ce quotient est réduit à un point pour les variétés de Fano.

3.1. Variétés rationnellement connexes (r.c.)

DÉFINITION 1.— *Soit* X *une variété définie sur un corps algébriquement clos non dénombrable. On dit que* X *est* rationnellement connexe (r.c.) *si deux points très*

généraux de X *peuvent être reliés par une courbe connexe de* X *dont toutes les composantes sont rationnelles.*

On dira aussi que deux points très généraux peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. Une variété uniréglée, ou réduite à un point, est r.c.. Cette propriété n'est pas une notion birationnelle : un cône sur une courbe elliptique est r.c., mais ne l'est plus si l'on retire son sommet (*cf.* cependant le paragraphe qui suit le cor. 1 de 4.3). Toute variété unirationnelle est r.c. ; on s'attend à ce que la plupart des variétés lisses r.c. ne soient pas unirationnelles, mais aucun exemple n'est connu.

La propriété de connexité rationnelle ne dépend pas du corps sur lequel la variété est définie ; on peut donc l'étendre à un corps de base algébriquement clos quelconque : une variété X définie sur un corps algébriquement clos k est r.c. s'il existe une extension algébriquement close non dénombrable K de k telle que $X \times_k K$ vérifie la définition 1. On pourra consulter [K1], p. 199, pour une définition plus naturelle (*attention :* notre terminologie est celle de [C1], pas celle de [K1] : nos variétés r.c. sont ses « rationally chain connected varieties »). On obtiendra en 4.3, cor. 1, diverses caractérisations des variétés r.c. en caractéristique nulle.

Lorsque X est *propre*, le schéma qui paramètre les 1-cycles de X dont les composantes sont rationnelles est propre ([K1], prop. 2.2, p. 103) ; si X est r.c., deux points *quelconques* de X peuvent être reliés par une chaîne rationnelle.

3.2. Quotient rationnel

Les résultats de ce numéro, présentés avec des démonstrations très succinctes, sont dus principalement à Campana ([C1], [C2]), sauf la majoration sur la longueur des chaînes du lemme 2, qui est due à Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM3]).

Soit X une variété ; on peut définir une relation d'équivalence sur X en décrétant que deux points sont en relation s'ils peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. L'ensemble des classes d'équivalence n'est pas en général une variété algébrique (il existe des variétés projectives complexes lisses contenant une infinité dénombrable de courbes rationnelles), mais on peut quand même construire une sorte de quotient. Partons d'une situation plus générale : on se donne un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ T & & \end{array}$$

Pour tout point t de T, on note $\mathcal{C}_t$ la fibre $\pi^{-1}(t)$; on dit que deux points

x et x' de X peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur m s'il sont égaux ou s'il existe des points $t_1, \ldots, t_m$ de T tels que $F(C_{t_1} \cup \cdots \cup C_{t_m})$ soit connexe et contienne x et x'. On dit que deux points de X sont T-équivalents s'il peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur quelconque.

Lemme 1.— *On suppose* X *normale,* F *plat, et* π *plat à fibres irréductibles. Il existe un ouvert dense* X^0 *de* X *et un morphisme surjectif* $\tau : X^0 \to Y$ *vérifiant :*

a) *chaque fibre de* τ *est connexe et son adhérence dans* X *est l'adhérence d'une classe de* T*-équivalence ;*

b) *deux points généraux d'une fibre de* τ *peuvent être reliés par une* T*-chaîne de longueur au plus* $\dim X - \dim Y$.

Esquisse de démonstration. Pour chaque point x de X, notons $V_m(x)$ l'ensemble (constructible) des points de X qui peuvent être reliés à x par une T-chaîne de longueur m et posons $d(x) = \max_{m \geq 1} \dim \overline{V_m(x)}$. Le point crucial est que la suite de fermés $(\overline{V_m(x)})$ est *stationnaire* pour $m \geq d(x)$ ([KMM3], lemma 1.3, p. 768). On en déduit l'existence d'un ouvert X^1 dense dans X sur lequel $d(x)$ est constant égal à d, et d'un morphisme $\tau : X^1 \to \mathrm{Hilb}(X)$ qui à x associe $\overline{V_d(x)}$. Pour x et x' dans X^1, on a les implications

$$\begin{aligned} \tau(x) = \tau(x') \;&\Rightarrow\; \overline{V_d(x)} = \overline{V_d(x')} \;\Rightarrow\; V_d(x) \cap V_d(x') \neq \varnothing \\ &\Rightarrow\; x' \in V_{2d}(x) \;\Rightarrow\; x' \in \overline{V_{2d}(x)} = \overline{V_d(x)}\,, \end{aligned}$$

et inversement

$$x' \in V_d(x) \;\Rightarrow\; V_d(x') \subset V_{2d}(x) \subset \overline{V_{2d}(x)} = \overline{V_d(x)} \;\Rightarrow\; \overline{V_d(x')} \subset \overline{V_d(x)}\,,$$

d'où $\overline{V_d(x')} = \overline{V_d(x)}$ puisque l'on a aussi $x \in V_d(x')$. Les fibres de τ sont donc les $\overline{V_d(x)} \cap X^1$; on prend pour Y un sous-ensemble dense de l'image de τ localement fermé dans Hilb(X), et pour X^0 son image inverse par τ. Si x' est général dans $\tau^{-1}(\tau(x))$, il est dans $V_d(x)$, donc peut être relié à x par une T-chaîne de longueur au plus $d = \dim X - \dim Y$. ∎

On a un énoncé analogue lorsque F et π sont propres, mais les chaînes deviennent plus longues.

Lemme 2 ([K1], th. 4.17, p. 219).— *On suppose* X *propre et normale,* F *propre, et* π *propre à fibres connexes. Il existe un ouvert dense* X^0 *de* X *et un morphisme* propre $\rho : X^0 \to Z$ *dont les fibres sont des classes de* T*-équivalence de* X*, et tel que deux points d'une fibre de* ρ *puissent être reliés par une* T*-chaîne de longueur au plus* $2^{\dim X - \dim Z} - 1$.

Esquisse de démonstration. En rétrécissant T et $\mathcal{C}$, on se retrouve dans la situation du lemme 1, qui fournit un morphisme $\tau : X^0 \to Y$ que l'on peut supposer, quitte à rétrécir Y, équidimensionnel. On construit alors une compactification normale $\overline{Y}$ de Y, une variété normale X′ et un morphisme birationnel propre $u : X' \to X$ tels que $\tau' : X' \xrightarrow{u} X \dashrightarrow \overline{Y}$ soit un morphisme propre équidimensionnel à fibres connexes. Deux points *quelconques* d'une fibre de τ' peuvent être joints par une T-chaîne de longueur au plus $\dim X - \dim Y$: l'ensemble des points de $X' \times_{\overline{Y}} X'$ qui vérifient cette propriété est fermé, contient un ouvert non vide par le lemme 1, tandis que les hypothèses entraînent que $X' \times_{\overline{Y}} X'$ est irréductible.

On procède par récurrence sur la dimension de X. Si Y a même dimension que X, on prend $\rho = \tau$; sinon, l'hypothèse de récurrence appliquée au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} \times_X X' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\tau'} & \overline{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \\ T & & & & \end{array}$$

nous fournit un ouvert dense Y^0 de Y et un morphisme propre $\rho_Y : Y^0 \to Z$ vérifiant les conclusions du lemme. On en déduit, en posant $X'^0 = \tau'^{-1}(Y^0)$, un morphisme propre $\rho' : X'^0 \to Z$. Si deux points de X'^0 sont T-équivalents, il en de même de leur image par τ', qui sont donc dans la même fibre de ρ_Y. Inversement, supposons $\rho'(x'_1) = \rho'(x'_2)$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $\tau'(x'_1)$ et $\tau'(x'_2)$ sont reliés par une T-chaîne de longueur au plus $2^{\dim Y - \dim Z} - 1$, que l'on relève dans X′. Les points de contacts des maillons sont dans les mêmes fibres de τ', de sorte que x'_1 et x'_2 peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur au plus

$$2^{\dim Y - \dim Z} - 1 + (\dim X - \dim Y)(2^{\dim Y - \dim Z}) \leq 2^{\dim X - \dim Z} - 1 .$$

Il suffit alors de vérifier que $\rho' : X'^0 \to Z$ se factorise à travers u en un morphisme propre $\rho : X^0 \to Z$ qui vérifie les propriétés demandées. ∎

Soient X une variété propre et $\rho : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle. On dit que ρ est *presque régulière* s'il existe un ouvert non vide dense X^0 de X et un sous-schéma Y^0 de Y tels que ρ se restreigne en un morphisme $\rho^0 : X^0 \to Y^0$ *propre* surjectif. En d'autres termes, le lieu d'indétermination de ρ ne domine pas l'image de ρ. Si ρ est presque régulière, on dit que ρ est r.c. si ses fibres générales sont r.c. et que $\rho^0_* \mathcal{O}_{X^0} \simeq \mathcal{O}_{Y^0}$.

Revenons au problème de la construction d'un quotient pour la relation d'équivalence où deux points sont équivalents s'ils sont reliés par une chaîne rationnelle. Etant donnée une variété propre X, nous construisons une application rationnelle $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ dominante, presque régulière et r.c. qui est *maximale*, c'est-à-dire qui se factorise à travers toute autre telle application rationnelle. Ses fibres très générales sont des classes d'équivalence pour cette relation.

THÉORÈME 1 (Campana).— *Soit* X *une variété propre et normale. Il existe une application rationnelle* $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ *dominante presque régulière r.c. maximale. Si* X *est définie sur un corps algébriquement clos non dénombrable, toute courbe rationnelle de* X *rencontrant une fibre très générale de* ρ *est contenue dans cette fibre.*

Soit $(T_m)_{m\geq 1}$ une famille croissante de schémas dont la réunion paramètre les 1-cycles connexes de X à composantes rationnelles. Le lemme 2 fournit pour chaque m un morphisme propre $\rho_m : X_m^0 \to Z_m$. Comme les classes de T_m-équivalence grandissent avec m, la dimension de Z_m diminue. Soient n un entier tel que $\dim Z_n$ soit minimal, et m un entier plus grand que n. Le lemme 2 entraîne que pour x général, les classes de T_m et de T_n-équivalence de x sont irréductibles; comme elles ont même dimension, elles sont égales. Il s'ensuit que pour x très général, $\rho_n^{-1}(\rho_n(x))$ est l'ensemble des points qui peuvent être joints à x par une chaîne rationnelle.

Soient X^0 un ouvert dense de X et $\tau : X^0 \to Y$ un morphisme propre r.c.; la propriété que l'on vient de démontrer entraîne qu'une fibre très générale de τ est contenue dans une fibre de ρ_n. En caractéristique nulle, on en déduit la factorisation. En caractéristique non nulle, il faut utiliser le fait que τ ne peut se factoriser à travers un morphisme purement inséparable. ∎

L'application rationnelle $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ est bien déterminée à isomorphisme birationnel près; on l'appelle le *quotient rationnel* de X (« MRC-fibration » dans la terminologie de [K1]). Pour que X soit r.c. (resp. uniréglée), il faut et il suffit que $R(X)$ soit un point (resp. que $\dim R(X) < \dim X$).

Si la caractéristique du corps de base est nulle, et si X est propre et lisse, la dimension de $R(X)$ est invariante par déformation ([KMM2], th. 2.15, ou [K1], th. 5.9, p.226), donc aussi la propriété d'être r.c. ou uniréglé; on retrouve ainsi un résultat de Fujiki ([Fu]) et Levine ([Le]).

Le problème principal concernant le quotient rationnel est le suivant :

Conjecture.— *Soient* X *une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et* $X \dashrightarrow R(X)$ *son quotient rationnel. La variété*

R(X) *n'est pas uniréglée.*

C'est équivalent ([K1], prop. 5.6.3, p. 224) à :

Conjecture'.— *Soient* X *une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et* $X \to \mathbf{P}^1$ *un morphisme dont les fibres lisses sont r.c.. Alors* X *est r.c..*

Cela revient à montrer que $X \to \mathbf{P}^1$ a une multisection rationnelle, ou mieux, que la fibre générique a un point rationnel sur $K(\mathbf{P}^1)$. C'est vrai lorsque c'est une courbe (théorème de Tsen), ou une surface de Del Pezzo ([CT], [M]), ou un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire (théorème de Chevalley-Springer; *cf.* [S], III-14-16 et [Bor], 18.2).

3.3. Connexité rationnelle des variétés de Fano

On a vu (§ 2) que par chaque point d'une variété de Fano X passe une courbe rationnelle. Le théorème suivant généralise ce résultat : il s'agit d'adapter les méthodes de Mori pour construire une telle courbe qui ne soit pas contenue dans une fibre d'une application rationnelle presque régulière dominante $X \dashrightarrow Z$.

THÉORÈME 2 ([C1], [KMM3]).— *Soient* X *une variété de Fano,* $\rho : X \dashrightarrow Z$ *une application rationnelle presque régulière dominante, et* F *une fibre générale de* ρ. *Si* Z *n'est pas réduit à un point, il existe une courbe rationnelle de* X *rencontrant* F *qui n'est pas contenue dans* F.

La courbe rationnelle cherchée une fois trouvée, on peut, grâce au dernier paragraphe de 2.2, la casser en courbes rationnelles de degré au plus $\dim X + 1$, dont l'une au moins devra rencontrer F sans être contenue dans F. On peut donc (*cf.* [Mo]) se restreindre au cas où la caractéristique du corps de base est non nulle; on peut aussi supposer celui-ci non dénombrable. Soit X^0 un ouvert dense de X sur lequel ρ est propre. On raisonne par l'absurde, en supposant que *toute courbe rationnelle de* X *rencontrant* F *est contenue dans* F. Il existe une courbe projective lisse C (irrationnelle), avec un point c et un morphisme $f : C \to X$, tels que $\rho f(c)$ soit sur F et que ρf ne soit pas constant. On fixe enfin un diviseur ample sur Z à l'aide duquel on mesurera le degré des courbes. Il existe un réel λ strictement positif tel que pour toute courbe lisse D et tout morphisme $g : D \to X$ dont l'image rencontre X^0, on ait

$$\deg g_*D \geq \lambda \deg(\rho g)_*D \ .$$

Quitte à composer f avec une puissance convenable du morphisme de Frobenius,

on peut supposer

$$(\star) \qquad \lambda \deg(\rho f)_* C > g(C) \dim X .$$

Le choix de λ et la prop. 1 entraînent que $\mathrm{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$ est de dimension au moins 1 en $[f]$. Nous allons construire un morphisme $f' : C \to X$ vérifiant $\rho f' = \rho f$, de sorte que f' vérifiera encore la condition $(\star)$, et $\deg f'_* C < \deg f_* C$. On peut itérer cette construction, ce qui amène à une contradiction, puisque les degrés des morphismes obtenus vont en décroissant strictement.

Soit $\alpha : X' \to X$ un morphisme propre birationnel qui induise un isomorphisme au-dessus de X^0 et tel que $\rho' = \rho\alpha$ soit un *morphisme* de X' dans Z. Il existe un voisinage M de $[f]$ dans une composante de dimension au moins 1 de $\mathrm{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$ tel que l'évaluation se factorise en

$$C \times M \xrightarrow{e} X' \xrightarrow{\alpha} X .$$

Soient B^0 une courbe lisse irréductible, $B^0 \to M$ un morphisme non constant, et B une compactification normale de B^0. Soit $\varepsilon : S \to C \times B$ une suite d'éclatements telle que la composée

$$S \xrightarrow{\varepsilon} C \times B \overset{e}{\dashrightarrow} X'$$

soit un morphisme. Comme C est irrationnelle, les morphismes $C \to X$ correspondant aux points de B^0 ne peuvent tous provenir d'une reparamétrisation de f, de sorte que $e\varepsilon(S)$ est une surface. Si e est défini en tout point de $\{c\} \times B$, qu'il contracte alors en $f(c)$, il existe des voisinages affines V de $f(c)$ dans X et U de c dans C tels que $e(U \times B)$ soit contenu dans V. Comme B est complète, $\{c'\} \times B$ est contracté pour chaque c' dans U, et l'image de e est une courbe, ce qui est absurde.

Pour chaque point (c, b) en lequel e n'est pas défini, la fibre de $S \to B$ en b contient la réunion de C et d'une courbe connexe E à composantes rationnelles qui coupe C en c, mais qui n'est pas contractée par $e\varepsilon$. La restriction de $e\varepsilon$ à cette courbe induit un morphisme $f' : C \to X$ qui vérifie

$$\deg f'_* C = \deg f_* C - \deg f'_* E < \deg f_* C .$$

La courbe $e\varepsilon(E)$ est à composantes rationnelles et contient le point $f(c)$ de F, donc est contractée par ρ'. Cela entraîne que $\rho' e$ est définie sur $\{c\} \times B$, puis, par l'argument précédent, que $\rho' e\varepsilon(S)$ n'est pas une surface. C'est donc la courbe $\rho f(C)$, de sorte que $\rho f'(C) = \rho f(C)$. Ceci, comme on l'a déjà expliqué, mène à une contradiction, ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

COROLLAIRE.— *Soit* X *une variété de Fano de dimension* n. *Alors* X *est r.c. ; plus précisément, deux points de* X *peuvent être reliés par une chaîne rationnelle de degré au plus* $(n+1)(2^n-1)$.

Appliquons le théorème au quotient rationnel $X \dashrightarrow R(X)$; le th. 1 entraîne que R(X) est réduit à un point, de sorte que deux points de X peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. Grâce au dernier paragraphe de 2.2, on peut casser les maillons de cette chaîne jusqu'à ce qu'ils soient de degré au plus $n+1$. On conclut en appliquant le lemme 2 de 3.2, en prenant pour $\mathcal{C} \to T$ la famille des 1-cycles connexes de X de degré au plus $n+1$ à composantes rationnelles. ∎

On peut construire à l'aide de fibrés en coniques sur le plan projectif des familles de dimension arbitrairement grande de variétés r.c. birationnellement distinctes de dimension 3. Vu le th. 8, cela montre que « la plupart » des variétés r.c. ne sont pas birationnellement équivalentes à des variétés de Fano.

4. UNE PROPRIÉTÉ FORTE DE CONNEXITÉ RATIONNELLE

Deux points d'une variété r.c. projective et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle peuvent être reliés par une courbe rationnelle *irréductible.* Pour démontrer ce résultat de [KMM3], l'idée est simple : il suffit de « lisser » la chaîne rationnellle reliant les deux points. Il faut pour cela que ses maillons soient des morphismes *libres*, une notion définie en 4.1 ; intuitivement, cela signifie que les déformations du morphisme recouvrent la variété. Le résultat principal de 4.1. est la remarque élémentaire mais fort utile qu'une courbe rationnelle passant par un point très général d'une variété projective lisse est libre (en caractéristique nulle). On démontre en 4.2. les résultats de lissage nécessaires, tandis que le théorème principal fait l'objet de 4.3 ; la démonstration en est compliquée par le fait que l'on veut contrôler le degré des courbes construites. On termine en montrant en 4.4 que les variétés complexes projectives lisses r.c. (donc en particulier les variétés de Fano) sont simplement connexes.

4.1. Morphismes libres

Ce sont les morphismes de $\mathbf{P}^1$ dans une variété dont les déformations sont non-obstruées dans un sens fort.

DÉFINITION 2.— *Soient* X *une variété lisse et* $f : \mathbf{P}^1 \to X$ *un morphisme ; on écrit* $f^*T_X \simeq \bigoplus_{i=1}^{\dim X} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$. *On dit que* f *est* libre *(resp.* très libre*) si tous les* a_i *sont*

positifs (resp. strictement positifs).

Un morphisme constant $\mathbf{P}^1 \to X$ est libre, mais n'est très libre que si X est réduite à un point. Il est facile de caractériser géométriquement les morphismes libres.

PROPOSITION 4.— *Soient* X *une variété lisse projective et* $f : \mathbf{P}^1 \to X$ *un morphisme.*

a) *Si* f *est libre,* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ *est lisse en* $[f]$ *et la différentielle du morphisme d'évaluation* $e : \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \to X$ *est surjective en tout point de* $\mathbf{P}^1 \times [f]$.

b) *Si la différentielle de* e *est surjective en un point de* $\mathbf{P}^1 \times [f]$, *le morphisme* f *est libre.*

Si f est libre, $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1, f^*\mathrm{T}_X)$ est nul, et $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ est lisse en $[f]$ (prop. 1). La différentielle $de : \mathrm{T}_{\mathbf{P}^1,t} \oplus \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^1, f^*\mathrm{T}_X) \to \mathrm{T}_{X,f(t)} \simeq (f^*\mathrm{T}_X)_t$ en $(t, [f])$ est donnée par $de(a, \sigma) = df(a) + \sigma(t)$. Pour qu'elle soit surjective il faut et il suffit que l'évaluation $\mathrm{H}^0(\mathbf{P}^1, f^*\mathrm{T}_X) \to (f^*\mathrm{T}_X)_t$ le soit. Avec les notations de la définition 2, c'est équivalent au fait que chaque a_i est positif. ∎

Cette proposition signifie simplement que les déformations d'un morphisme libre recouvrent la variété, et qu'inversement, *en caractéristique nulle*, un élément général d'une famille de courbes qui recouvrent la variété est libre. On en déduit que pour qu'une variété lisse projective X définie sur un corps algébriquement clos *de caractéristique nulle* soit uniréglée, il faut et il suffit qu'il existe une courbe rationnelle libre non constante sur X (*cf.* [K1], th. 1.9, p. 188).

On montre de la même façon :

PROPOSITION 5.— *Soient* X *une variété lisse projective et* $f : \mathbf{P}^1 \to X$ *un morphisme.*

a) *Si* f *est très libre,* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto f(0))$ *est lisse en* $[f]$ *et la différentielle du morphisme d'évaluation* $e : \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto f(0)) \to X$ *est surjective en* $(\infty, [f])$. *La différentielle de l'évaluation* $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \to X \times X$ *est surjective en* $(0, \infty, [f])$.

b) *Si la différentielle de* e *est surjective en un point de* $\mathbf{P}^1 \times [f]$, *le morphisme* f *est très libre.*

Le résultat suivant dit qu'une courbe rationnelle passant par un point très général d'une variété lisse est libre (en caractéristique nulle).

PROPOSITION 6.— *Soit* X *une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Il existe un sous-ensemble* X^{libre} *de* X *dont le complémentaire est réunion dénombrable de fermés propres de* X, *tel que tout*

morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$ *dont l'image rencontre* X^{libre} *soit libre.*

Nous noterons $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ les composantes irréductibles de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ et $e_i : \mathbf{P}^1 \times M_i \to X$ les morphismes d'évaluation. Si e_i n'est pas dominant, on note G_i l'adhérence de son image. Si e_i est dominant, on note G_i le complémentaire d'un ouvert dense de X au-dessus duquel la différentielle de_i est surjective. Soit X^{libre} le complémentaire de la réunion des G_i. Soient $f : \mathbf{P}^1 \to X$ un morphisme dont l'image rencontre X^{libre}, et M_i une composante de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ qui contient $[f]$. Le morphisme e_i est dominant, et de_i est surjective en un point de $\mathbf{P}^1 \times [f]$. On conclut avec la prop. 4.b). ∎

Pour qu'une courbe rationnelle tracée sur une surface projective lisse soit libre, il faut et il suffit que son auto-intersection soit positive. Si $\widetilde{\mathbf{P}}^2$ est l'éclaté du plan projectif en un point, $(\widetilde{\mathbf{P}}^2)^{\text{libre}}$ est le complémentaire du diviseur exceptionnel. Il existe des surfaces contenant une infinité de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1 ; pour de telles variétés, X^{libre} n'est pas un ouvert.

On utilisera souvent la proposition en conjonction avec la remarque suivante : soient $\mathcal{C}$ un schéma irréductible, $\pi : \mathcal{C} \to T$ une courbe projective plate et $F : \mathcal{C} \to X$ un morphisme. Si l'image par F d'une fibre de π rencontre X^{libre}, il en est de même de l'image par F d'une fibre très générale de π : en effet, $X - X^{\text{libre}}$ est réunion d'une suite $(G_i)_{i\in\mathbf{N}}$, que l'on peut supposer croissante, de fermés propres de X ; si l'image par F de la courbe $\pi^{-1}(t)$ ne rencontre pas X^{libre}, celle-ci est contenue dans un $F^{-1}(G_i)$, de sorte que t n'appartient pas à l'intersection des ensembles $\pi(\mathcal{C} - F^{-1}(G_i))$, qui sont constructibles et contiennent chacun un ouvert dense. On exprime cela sous forme du principe suivant.

$(\mathcal{P})$ *Une déformation très générale d'un morphisme dont l'image rencontre* X^{libre} *a la même propriété.*

4.2. Lissage des courbes singulières

On appelle *arbre rationnel* une courbe projective connexe C de composantes rationnelles $C_1, \ldots, C_m$, que l'on peut numéroter de façon que chaque C_{i+1} $(i = 1, \ldots, m-1)$ rencontre $C_1 \cup \cdots \cup C_i$ en un seul point, qui est un point double ordinaire de C. Il est facile de construire une courbe lisse connexe T et une courbe projective plate $\mathcal{C} \to T$ dont l'une des fibres est C tandis que toutes les autres sont isomorphes à $\mathbf{P}^1$; on dit que $\mathcal{C} \to T$ est un *lissage* de C. On dit qu'un morphisme $f : C \to X$ est *lissable* s'il existe un lissage $\mathcal{C} \to T$ et un morphisme $F : \mathcal{C} \to X$ qui coïncide avec f sur C. Si $p_1, \ldots, p_r$ sont des points lisses de C, le lecteur définira

sans mal la propriété « f est *lissable* en laissant $f(p_1), \ldots, f(p_r)$ fixes ».

PROPOSITION 7.— *Soient* X *une variété projective lisse,* $C = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ *un arbre rationnel et* $f : C \to X$ *un morphisme.*

a) *Fixons un point* p *lisse sur* C. *Si la restriction de* f *à chaque* C_i *est libre, le morphisme* f *est lissable en une courbe rationnelle libre, en laissant* $f(p)$ *fixe.*

b) *Fixons sur chaque* C_i *un point* p_i *lisse sur* C. *Si la restriction de* f *à chaque* C_i *est très libre, le morphisme* f *est lissable en une courbe rationnelle très libre, en laissant les* $f(p_i)$ *fixes.*

Soit $\pi : \mathcal{C} \to T$ un lissage de C avec une section σ passant par p ; notons $g : \sigma(T) \to X \times T$ le morphisme $(f(p), \pi)$. Comme en 2.1, les T-morphismes de $\mathcal{C}$ dans $X \times T$ étendant g sont encore paramétrés par un T-schéma $\mathrm{Mor}_T(\mathcal{C}, X \times T; g)$ ([G]). On montre (*cf.* [K1], p. 95) que celui-ci est lisse en $[f]$ dès que $H^1(C, f^*T_X(-p))$ est nul. On vérifie que c'est le cas ici, de sorte qu'il existe une courbe lisse $T' \to \mathrm{Mor}_T(\mathcal{C}, X \times T; g)$ passant par $[f]$ et dominant T, ce qui prouve a). Le b) est analogue, une fois que l'on a vérifié que $H^1(C, f^*T_X(-p_1 \cdots - p_m))$ est nul. ∎

On appelle *peigne rationnel* un arbre rationnel C dont on peut noter les composantes $D, C_1, \ldots, C_m$ de façon que chaque C_i ne rencontre la réunion des autres composantes qu'en un seul point, qui est un point de D. On appelle les C_i les *dents* du peigne, et D sa *poignée*. Un sous-peigne de C est un peigne contenu dans C et contenant D. Le résultat suivant est plus difficile : on ne suppose plus que la restriction du morphisme à la poignée est libre, mais on obtient quand même un lissage partiel. Je renvoie à [K1], p. 157 pour la démonstration.

PROPOSITION 8.— *Soient* C *un peigne rationnel à* m *dents,* $p_1, \ldots, p_r$ *des points de sa poignée* D *lisses sur* C. *Soient* X *une variété projective lisse et* $f : C \to X$ *un morphisme dont la restriction à chaque dent de* C *est libre. Il existe un entier* m' *vérifiant*

$$m' \geq m - (K_X \cdot f_*D) - (r-1)\dim X - \dim_{[f|_D]} \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{p_1,\ldots,p_r\}})$$

et un sous-peigne C' *de* C *à* m' *dents tel que* $f|_{C'}$ *soit lissable en laissant les* $f(p_i)$ *fixes.*

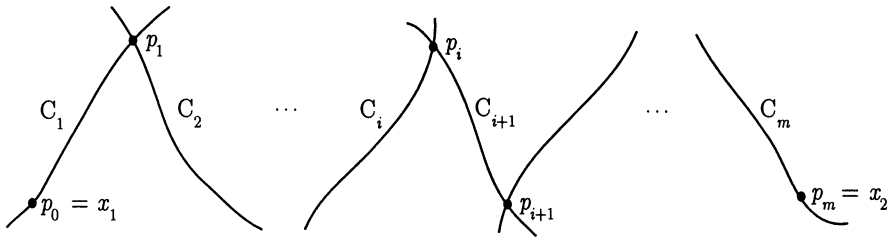
4.3. Une propriété forte de connexité rationnelle

Lorsque la caractéristique du corps de base est nulle, deux points quelconques d'une variété *lisse* r.c. peuvent être reliés par une courbe rationnelle *irréductible* (c'est faux pour les variétés singulières, comme le montre l'exemple du cône sur une courbe

elliptique). On aura en fait besoin d'un résultat plus précis permettant de contrôler le degré des courbes qui interviennent.

THÉORÈME 3.— *Soient* X *une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et* H *un diviseur ample tel que* $H - K_X$ *soit nef. On suppose qu'il existe* d *dans* $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ *tel que deux points quelconques de* X *puissent être reliés par une chaîne rationnelle de* H*-degré au plus* d*. Deux points quelconques de* X *peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible très libre de* H*-degré au plus* $2d(\dim X + d + 3)^d$.

On peut supposer le corps de base non dénombrable et X non réduite à un point. Soient x_1 et x_2 des points de X ; il existe une chaîne rationnelle joignant x_1 à x_2 que l'on décrit ainsi :



On note $f_i : \mathbf{P}^1 \to C_i \subset X$ la normalisation, en supposant $f_i(0) = p_{i-1}$ et $f_i(\infty) = p_i$. Par la prop. 2.b), on peut, si $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_i|_{\{0,\infty\}})$ est de dimension ≥ 2 en $[f_i]$, déformer f_i en une courbe réductible passant toujours par p_{i-1} et p_i. On supposera donc

$$\dim_{[f_i]} \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_i|_{\{0,\infty\}}) \leq 1$$

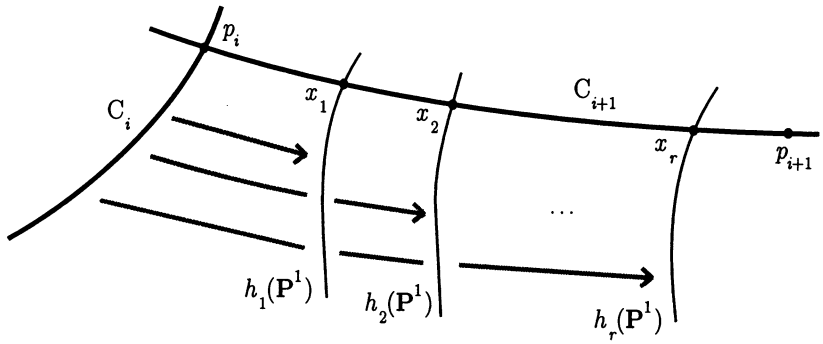
pour tout $i = 1, \ldots, m$. Puisque $H \cdot C_i > 0$, on remarquera que $m \leq d$.

Supposons tout d'abord que x_1 soit dans le sous-ensemble X^{libre} de X défini dans la prop. 6, de sorte que f_1 est libre. On va construire par récurrence sur i des morphismes $g_i : \mathbf{P}^1 \to X$ étendant $f_i|_{\{0,\infty\}}$, dont l'image rencontre X^{libre}, et dont le H-degré est inférieur à $d(\dim X + d + 3)^{i-1}$.

Pour $i = 1$, on prend $g_1 = f_1$. Supposons le morphisme g_i construit, avec $g_i(\infty) = p_i$; il est libre, de sorte que le morphisme d'évaluation $e : \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \to X$ est lisse sur $\mathbf{P}^1 \times [g_i]$ (prop. 4.a)).

Appliquons le principe $(\mathcal{P})$ de 4.1 à la famille de courbes paramétrée par l'image dans $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ d'une composante irréductible de $e^{-1}(C_{i+1})$ qui domine C_{i+1} et qui contient $(\infty, [g_i])$: pour tout entier r, il existe des points distincts $x_1, \ldots, x_r$ de $C_{i+1} - \{p_i, p_{i+1}\}$ et des déformations $h_1, \ldots, h_r : \mathbf{P}^1 \to X$ de g_i telles que l'image de

chaque h_j rencontre X^{libre} et $h_j(0) = x_j$. On obtient ainsi un *peigne rationnel* D (au sens de 4.2) et un morphisme $h : D \to X$ d'image $C_{i+1} \cup h_1(\mathbf{P}^1) \cup \cdots \cup h_r(\mathbf{P}^1)$ dont la restriction aux dents est libre.



Par la prop. 8, on peut lisser, en fixant p_i et p_{i+1}, un sous-peigne D′ de D qui a r' dents, où

$$(\mathcal{M}) \qquad \begin{aligned} r' &\geq r - (K_X \cdot C_{i+1}) - \dim X - \dim_{[f_{i+1}]} \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_{i+1}|_{\{0,\infty\}}) \\ &\geq r + (H - K_X) \cdot C_{i+1} - H \cdot C_{i+1} - \dim X - 1 \\ &\geq r - d - \dim X - 1 \,. \end{aligned}$$

Si on prend $r = \dim X + d + 2$ (ou $r = H \cdot C_{i+1} + \dim X + 2$ si $d = +\infty$), le peigne D′ a au moins une dent, donc son image par h rencontre X^{libre}. Par le principe $(\mathcal{P})$, une déformation lisse très générale g_{i+1} de $h|_{D'}$ a la même propriété, donc est libre. Comme les restrictions de h aux dents de D sont des déformations de g_i, on a

$$\begin{aligned} \deg g_{i+1} &\leq r \deg g_i + \deg C_{i+1} \\ &\leq (\dim X + d + 2) d (\dim X + d + 3)^{i-1} + d \\ &\leq d(\dim X + d + 3)^i \,. \end{aligned}$$

On arrive ainsi à une chaîne de courbes rationnelles libres joignant x_1 à x_2 ; son degré total est

$$\leq d + d(\dim X + d + 3) + \cdots + d(\dim X + d + 3)^{m-1} \leq d(\dim X + d + 3)^d \,,$$

puisque $m \leq d$. Par la prop. 7.a), on peut lisser une telle courbe en laissant x_2 fixe ; si M′ est le sous-schéma de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto x_2)$ qui paramètre les morphismes de degré au plus $d(\dim X + d + 3)^d$, le fait que x_1 soit quelconque dans X^{libre} entraîne

que l'évaluation $e : \mathbf{P}^1 \times \mathrm{M}' \to \mathrm{X}$ est dominante. Soit M une composante irréductible de M′ telle que $e|_{\mathbf{P}^1 \times \mathrm{M}}$ soit dominante; par la prop. 5.b), un élément général de M est très libre. On en déduit que deux points quelconques de X peuvent être reliés par une chaîne de *deux* courbes rationnelles très libres, de degré total au plus $2d(\dim \mathrm{X} + d + 3)^d$. Par la prop. 7.b), une telle courbe peut être lissée en une courbe très libre passant par les deux points donnés. ∎

COROLLAIRE 1 ([KMM2]).— *Soit* X *une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la variété* X *est r.c. ;*

(ii) *deux points quelconques de* X *sont contenus dans une courbe rationnelle irréductible ;*

(iii) *tout sous-ensemble fini de* X *est contenu dans une courbe rationnelle irréductible ;*

(iv) *il existe une courbe rationnelle très libre sur* X.

Supposons (i) vérifiée; le théorème entraîne (ii), et même (iii) (il suffit de lisser, en utilisant la prop. 7.b), un arbre rationnel à composantes très libres contenant l'ensemble en question), ainsi que (iv). Les implications (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) sont évidentes, et (iv) ⇒ (i) résulte de la prop. 5.a). ∎

On peut en fait se passer de l'hypothèse « X projective » dans ce corollaire (*cf.* [K1], th. 3.7, p. 202 et th. 3.10.3, p. 205). On en déduit que l'image par un morphisme dominant d'une variété *lisse* r.c. définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est r.c..

Il faut aussi mentionner une très jolie généralisation commune du corollaire et de la remarque qui précède la prop. 5 : sous les hypothèses du corollaire, et avec les notations de 3.2, $\dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{R}(\mathrm{X})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un morphisme libre $f : \mathbf{P}^1 \to \mathrm{X}$ vérifiant $f^*\mathrm{T}_\mathrm{X} \simeq \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$ avec $a_1, \ldots, a_r > 0$ (*cf.* [K1], th. 5.8, p. 225).

COROLLAIRE 2.— *Soit* X *une variété de Fano de dimension* n *définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Deux points de* X *peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible de degré au plus*

$$d(n) = 2(n+1)(2^n - 1)(n+2)^{(n+1)(2^n-1)} .$$

Grâce au cor. du th. 2, le théorème s'applique avec $\mathrm{H} = -\mathrm{K}_\mathrm{X}$ et $d = (n+1)(2^n - 1)$, en remarquant que sa démonstration fournit dans ce cas la borne

$2d(\dim X + 2)^d$ sur le degré, puisque l'on peut améliorer la majoration $(\mathcal{M})$ ci-dessus en utilisant l'inégalité $-K_X \cdot C_{i+1} > 0$. ∎

La démonstration de ce corollaire est plus simple (on n'a besoin ni de la construction du quotient rationnel, ni du th. 3) et la borne obtenue bien meilleure, lorsque le groupe de Néron-Severi de la variété est de rang 1.

THÉORÈME 4 ([C4], [N], [KMM1]).— *Soit* X *une variété de Fano de dimension* n *définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, dont le groupe de Néron-Severi est de rang* 1. *Deux points généraux de* X *peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible de degré au plus* $n(n+1)$.

On peut supposer $n > 0$, de sorte que X est uniréglée (prop. 3). Comme l'on est en caractéristique nulle, on a vu en 4.1 qu'il existe une courbe rationnelle libre non constante sur X (§2); on applique le lemme 1 de 3.2 avec le sous-schéma T de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ qui paramètre les courbes *libres* de degré au plus $n+1$: on obtient un morphisme $\tau : X^0 \to Y$. Si Y n'est pas réduit à un point, on note H^0 l'image inverse par τ d'un diviseur ample sur Y, et H son adhérence dans X. Comme $H - H^0$ est de codimension 2 dans X, il ne rencontre pas la courbe rationnelle $C_t = e(\mathbf{P}^1 \times \{t\})$ pour t général dans T. Mais $C_t \cap X^0$ est par le lemme 1 contenue dans une fibre de τ, donc ne rencontre pas non plus H^0 ; on en déduit $H \cdot C_t = 0$, ce qui contredit le fait que tout diviseur effectif sur X est ample. On en déduit que Y est un point, donc que deux points généraux de X peuvent être reliés par une chaîne rationnelle *libre* de degré $n(n+1)$. Par la prop. 7.a), cette chaîne peut être lissée, d'où le théorème. ∎

On ne sait pas ce qu'il advient de ces résultats en caractéristique non nulle : les démonstrations présentées ici utilisent de façon essentielle l'existence d'une courbe rationnelle libre non constante sur une variété de Fano, que l'on ne sait pas démontrer dans le cas général.

4.4. Simple connexité

Si X est une variété projective lisse r.c. (toujours définie sur un corps de caractéristique nulle), il existe un morphisme très libre $\mathbf{P}^1 \to X$ (th. 3). Soit m un entier strictement positif; toute section de $(\Omega^1_X)^{\otimes m}$ s'annule sur l'image de cette courbe. Or les déformations très libres de cette courbe recouvrent un ouvert dense de X (*cf.* 4.1) ; on en déduit $H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes m}) = 0$, donc par symétrie de Hodge $H^m(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (lorsque X est une variété de Fano, cela découle directement du théorème d'annulation de Kodaira). On a alors $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$; comme tout revêtement étale fini de X est encore r.c., on en déduit que X est algébriquement simplement connexe.

THÉORÈME 5 ([C3], [KMM2]).— *Toute variété complexe projective lisse r.c. est simplement connexe.*

Soit X une telle variété. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\pi_1(X)$ est fini. Il existe (th. 3) un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ très libre. Par la prop. 5.a), une unique composante M de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$ contient $[f]$, et l'évaluation $e : \mathbf{P}^1 \times M \to X$ est dominante, de sorte que $\pi_1(e)$ est de conoyau fini. Mais la composée de e avec l'injection $\iota : \{0\} \times M \to \mathbf{P}^1 \times M$ est constante, tandis que $\pi_1(\iota)$ est bijective; cela entraîne que $\pi_1(e)$ est constante, d'où la proposition. ∎

La démonstration de [C3] (cor. 5.7 et 5.9) est différente, et ne fait pas appel au résultat de lissage du th. 3; il y est montré que le groupe fondamental d'une variété compacte kählérienne est fini si deux points très généraux peuvent être reliés par une chaîne de variétés irréductibles dont les normalisées ont des groupes fondamentaux finis (*cf.* aussi [K3], th. 4.13).

Avec les notations de 3.2, le résultat général est le suivant (*cf.* [K4], th. 5.2 pour la démonstration).

THÉORÈME 6.— *Soit* X *une variété complexe projective lisse. L'application* $\pi_1(\rho) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(R(X))$ *est bijective.*

5. LES VARIÉTÉS DE FANO FORMENT UNE FAMILLE LIMITÉE

5.1. Bornes sur $c_1(X)^{\dim X}$

Un argument qui remonte à Fano permet de déduire des résultats du § 4 une majoration de $c_1(X)^n$ valable pour toutes les variétés de Fano X de dimension n.

PROPOSITION 9.— *Soit* X *une variété projective lisse de dimension* n, *soit* x *un point de* X, *et soit* H *un diviseur ample sur* X. *On suppose qu'un point général de* X *peut être relié à* x *par une courbe irréductible de* H*-degré au plus* d. *Alors* $H^n \leq d^n$.

Par Riemann-Roch, $h^0(X, tH)$ est équivalent à $\frac{H^n}{n!}t^n$ pour $t \gg 0$. D'autre part, avoir un point de multiplicité au moins r en x impose au plus $\binom{n+r-1}{n} \sim \frac{r^n}{n!}$ conditions sur les éléments de $|tH|$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \gg 0$ et $D \in |tH|$ tels que

$$\mathrm{mult}_x D \geq t\sqrt[n]{H^n} - t\varepsilon .$$

Soit C une courbe irréductible de H-degré au plus d joignant x à un point hors de D. On a

$$td \geq C \cdot (tH) \geq \mathrm{mult}_x D \geq t\sqrt[n]{H^n} - t\varepsilon ,$$

d'où la proposition en faisant tendre ε vers 0. ∎

Le cor. 2 du th. 3 et le th. 4 entraînent :

THÉORÈME 7 ([KMM3], [N]).— *Soit* X *une variété de Fano de dimension* n *définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On a* $c_1(\mathrm{X})^n \leq d(n)^n$. *Si le groupe de Néron-Severi de* X *est de rang* 1, *on a* $c_1(\mathrm{X})^n \leq (n(n+1))^n$.

Il faut aussi mentionner le résultat ancien de Bogomolov, qui établit dans [Bo], par des méthodes de caractéristique nulle, l'inégalité $c_1(\mathrm{X})^3 \leq 72$ pour toute variété de Fano complexe X de dimension 3 dont le groupe de Néron-Severi est engendré par $\mathrm{K_X}$. La borne $c_1(\mathrm{X})^n \leq (n+1)^n$ a été conjecturée par Iskovskikh, mais Batyrev a remarqué dans [B] que pour la variété de Fano $\mathrm{X} = \mathbf{P}\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(n-1)\big)$, dont le groupe de Néron-Severi est de rang 2, on a

$$c_1(\mathrm{X})^n = \frac{(2n-1)^n - 1}{n-1} \sim \frac{2^n e^{-3/2}}{n}\,(n+1)^n\ .$$

Pour une variété de Fano complexe X de dimension n qui admet une métrique de Kähler-Einstein g, des résultats classiques de géométrie différentielle permettent d'obtenir une borne sur $c_1(\mathrm{X})^n$. Supposons la métrique normalisée de telle sorte que sa courbure de Ricci soit g ; on a alors ([Be], 11.5)

$$c_1(\mathrm{X})^n = \mathrm{vol}(\mathrm{X})\ \frac{n!}{(2\pi)^n}\ .$$

Un résultat de Bishop ([BC], cor. 4, p. 257) entraîne que le volume de X est inférieur à celui d'une sphère de même dimension et de rayon $\sqrt{2n-1}$, de sorte que

$$\begin{aligned} c_1(\mathrm{X})^n &\leq \frac{n!}{(2\pi)^n}\ (\sqrt{2n-1})^{2n}\ \frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \\ &= (2n-1)^n\ \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n)!} \sim 2^{n+1}\sqrt{\pi n}\ e^{-3/2}(n+1)^n\ , \end{aligned}$$

borne qui est très proche de la valeur de l'exemple de Batyrev.

5.2. Bornes sur le nombre de type de déformations

Par [Ma], il n'y a qu'un nombre fini de types de déformations de variétés de Fano de polynôme de Hilbert $\chi(\mathrm{X}, \mathcal{O}(t\mathrm{K_X}))$ fixé. Les deux coefficients de plus haut degré de ce polynôme sont bornés par le th. 7, ce qui suffit à borner les autres ([KM]).

Pour obtenir une borne *effective*, il faut utiliser des résultats difficiles sur l'adjonction.

THÉORÈME 8.— *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le nombre de types de déformation de variétés de Fano de dimension n définies sur k est majoré par* $(n+2)^{(n+2)^{n2^{3n}}}$.

Les résultats de [D], [K2], [AS] et [T] entraînent que pour toute variété de Fano X de dimension n, le diviseur $\frac{n(n+1)(n+3)}{2}(-K_X)$ est très ample. Par projection, toutes les variétés de Fano de dimension n peuvent être réalisées comme des sous-variétés lisses de $\mathbf{P}^{2n+1}$ de degré au plus $\delta(n) = [\frac{1}{2}n(n+1)(n+3)d(n)]^n$. Des travaux de Catanese permettent de borner le nombre de composantes irréductibles du schéma de Chow des sous-variétés lisses de $\mathbf{P}^N$ de dimension pure n et degré δ ([Ca] ou [K1] (3.28.9) p. 61) par

$$C(n,\delta,N) = \binom{\delta(N+1)}{N}^{(N+1)\delta\binom{\delta+n}{n}}.$$

Le nombre de type de déformations des variétés de Fano de dimension n est donc majoré par $C(n,\delta(n),2n+1)$; cette borne est inférieure à celle du théorème. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[AS] U. ANGEHRN, Y.-T. SIU – *Effective Freeness and Point Separation*, Invent. Math. **122** (1995), 291–308.

[B] V. BATYREV – *Boundedness of the degree of multidimensional toric Fano varieties* (en russe avec résumé anglais), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1982) 22–27, 76–77; trad. anglaise : Moscow Univ. Math. Bull. **37** (1982), 28–33.

[Be] A. BESSE – Einstein manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.

[BC] A. BISHOP, R. CRITTENDEN – Geometry of Manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Academic Press, New York and London, 1964.

[Bo] F. BOGOMOLOV – *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227–1287, 1439; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **13** (1979), 499–555.

[Bor] A. BOREL – Linear algebraic groups. Benjamin, 1969.

[Bou] J.-P. BOURGUIGNON – *Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes, d'après E. Calabi, T. Aubin et S.T. Yau*, Séminaire Bourbaki, vol. 1977/78, Exp. 507, 1–21, Springer Lectures Notes **710**, Springer Verlag, 1979.

[C1] F. CAMPANA – *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 539–545.

[C2] F. CAMPANA – *Coréduction algébrique d'un espace analytique compact faiblement kählérien*, Invent. Math. **63** (1981), 187–223.

[C3] F. CAMPANA – *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. Fr. **122** (1994), 255–284.

[C4] F. CAMPANA – *Une version géométrique généralisée du théorème du produit de Nadel*, Bull. Soc. Math. Fr. **119** (1991), 479–493.

[Ca] F. CATANESE – *Chow varieties, Hilbert schemes and moduli spaces of surfaces of general type*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 561–596.

[CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – *Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels*, Proc. Int. Congr. Math., (Berkeley, Calif., 1986), 641–653, A.M.S., Providence, RI, 1987.

[D] J.-P. DEMAILLY – *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Diff. Geom. **37** (1993), 323–374.

[De] M. DEMAZURE – *Caractérisations de l'espace projectif, d'après S. Mori*, Séminaire Bourbaki, vol. 1979/80, Exp. 544, 11–19, Springer Lectures Notes **842**, Springer Verlag, 1981.

[F] G. FANO – *Sulle varietà algebriche a tre dimensione aventi tutti i generi nulli*, Atti Congr. Internaz. di Matematica, Bologna **4** (1931), 115–119.

[Fu] A. FUJIKI – *Deformation of uni-ruled manifolds*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **17** (1981), 687–702.

[G] A. GROTHENDIECK – Fondements de la géométrie algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962, Sec. Math., Paris, 1962. Réédition Astérisque hors série **5**, Soc. Math. Fr., 1997.

[I1] V. ISKOVSKIKH – *Fano 3-folds I* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 516–562, 717; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **11** (1977), 485–527.

[I2] V. ISKOVSKIKH – *Fano 3-folds II* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 506–549; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **12** (1978), 469–506.

[Ka] Y. KAWAMATA – *Boundedness of* **Q***-Fano threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, (Novosibirsk, 1989), 439–445, Contemp. Math. **131**, Part 3, A.M.S., Providence, RI, 1992.

[K1] J. KOLLÁR – Rational Curves on Algebraic Varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **32**, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[K2] J. KOLLÁR – *Effective Base Point Freeness*, Math. Ann. **296** (1993), 595–605.

[K3] J. KOLLÁR – Shafarevich maps and automorphic forms. M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[K4] J. KOLLÁR – *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. **113** (1993), 177–215.

[KM] J. KOLLÁR, T. MATSUSAKA – *Riemann-Roch type inequalities*, Amer. J. Math. **105** (1983), 229–252.

[KMM1] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational Curves on Fano Varieties*, Proc. Alg. Geom. Conf. Trento, 100–105, Springer Lecture Notes **1515**, Springer Verlag, 1992.

[KMM2] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rationally Connected Varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 429–448.

[KMM3] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 765–769.

[LBS] C. LEBRUN, S. SALAMON – *Strong ridigity of positive quaternion-Kähler manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 109–132.

[Le] M. LEVINE – *Deformation of uni-ruled varieties*, Duke Math. J. **48** (1981), 467–473.

[M] Y. MANIN – Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic. Second edition. North-Holland Mathematical Library, **4**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1986.

[Ma] T. MATSUSAKA – *On canonically polarized varieties (II)*, Amer. J. Math. **92** (1970), 283–292.

[Me] G. MEGYESI – *Fano threefolds in positive characteristic*, à paraître dans J. Alg. Geom.

[Mo] S. MORI – *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. **110** (1979), 593–606.

[MM] S. MORI, S. MUKAI – *Classification of Fano threefolds with* $b_2 \geq 2$, Manuscr. Math. **36** (1981), 147–162.

[N] A. NADEL – *The boundedness of degree of Fano varieties with Picard number* 1, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 681–692.

[S] J.-P. SERRE – Cohomologie Galoisienne. Springer Lecture Notes **5**, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[SB] N. SHEPHERD-BARRON – *Fano threefolds in positive characteristic*, Comp. Math. **105** (1997), 237–265.

[Sh] V.V. SHOKUROV – *The existence of a line on Fano varieties* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979) 922–964, 968; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **14** (1980), 395–405.

[T] H. TSUJI – *Global generation of adjoint bundles*, Nagoya. Math. J. **142** (1996), 5–16.

[Y1] S.T. YAU – *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **74** (1977), 1798–1799.

[Y2] S.T. YAU – *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978), 339–411.

Olivier DEBARRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
F–67084 STRASBOURG CEDEX

Adresse électronique : debarre@math.u-strasbg.fr