Astérisque

PIERRE VOGEL

Les invariants récents des variétés de dimension 3

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 799, p. 225-250

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__225_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1995
47ème année, 1994-95, n° 799

LES INVARIANTS RÉCENTS DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

par **Pierre VOGEL**

Au cours des dix dernières années, sont apparus des objets mathématiques complètement nouveaux reliant des domaines aussi variés que la topologie de basse dimension, la théorie des algèbres de von Neumann, la théorie des algèbres de Lie semisimples, la physique théorique, la théorie des champs. Après la découverte du polynôme de Jones en 1984 suivi par d'autres invariants de nœuds comme le polynôme HOMFLY ou le polynôme de Kauffman, le point de vue de la topologie de basse dimension a beaucoup changé, ces invariants étant de nature entièrement différente des invariants connus comme le polynôme d'Alexander. Contrairement aux anciens invariants qui étaient essentiellement définis en toute dimension et qui se prétaient aux techniques générales (chirurgie et utilisation de la topologie algébrique), ces nouveaux invariants sont irrémédiablement liés à la théorie des nœuds et entrelacs classiques et reflètent de façon très fine la richesse et la complexité de la topologie de dimension 3.

Ensuite, la construction des groupes quantiques par V. Drinfeld et M. Jimbo en 1985 permit de reconstruire ces invariants et d'en obtenir d'autres à partir de chaque algèbre de Lie simple. Ainsi toute algèbre de Lie simple induit un invariant de nœuds qui est un polynôme en une variable dite quantique. Les algèbres de Lie de la série A redonnent le polynôme HOMFLY, ceux des séries B, C et D redonnent le polynôme de Kauffman, et les algèbres de Lie exceptionnelles donnent chacune un autre invariant de nœuds et d'entrelacs.

En 1988, E. Witten invente la notion de théorie quantique des champs topologique, qui associe à chaque surface S un espace vectoriel de dimension finie $V(S)$, et à chaque cobordisme W de S vers S' une application linéaire de $V(S)$ vers $V(S')$, de façon à transformer union disjointe en produit tensoriel et recollement de cobordisme en com-

position. Un tel foncteur V associe à toute variété compacte sans bord de dimension 3 un endomorphisme de $V(\emptyset)$ et l'on obtient un invariant des variétés de dimension trois à valeurs dans le corps de base. Enfin, Witten propose une construction d'un tel foncteur V à l'aide d'une intégrale de Feynman.

La première construction mathématique d'un invariant des variétés de dimension 3 correspondant au programme de Witten a été donnée en 1990 par N. Reshetikhin et V. Turaev.

1. CATÉGORIES MONOÏDALES ET INVARIANTS D'ENTRELACS

1.1. Catégories monoïdales

DÉFINITION 1.2. – *On appelle catégorie monoïdale stricte un triplet* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ *tel que :*

— $\mathcal{M}$ *est une (petite) catégorie*

— $\otimes$ *est un foncteur covariant de* $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{M}$

— $\mathbf{1}$ *est un objet de* $\mathcal{M}$

— $\otimes$ *est associatif pour les objets et les morphismes de* $\mathcal{M}$. *C'est-à-dire que pour tout triplet d'objets* X, Y *et* Z *de* $\mathcal{M}$ *et de flèches* f, g *et* h *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z \qquad \text{et} \qquad f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$$

— $\mathbf{1}$ *est un objet neutre. C'est-à-dire que pour tout objet* X *de* $\mathcal{M}$ *et toute flèche* f *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X \qquad \text{et} \qquad f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \otimes f = f$$

Remarques. – La condition de petite catégorie n'est pas obligatoire; elle peut sans difficulté être remplacée par la condition que les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{M}$ forment un ensemble.

Les conditions d'égalité entre objets de $\mathcal{M}$:

$$X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z \quad \text{et} \quad X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X$$

peuvent également être assouplies. On peut remplacer ces égalités par des isomorphismes canoniques vérifiant certaines conditions de cohérence. On a alors la notion de catégorie monoïdale [Ma].

La catégorie des modules de type fini sur un anneau commutatif munie du produit tensoriel ou la catégorie des ensembles finis munie du produit sont des exemples de catégories monoïdales.

DÉFINITION 1.3. – *On appelle catégorie enrubannée (stricte), une catégorie monoïdale (stricte)* $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ *munie d'opérations* $c, \theta, *, \omega, e$ *telles que :*

— $*$ *associe à chaque objet* X *de* $\mathcal{M}$ *un objet* X^* *de* $\mathcal{M}$ *(son dual)*

— c *associe à chaque paire d'objets* X *et* Y *de* $\mathcal{M}$ *un isomorphisme* $c_{X,Y}$ *de* $X \otimes Y$ *sur* $Y \otimes X$

— θ, ω *et* e *associent à chaque objet* X *de* $\mathcal{M}$ *un isomorphisme* θ_X *de* X *sur* X, *un morphisme* ω_X *de* $\mathbf{1}$ *dans* $X \otimes X^*$ *et un morphisme* e_X *de* $X^* \otimes X$ *dans* $\mathbf{1}$

— *pour tous les objets* X, Y *et* Z *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$c_{X,Y\otimes Z} = (\mathrm{Id}_Y \otimes c_{X,Z})(c_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z)$$

$$c_{X\otimes Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y)(\mathrm{Id}_X \otimes c_{Y,Z})$$

— *pour les flèches* $f : X \to X'$ *et* $g : Y \to Y'$ *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$(g \otimes f)c_{X,Y} = c_{X',Y'}(f \otimes g)$$

— *pour les objets* X *et* Y *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$\theta_{X\otimes Y} = c_{Y,X}c_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y)$$

— *pour toute flèche* $f : X \to Y$ *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$f\theta_X = \theta_Y f$$

— *pour tout objet* X *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$(\mathrm{Id}_X \otimes e_X)(\omega_X \otimes \mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X$$

$$(e_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})(\mathrm{Id}_{X^*} \otimes \omega_X) = \mathrm{Id}_{X^*}$$

$$(\theta_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})\omega_X = (\mathrm{Id}_X \otimes \theta_{X^*})\omega_X$$

DÉFINITION 1.4. – *Soit* k *un anneau commutatif. On appelle* k*-catégorie enrubannée, une catégorie enrubannée* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, c, \theta, *, \omega, e)$ *où les morphismes de* $\mathcal{M}$ *forment des* k*-modules et où les compositions et le produit* $\otimes$ *sont bilinéaires.*

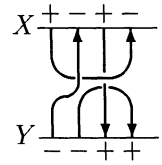
1.5. Exemple fondamental : la catégorie des entrelacs

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $[n]$ le sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbf{C}$. On désignera par $\mathrm{Obj}(\mathcal{E})$ l'ensemble des couples $([n], \alpha)$, où n est un entier positif ou nul, et α est une application de $[n]$ dans $\{\pm 1\}$.

Soient $X = ([p], \alpha)$ et $Y = ([q], \beta)$ deux éléments de $\mathrm{Obj}(\mathcal{E})$. On désignera par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)$ l'ensemble des classes d'isotopie (relativement au bord) d'entrelacs parallélisés à bord L contenus dans $\mathbf{C} \times I$ et possédant les propriétés suivantes :

— $\partial L = L \cap (\mathbf{C} \times \partial I) = ([p] \times \{1\}) \cup ([q] \times \{0\})$

— en tout point x de ∂L, le vecteur tangent à L est normal au plan $\mathbf{C} \times \{1\}$ ou $\mathbf{C} \times \{0\}$ et pointe vers le haut ou le bas selon que $\alpha(x)$ (ou $\beta(x)$) est négatif ou positif. De plus les deux autres vecteurs de la parallélisation (qui forment un repère direct) sont les vecteurs $\alpha(x)$ (ou $\beta(x)$) et i de $\mathbf{C}$.



On a ainsi défini une catégorie $\mathcal{E}$ (la catégorie des entrelacs), la composition des morphismes étant obtenue par le recollement des entrelacs à bord.

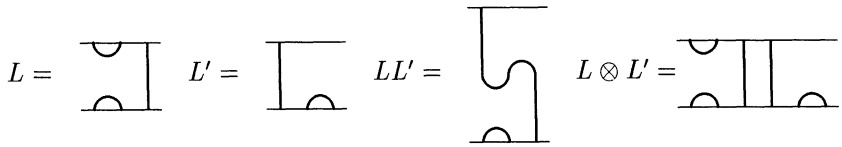
Cependant, outre la composition d'entrelacs, il y a une autre loi, notée $\otimes$. Au niveau des objets, on a :

$$([p], \alpha) \otimes ([q], \beta) = ([p+q], \gamma)$$

avec :

$$\gamma(i) \doteq \begin{cases} \alpha(i) & \text{si} \quad i \leq p \\ \beta(i-p) & \text{sinon} \end{cases}$$

Au niveau des entrelacs, $L \otimes L'$ est obtenu en juxtaposant L' à droite de L.



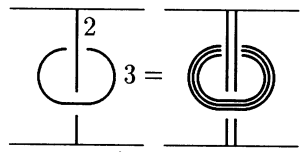
Remarque. – Contrairement à certaines conventions, une parallélisation désigne ici une trivialisation du fibré normal. Cependant, comme l'espace ambient est canoniquement

orienté, on peut compléter cette trivialisation en rajoutant un vecteur tangent en première position et obtenir un repère direct de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Un entrelacs parallélisé est donc naturellement orienté, et en chaque point de l'entrelacs, on a un repère direct dont le premier vecteur est tangent à l'entrelacs de façon compatible à l'orientation. Enfin, pour des raisons de souplesse, on ne supposera pas le repère orthonormé.

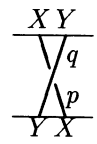
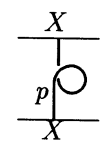
Remarque. – Si L est un entrelacs représenté par un diagramme, on adoptera les conventions suivantes :

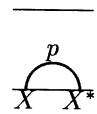
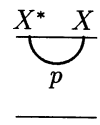
— en tout point de L, le repère (e_1, e_2, e_3) de la parallélisation est direct, e_1 est tangent à L dans le sens correspondant à l'orientation de L, e_2 est horizontal (dans le plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$) et orthogonal à e_1 et e_3 est le vecteur vertical $i \times \{0\}$.

— Si une composante du diagramme apparaît affectée d'un entier n, cela signifie que la composante correspondante de L est répétée n fois parallèlement à elle-même dans la direction du deuxième vecteur e_2 de la parallélisation.



Il est facile de vérifier que la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ est une catégorie monoïdale stricte, l'objet $\mathbf{1}$ étant l'objet $([0], \alpha)$ correspondant à un ensemble vide de points de $\mathbf{C}$. Cette catégorie est cependant beaucoup plus riche. Si $X = ([p], \alpha)$ et $Y = ([q], \beta)$ sont deux objets de $\mathcal{E}$, on pose :

$X^* = ([p], -\alpha \circ \gamma_p)$ $\quad c_{X,Y} =$  $\quad \theta_X =$ 

$\omega_X =$  $\quad e_X =$ 

ou γ_p est l'application : $i \mapsto p + 1 - i$.

THÉORÈME 1.6.([Tu]) – *La catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ munie des opérations $\otimes, \mathbf{1}, c, \theta, *, \omega, e$ est une catégorie enrubannée stricte. Elle est de plus universelle au sens suivant :*

Pour toute catégorie enrubannée stricte $\mathcal{M}$, et tout objet X de $\mathcal{M}$, il existe un unique foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}$ qui envoie l'objet $([1],1)$ de $\mathcal{E}$ en l'objet X.

Ce théorème est fondamental pour la raison suivante : si $\mathcal{M}$ est une catégorie enrubannée stricte, et si X est un objet de $\mathcal{M}$, on a un foncteur F de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}$ qui envoie $([1],1)$ en X. Si maintenant L est un entrelacs parallélisé sans bord, il représente un endomorphisme de l'objet vide $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ et induit un endomorphisme de l'objet $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ qui ne dépend que de la classe d'isotopie de L. On obtient ainsi un invariant d'entrelacs parallélisés.

Ce résultat est également valable en un certain sens pour une catégorie enrubannée non nécessairement stricte; pour chaque objet X d'une catégorie enrubannée $\mathcal{M}$, on obtient un invariant d'entrelacs parallélisés à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$. Ce dernier objet est un monoïde commutatif en général et une k-algèbre commutative dans le cas où $\mathcal{M}$ est une k-catégorie enrubannée.

Il est possible d'enrichir la catégorie $\mathcal{E}$ pour pouvoir, en quelque sorte, prendre en compte tous les objets de la catégorie $\mathcal{M}$ à la fois :

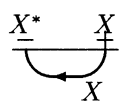
1.7. La catégorie des entrelacs coloriés

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie enrubannée stricte. On notera $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ la catégorie des entrelacs $\mathcal{M}$-coloriés définie comme suit :

Un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ est un triple $([p],\alpha,\varphi)$, où $([p],\alpha)$ est un objet de $\mathcal{E}$ et φ est une application de $[p]$ dans $\mathrm{Obj}(\mathcal{M})$.

Une flèche de $([p],\alpha,\varphi)$ dans $([q],\beta,\psi)$ est un entrelacs $\mathcal{M}$-colorié, c'est-à-dire une paire $([L],f)$ où $[L]$ est une classe d'isotopie d'entrelacs définissant une flèche dans $\mathcal{E}$ de $([p],\alpha)$ dans $([q],\beta)$ et où f associe à chaque composante L_0 de L un objet $f(L_0)$ de $\mathcal{M}$, de telle façon que pour tout $x=(y,1), y\in[p]$ (resp. $x=(y,0), y\in[q]$) situé sur une composante L_0 de L, on ait :

$$f(L_0)=\begin{cases}\varphi(y) & (\text{resp. } \psi(y)) \quad \text{si} \quad \alpha(y)=1 \quad (\text{resp. } \beta(y)=1)\\ \varphi(y)^* & (\text{resp. } \psi(y)^*) \quad \text{sinon}\end{cases}$$



La structure de catégorie monoïdale de $\mathcal{E}$ s'étend naturellement en une structure de catégorie monoïdale sur $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. L'opérateur de dualité * se définit comme suit : $([p], \alpha, \varphi)^* = ([p], -\alpha \circ \gamma_p, \varphi \circ \gamma_p)$, et les systèmes de flèches θ, ω et e se prolongent à $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ en mettant sur les flèches les seules couleurs possibles. De cette façon, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ hérite d'une structure de catégorie enrubannée.

PROPOSITION 1.8.([Tu]) – *Il existe un unique foncteur de la catégorie enrubannée $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ dans la catégorie enrubannée $\mathcal{M}$ qui transforme l'objet $([1], 1, X)$ en l'objet X de $\mathcal{M}$.*

En corollaire, tout entrelacs $\mathcal{M}$-colorié sans bord possède un invariant bien défini dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$.

1.9. Bigèbre de Hopf enrubannée

Pour tout module M sur un anneau commutatif k, on notera P_M l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ de $M \underset{k}{\otimes} M$ dans lui-même. Si M et N sont deux k-modules, on notera $P_{M,N}$ l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ de $M \otimes N$ dans $N \otimes M$.

DÉFINITION 1.10.([D1][D2]) – *Soit k un anneau commutatif. On appelle k-bigèbre de Hopf quasitriangulaire une k-bigèbre de Hopf A (avec comultiplication Δ) munie d'un élément inversible R de $A \otimes A$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\forall a \in A \qquad P_A(\Delta(a)) = R\Delta(a)R^{-1}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})R = R_{13}R_{23}$$

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$$

où R_{ij} désigne l'élément R envoyé dans les i-ième et j-ième facteurs de $A \otimes A \otimes A$:

$$R_{12} = R \otimes 1 \qquad R_{23} = 1 \otimes R \qquad R_{13} = (\mathrm{Id}_A \otimes P_A)(R_{12})$$

Une k-bigèbre de Hopf quasitriangulaire (A, R) possède un élément particulier, l'élément $u = u_A = \mu(\gamma \otimes 1)(R)$, γ étant l'antipode de A et μ le produit.

L'élément R est appelé dans la littérature matrice R. C'est une solution de l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

LEMME 1.11. – *L'élément u est inversible et vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall a \in A \qquad \gamma^2(a) = uau^{-1}$$

$$u\gamma(u) = \gamma(u)u \text{ est central}$$

$$\varepsilon(u) = 1$$

$$\Delta(u\gamma(u)) = (P_A(R)R)^{-2}(u\gamma(u) \otimes u\gamma(u))$$

ε, γ et Δ désignant la coünité, l'antipode et la comultiplication de A.

DÉFINITION 1.12.([RT1]) – *On appelle bigèbre de Hopf enrubannée une bigèbre de Hopf quasitriangulaire munie d'un élément central $v \in A$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$v^2 = u\gamma(u) \qquad \gamma(v) = v \qquad \varepsilon(v) = 1 \qquad \Delta(v) = (P_A(R)R)^{-1}(v \otimes v)$$

Il n'y a pas de différence significative entre les notions de bigèbre de Hopf quasitriangulaire et bigèbre de Hopf enrubannée, car si A est une bigèbre de Hopf quasitriangulaire, d'après le lemme 1.11, l'algèbre $B = A[v]/(v^2 - u\gamma(u))$ a naturellement une unique structure de bigèbre de Hopf enrubannée telle que l'inclusion $A \subset B$ soit un morphisme de bigèbres de Hopf quasitriangulaires.

PROPOSITION 1.13. – *Soit (A, R, v) une bigèbre de Hopf enrubannée sur un anneau commutatif k. Alors la catégorie $Rep(A)$ des A-modules qui sont projectifs de type fini sur k forment une k-catégorie enrubannée, le produit $\otimes$ étant le produit tensoriel au-dessus de k et $*$ étant l'opérateur dual (sur k); les structures de A-modules sur $M \otimes N$ et sur M^* sont définies par :*

$$\forall x \otimes y \in M \otimes N,\ \forall a \in A \qquad a(x \otimes y) = \Delta(a)(x \otimes y)$$

$$\forall f \in M^*,\ \forall x \in M,\ \forall a \in A \qquad af(x) = f(\gamma(a)x).$$

Les transformations c, θ et e sont définies par :

$$c_{M,N}(x \otimes y) = P_{X,Y}(R(x \otimes y)) \qquad \theta_M(x) = v^{-1}x \qquad e_M(f \otimes x) = f(x)$$

et $\omega_M(1)$ est l'unique élément $\Sigma e_i \otimes \varepsilon_i$ de $M \otimes M^*$ tel que, pour tout $x \in M$, on ait : $\Sigma e_i \varepsilon_i(x) = x$.

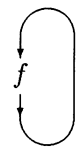
En conséquence, pour chaque bigèbre de Hopf enrubannée (A, R, v), on a des invariants d'entrelacs parallélisés à valeurs dans k, dépendant du choix d'une représentation M de A. On a également un invariant pour les entrelacs parallélisés coloriés par des représentations de A.

2. TRACE ET RÉDUCTION

DÉFINITION 2.1. – *Soit $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, c, \theta, *, \omega, e)$ une catégorie enrubannée. Soit X un objet de $\mathcal{M}$ et f un endomorphisme de X. On désigne par trace de f l'endomorphisme $\tau(f)$ de $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ défini par :*

$$\tau(f) = e_X c_{X,X^*}(f \otimes \theta_{X^*})\omega_X.$$

La trace de f peut être représentée schématiquement par le diagramme suivant :



la partie inférieure du diagramme correspondant à $e_X c_{X,X^*}(\mathrm{Id}_X \otimes \theta_{X^*})$.

LEMME 2.2. – *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{M}$, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux morphismes. Alors on a :*

$$\tau(fg) = \tau(gf).$$

Si f et g sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}$, on a :

$$\tau(f \otimes g) = \tau(f)\tau(g).$$

Enfin si $f : X \to Y$, $g :\to X' \to Y'$ et $\varphi : Y \otimes Y' \to X \otimes X'$ sont des morphismes de $\mathcal{M}$, on a :

$$\tau((f \otimes g)\varphi) = \tau(f\psi)$$

avec : $$\psi = (\mathrm{Id}_X \otimes e_{X'} c_{X',X'^*})(\varphi \otimes \theta_{X'})(\mathrm{Id}_Y \otimes g \otimes \mathrm{Id}_{X'})(\mathrm{Id}_Y \otimes \omega_{X'}).$$

2.3. Réduction des k-catégories enrubannées

Soit $\mathcal{M}$ une k-catégorie enrubannée. On peut définir une catégorie quotient $\mathcal{M}_{red}$ de $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$\mathcal{M}_{red}$ a les mêmes objets que $\mathcal{M}$. Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{M}$, on définit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{red}}(X, Y)$ comme le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ par le sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$

formé des morphismes $f : X \to Y$ tels que la trace $\tau(fg)$ est nulle pour tout morphisme $g : Y \to X$. Grâce au lemme 2.2, on vérifie que $\mathcal{M}_{red}$ est une k-catégorie enrubannée.

Ainsi, pour définir un invariant pour les entrelacs parallélisés, on peut utiliser à la place de $\mathcal{M}$ la catégorie $\mathcal{M}_{red}$ qui dans certains cas est beaucoup plus petite.

2.4. H_0 des k-catégories enrubannées

DÉFINITION 2.5. – *Soit $\mathcal{M}$ une k-catégorie enrubannée. On désigne par $H_0(\mathcal{M})$ le k-module engendré par les classes d'isomorphisme de paires (X, f) où X est un objet de $\mathcal{M}$ et f un endomorphisme de X et quotienté par les relations suivantes :*

— pour tout objet X de $\mathcal{M}$, l'application canonique de $End_{\mathcal{M}}(X)$ dans $H_0(\mathcal{M})$ est k-linéaire

— si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont deux morphismes de $\mathcal{M}$, les classes de (X, gf) et (Y, fg) sont égales dans $H_0(\mathcal{M})$.

La classe d'un endomorphisme f dans $H_0(\mathcal{M})$ sera notée $tr(f)$.

PROPOSITION 2.6. – *Le produit tensoriel de $\mathcal{M}$ induit sur $H_0(\mathcal{M})$ une structure de k-algèbre commutative.*

L'intérêt de cette algèbre est que, dans les cas connus, c'est un objet infiniment plus simple et petit que la catégorie $\mathcal{M}$. De plus, on peut déterminer des invariants d'entrelacs en coloriant chaque composante d'un entrelacs L par un élément de $H_0(\mathcal{M})$:

2.7. Coloriage des entrelacs par $H_0(\mathcal{M})$

Soit L un entrelacs parallélisé sans bord. Il représente donc un morphisme de $\mathcal{E}$ de vide dans vide. Choisissons pour chaque composante L_i $(i = 1, \ldots, p)$ de L un point x_i de façon que les cotes des points x_i soient toutes distinctes et, qu'en ces points, les vecteurs tangents aient tous des cotes non nulles. Quitte à changer la numérotation des composantes, on supposera que les points x_i sont numérotés par cotes croissantes. S'il le faut, on modifiera également par isotopie l'entrelacs L de telle sorte que chaque plan $\mathbf{C} \times \{\alpha\}$ passant par un des points x_i coupe L de façon standard et qu'en découpant L par ces plans, on ait une décomposition $L = L'_p L'_{p-1} \ldots L'_1 L'_0$ comme produit de flèches dans la catégorie $\mathcal{E}$.

Soit maintenant $f_i : X_i \to X_i$ des endomorphismes de $\mathcal{M}$. On peut colorier chaque composante L_i de L par l'objet X_i, et L ainsi que les entrelacs à bord L_i deviennent des morphismes de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Soit Φ le foncteur canonique de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$. On peut

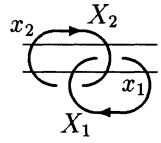
considérer le produit:

$$E = \Phi(L'_p) f'_p \Phi(L'_{p-1}) f'_{p-1} \dots f'_1 \Phi(L_0)$$

où les morphismes f'_i sont définis comme ceci : si le i-ième plan de cote c qui passe par x_i coupe L en un sous-ensemble $[p]$ de $\mathbf{C} \times \{c\}$, si x_i est le k-ième point de cet ensemble et si de plus le j-ième point de $[p]$ appartient à la composante $L_{\alpha(j)}$ de L, alors f'_i est le morphisme suivant:

$$\mathrm{Id}_{X_{\alpha(1)}} \otimes \dots \otimes \mathrm{Id}_{X_{\alpha(k-1)}} \otimes g_i \otimes \dots \otimes \mathrm{Id}_{X_{\alpha(p)}}$$

où g_i est l'endomorphisme f_i si le vecteur tangent à L en x_i pointe vers le bas et l'endomorphisme $f_i^* = (\mathrm{Id}_{X^*} \otimes e_X)(\mathrm{Id}_{X^*} \otimes f_i \otimes \mathrm{Id}_{X^*})(\omega_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})$ sinon.



Dans l'exemple ci-dessus, L a 2 composantes coloriées par X_1 et X_2. On a deux plans de coupe, dans le plan le plus haut, on insère f_2^* en première place et, dans l'autre, on insère f_1 en quatrième place.

Grâce aux propriétés de $\mathcal{M}$, on vérifie que le produit E est indépendant des choix et ne dépend que de L, des couleurs X_i et des endomorphismes f_i. De plus cette expression est linéaire par rapport à chaque f_i. Enfin, si l'on insère sur une composante L_i de L de couleur X_i un endomorphisme $g_i f_i$, où f_i va de X_i dans un module X'_i et g_i va de X'_i dans X_i, on peut faire"glisser" g_i le long de L_i pour le faire arriver "après" f_i. Ainsi, on vérifie que $g_i f_i$ et $f_i g_i$ donnent le même élément. En conséquence, l'expression E ne dépend que des classes des endomorphismes f_i dans $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$. On peut donc colorier chaque composante de L par un élément de $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$, et un tel entrelacs colorié a un invariant bien défini $< L >$ dans la k-algèbre $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$.

Notons $\mathcal{A}$ la k-algèbre $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$. Si maintenant L est un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié sans bord contenu dans $S^1 \otimes B^2$, il induit un élément non pas dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$ mais dans l'algèbre $\mathcal{A}$. En effet, supposons que le coloriage de L soit défini par des objets X_i de $\mathcal{M}$, des points x_i de L et des endomorphismes $f_i : X_i \to X_i$. Soit c un point de S^1 tel que L soit transverse à $\{c\} \times B^2$. On peut alors découper le tore plein $S^1 \times B^2$ le long

de $\{c\} \times B^2$ et on récupère un entrelacs à bord représentant un endomorphisme de la catégorie $\mathcal{E}$. Comme précédemment, on peut décomposer ce morphisme en un produit de morphismes composables $L'_p L'_{p-1} \dots L'_1 L'_0$ et l'on pose $\ll L \gg = tr(\Phi(L'_p) f'_p \dots f'_1 \Phi(L_0))$, les morphismes f'_i étant définis comme ci-dessus. On vérifie que cet élément de $\mathcal{A}$ est indépendant des choix.

Si maintenant un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié L est contenu dans un voisinage régulier d'un nœud parallélisé K, on peut transporter L par un homéomorphisme de ce voisinage sur $S^1 \times B^2$ donné par la parallélisation de K, et l'on obtient également un élément $\ll L \gg_K$ de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 2.8. – *Soit $\mathcal{A}$ la k-algèbre $H_0(\mathcal{M})$. Soit K un nœud parallélisé contenu dans S^3 et L un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié contenu dans un voisinage régulier de K. Alors l'invariant $< L >$ est égal à l'invariant de K colorié par $\ll L \gg_K$.*

L'algèbre H'($\mathcal{M}$)

L'algèbre $H_0(\mathcal{M})$ est un objet mathématique plus simple que $\mathcal{M}$. On peut le simplifier encore en considérant l'algèbre $H_0(\mathcal{M}_{red})$ qui en est un quotient. On peut colorier des entrelacs par des éléments de $H_0(\mathcal{M}_{red})$ et l'on récupère toujours des invariants. On peut cependant faire encore mieux et définir l'algèbre H'($\mathcal{M}$) suivante :

DÉFINITION 2.9. – *Soit $\mathcal{A}$ la k-algèbre $H_0(\mathcal{M})$. On notera H'($\mathcal{M}$) le quotient linéaire de $\mathcal{A}$ par la relation $\simeq$ suivante :*

Un élément x de $\mathcal{A}$ est équivalent à 0 ($x \simeq 0$) si et seulement si, pour tout nœud parallélisé K de S^3 et tout entrelacs $\mathcal{A}$-colorié L contenu dans $S^3 - K$, l'invariant $< L \cup K(x) >$ est nul, $K(x)$ étant le nœud K colorié par x.

On vérifie que H'($\mathcal{M}$) est une k-algèbre quotient de $\mathcal{A}$ et même de $H_0(\mathcal{M}_{red})$. De plus, tout entrelacs colorié par des éléments de H'($\mathcal{M}$) a un invariant bien défini dans k. Cette algèbre est a priori plus difficile à déterminer que $\mathcal{A}$ ou que $H_0(\mathcal{M}_{red})$. Elle va cependant s'avérer très utile.

3. INVARIANTS DES VARIÉTÉS COLORIÉES

Dans tout le paragraphe, $\mathcal{M}$ désignera une algèbre enrubannée sur un anneau commutatif k. On notera K la k-algèbre commutative $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les algèbres $H_0(\mathcal{M})$ et H'($\mathcal{M}$). Quitte à étendre les coefficients, on peut supposer que k est égal à

K. Ainsi tout entrelacs sans bord colorié par des éléments de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{A}'$ a un invariant bien défini dans k.

DÉFINITION 3.1. – *On appellera variété $\mathcal{A}$-coloriée (resp. $\mathcal{A}'$-coloriée) une paire (M, L) où M est une variété de dimension trois orientée et L est un entrelacs parallélisé (sans bord) $\mathcal{A}$-colorié (resp. $\mathcal{A}'$-colorié) contenu dans l'intérieur de M.*

Comme on vient de le voir, la variété $\mathbf{R}^3$ munie d'un $\mathcal{A}$-coloriage ou d'un $\mathcal{A}'$-coloriage a un invariant bien défini dans k. Il en est de même pour les variétés B^3 et S^3.

DÉFINITION 3.2 – *On appellera $\mathcal{M}$-invariant de type V (V comme variété) un système $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ où α et κ sont des éléments inversibles de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$ et où Z est un invariant qui associe à toute variété $\mathcal{A}$-coloriée compacte sans bord (M, L) un élément $Z(M, L)$ de k et qui possède les propriétés suivantes :*

(I1) $Z(\emptyset) = 1$.

(I2) Si L est un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié sans bord contenu dans S^3, $Z(S^3, L)$ est égal au produit de $Z(S^3, \emptyset)$ et de l'invariant $< L >$ de L.

(I3) Si M' est obtenu d'une variété compacte sans bord M par une chirurgie d'indice $p < 2$, et si L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié contenu dans M et M', on a :

$$Z(M', L) = \begin{cases} \alpha Z(M, L) & si \quad p = 0 \\ \alpha^{-1} Z(M, L) & si \quad p = 1. \end{cases}$$

(I4) Si (M, L) est une variété $\mathcal{A}$-coloriée, si K est un noeud parallélisé contenu dans le complémentaire de L dans M et si M' est obtenu par la chirurgie de M le long de K, on a :

$$Z(M', L) = \kappa^{\sigma(W)} Z(M, L \cup K(\Omega)),$$

$\sigma(W)$ désignant la signature du cobordisme W de M vers M' déduit de la chirurgie, et $K(\Omega)$ désignant le nœud K colorié par Ω.

DÉFINITION 3.3 – *On appellera $\mathcal{M}$-invariant de type C (C comme connexe) un système (Z, κ, Ω) où κ est un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$ et où Z est un invariant qui associe à toute variété $\mathcal{A}$-coloriée compacte sans bord et connexe (M, L) un élément $Z(M, L)$ de k et qui possède les propriétés (I2), (I4) et la propriété :*

(I'1) $Z(S^3, \emptyset) = 1$.

Remarques

Dans les définitions ci-dessus, on peut sans difficulté considérer Ω comme un élément de $\mathcal{A}'$ au lieu de $\mathcal{A}$.

Soit $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ un $\mathcal{M}$-invariant de type V. Alors Z est multiplicatif pour la somme disjointe et vérifie :

$$Z(S^3) = \alpha \qquad \text{et} \qquad Z(S^1 \times S^2) = 1.$$

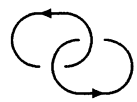
Si Z_0 est un invariant de type C, Z_0 est multiplicatif pour la somme connexe. Tout $\mathcal{M}$-invariant $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ de type V induit un invariant $(\alpha^{-1}Z, \kappa, \Omega)$ de type C, et tout invariant Z_0 de type C se relève en un unique invariant de type V si et seulement si $Z_0(S^1 \times S^2)$ est inversible.

On peut envisager des $\mathcal{M}$-invariants d'autres types, en considérant d'autres classes de variétés, comme les variétés non nécessairement orientées, les variétés spinorielles, etc. On conservera les propriétés importantes (I2) et (I4) et on adaptera les autres.

Pour tout objet X de $\mathcal{M}$, la composition par θ_X induit une application de $\mathrm{End}(X)$ dans lui-même. Ces applications passent au quotient et définissent un isomorphisme linéaire θ de $\mathcal{A}$ dans lui-même (le *twist*). Cette application peut s'interpréter de la façon suivante : si L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié, si L' est obtenu en effectuant un "twist" direct sur une composante de L et L'' en modifiant par θ la couleur de cette composante, alors L' et L'' ont le même invariant.

L'invariant du nœud trivial colorié par un élément u de $\mathcal{A}$ sera noté $\varepsilon(u)$. La forme ε est un morphisme d'algèbre.

Soit H l'entrelacs de Hopf positif :



Si l'on colorie les composantes de H par deux éléments u et v de $\mathcal{A}$, cet entrelacs a un invariant $< u, v >_H$ dans k. L'expression $<?, ?>_H$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{A}$ que l'on appellera forme de Hopf sur $\mathcal{A}$.

THÉORÈME 3.4. – *Soit κ un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type C (Z_0, κ, Ω) si et seulement si κ et Ω vérifient les conditions*

suivantes :

$$(I5) \qquad \forall a = \pm 1 \ \ \forall u \in \mathcal{A} \qquad < \theta^a(u), \theta^a(\Omega) >_H = \varepsilon(u)\kappa^a$$

et cet invariant se relève en un (unique) $\mathcal{M}$-invariant de type V si et seulement si $\varepsilon(\Omega)$ est inversible.

Remarque. – Un $\mathcal{M}$-invariant est uniquement déterminé par l'élément Ω de $\mathcal{A}$. On a :

$$(I6) \qquad \kappa = \varepsilon\theta(\Omega)$$

et, si l'invariant est de type V, $\varepsilon(\Omega)$ est inversible et l'on a :

$$(I7) \qquad \alpha = \varepsilon(\Omega)^{-1}.$$

Esquisse de démonstration :

D'après une remarque prédédente, un $\mathcal{M}$-invariant de type V est caractérisé par l'invariant associé de type C, et un invariant Z_0 de type C se relève en un invariant de type V si et seulement si $Z_0(S^1 \times S^2)$ est inversible. Il suffit donc de considérer les invariants de type C définis sur les variétés orientées connexes.

Un résultat de Lickorish et Wallace dit que toute variété de dimension 3 compacte connexe sans bord et orientée peut être décrite comme résultat d'une chirurgie sur S^3 le long d'un certain entrelacs parallélisé. On peut étendre sans difficulté ce résultat au cas des variétés $\mathcal{A}$-coloriées, et toute variété $\mathcal{A}$-coloriée connexe (M, L) peut être obtenue comme résultat d'une chirurgie sur une variété $\mathcal{A}$-coloriée (S^3, L), le long d'un entrelacs parallélisé L' disjoint de L. Si alors (Z_0, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C, on a :

$$Z_0(M, L) = \kappa^p < L \cup L'(\Omega) >,$$

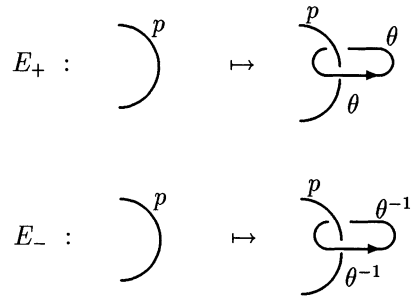
$L'(\Omega)$ étant l'entrelacs L' où chaque composante est coloriée par Ω et où p est égal à la signature du cobordisme donné par la chirurgie, c'est-à-dire à la signature de la matrice d'enlacement de l'entrelacs chirurgical L'. Ceci montre que, lorsqu'il existe, l'invariant Z est uniquement déterminé par κ et Ω.

Plus précisément, cette méthode donne une formule permettant de définir $Z_0(M, L)$, et il suffit de montrer que cet élément $\kappa^p < L \cup L'(\Omega) >$ est indépendant des choix.

Appelons entrelacs mixte une paire (L, K) où L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié contenu dans la sphère S^3, et K est un entrelacs parallélisé disjoint de L. Par

chirurgie le long de K, on obtient une variété $\mathcal{A}$-coloriée $M(L,K)$, et un cobordisme $W(L,K)$ de S^3 à la variété $M(L,K)$.

Un théorème de Kirby ([Ki]) dit que l'on peut passer d'une présentation de chirurgie d'une variété à une autre en effectuant une suite de modifications élémentaires (appelées mouvements de Kirby). D'autres types de modifications plus maniables ont été proposés par Fenn et Rourke ([FR]). On peut généraliser ces opérations élémentaires au cas des variétés $\mathcal{A}$-coloriées et l'on obtient que deux entrelacs mixtes (L_0,K_0) et (L_1,K_1) définissent la même variété $\mathcal{A}$-coloriée si et seulement si, on peut passer de (L_0,K_0) à (L_1,K_1) par une suite d'opérations élémentaires de type E_+ ou E_- ou de leur inverse :



Dans ces dessins, les branches marquées d'un p désignent p portions d'entrelacs coloriés ou chirurgicaux d'orientation quelconque et les autres représentent des composantes chirurgicales. Un symbole θ ou θ^{-1} signifie un twist positif ou négatif. Outre la présence d'entrelacs coloriés, la différence avec les mouvements de Fenn et Rourke est qu'ici, les entrelacs sont parallélisés et donc orientés. Cependant, il n'est pas difficile de montrer que les opérations E_+ et E_- permettent de changer l'orientation d'une composante de l'entrelacs chirurgical.

En conséquence, pour montrer que la formule proposée pour $Z_0(M,L)$ est indépendante des choix, il suffit de montrer que les opérations E_+ et E_- ne modifient pas cette formule. Comme l'opération E_+ (resp. E_-) modifie la signature de la variété de dimension 4 $W(L,K)$ de 1 (resp. -1), on voit que l'invariance par E_+ et E_- est équivalente à la condition (I5). Et la valeur de κ s'en déduit aisément.

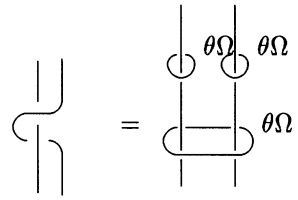
THÉORÈME 3.5. – *Désignons par $\mathcal{A}'_0 \subset \mathcal{A}'$ l'annulateur du noyau de ε, et par v et v' les restrictions de $\varepsilon\theta$ et $\varepsilon\theta^{-1}$ à $\mathcal{A}'_0$. Soit κ un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type $C(Z_0,\kappa,\Omega)$ à valeurs dans une extension quadratique de k si et seulement si les applications v et v' sont bijectives de $\mathcal{A}'_0$ sur k,*

et dans ce cas, κ et Ω sont donnés par les formules :

$$\kappa^2 = vv'^{-1}(1) \qquad \Omega = \kappa v^{-1}(1).$$

Démonstration :

Supposons qu'il existe un $\mathcal{M}$-invariant (Z, κ, Ω) de type C. Soit x un élément du noyau de la forme de Hopf sur $\mathcal{A}'$. Considérons un nœud parallélisé K dans S^3 et L un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié situé à l'extérieur de K. Si l'on a deux croisements positifs consécutifs sur K, on peut effectuer trois opérations correspondant à la formule (I5) et l'on obtient :



le symbole = signifiant que les diagrammes $\mathcal{A}'$-coloriés ont même invariants. On a également une formule pour des croisements négatifs. Ainsi, si K' est obtenu à partir de K en faisant se croiser deux branches de K, il existe un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié L' tel que $< K(x) \cup L >=< K'(x) \cup L' >$. On peut ainsi dénouer entièrement K et il existe un nœud parallélisé K_0 trivial et un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié L' tel que $< K(x) \cup L >$ soit égal à $< K_0(x) \cup L' >$. Il existe donc un élément y de $\mathcal{A}'$ tel que :

$$< K(x) \cup L >=< x, y >_H .$$

Comme x appartient au noyau de la forme de Hopf, $< K(x) \cup L >$ est nul et, d'après la définition de $\mathcal{A}'$, x est nul. Ainsi le noyau de la forme de Hopf sur $\mathcal{A}'$ est trivial.

D'autre part, faire un twist positif sur chacune des deux composantes de l'entrelacs de Hopf revient (pour le calcul de l'invariant associé) à mettre les deux composantes parallèles à elles-mêmes et effectuer un twist positif global. On a donc la formule :

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad < \theta x, \theta y >_H = \varepsilon\theta(xy).$$

On peut aussi montrer cette formule directement en utilisant les relations entre les transformations c et θ de $\mathcal{M}$.

Considérons l'opération "changement d'orientation" qui consiste à multiplier par -1 les deux premiers vecteurs des parallélisations. Cette opération induit une transformation

γ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui commutte avec θ. Si l'on désigne par $<?,?>'$ la forme induite par l'entrelacs de Hopf négatif, on a alors :

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad < \theta^{-1}x, \theta^{-1}y > = < \theta^{-1}\gamma x, \theta^{-1}y >' = \varepsilon\theta^{-1}(\gamma(x)y).$$

On en déduit que les noyaux des formes $\varepsilon\theta(??)$ et $\varepsilon\theta^{-1}(??)$ sont triviaux. Ce qui implique que si I désigne le noyau du caractère ε, les deux sous-k-modules θI et $\theta^{-1}I$ ne contiennent aucun idéal non trivial. Soit x un élément de l'annulateur $\mathcal{A}'_0$ de I dans $\mathcal{A}'$. Soit $a = \pm 1$. Si $\varepsilon\theta^a(x)$ est nul, on a pour tout y de $\mathcal{A}'$:

$$\varepsilon\theta^a(xy) = \varepsilon\theta^a(x\varepsilon(y)) + \varepsilon\theta^a(x(y - \varepsilon(y)) = \varepsilon\theta^a(x)\varepsilon(y) = 0,$$

ce qui implique que x est nul et les applications v et v' de $\mathcal{A}'_0$ dans k sont toutes les deux injectives. On vérifie d'autre part que Ω appartient à $\mathcal{A}'_0$ et est envoyé en des éléments inversibles par v et v', ce qui montre la bijectivité des deux applications v et v'.

Réciproquement, si ces deux applications sont bijectives, on vérifie que (Z, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C si et seulement si on a :

$$\Omega = \kappa v^{-1}(1) \qquad \kappa^2 = vv'^{-1}(1).$$

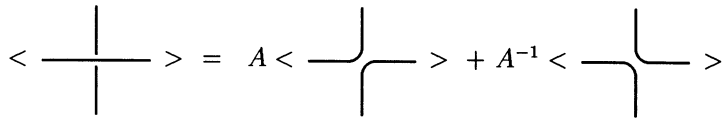
COROLLAIRE 3.6. – *Unicité : on suppose que (Z, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C. Alors les autres $\mathcal{M}$-invariants de type C sont de la forme $(e^{\chi}Z, e\kappa, e\Omega)$, e étant un élément quelconque de k de carré 1, et χ désignant la semi-caractéristique d'Euler (rang du H_0 plus rang du H_1).*

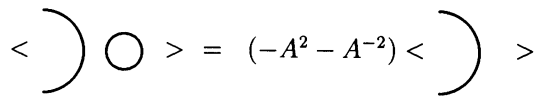
COROLLAIRE 3.7. – *On suppose que k est un corps, que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ est de dimension finie sur k et que la forme de Hopf sur $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ est non dégénérée. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type C à valeurs dans une extension quadratique de k.*

4. LE CAS DU CROCHET DE KAUFFMAN

Le crochet de Kauffman est un invariant d'entrelacs en bandes à valeurs dans l'anneau $\mathbf{Z}[A, A^{-1}]$. Un entrelacs en bandes est un entrelacs non orienté muni en tout point d'un vecteur unitaire normal à la courbe. La bande est un épaississement de dimension 2 normal au champ de vecteur et donc orienté. Un diagramme de nœud représente un entrelacs en bandes, le champ de vecteur étant vertical (c'est-à-dire normal au plan du

dessin), et les bandes horizontales et orientées par l'orientation du plan. Le crochet de Kauffman <? > vérifie les relations "skein" suivantes :





Contrairement à l'usage, on initialisera le crochet en affectant au nœud vide la valeur 1. Avec cette convention, le crochet de Kauffman est multiplicatif pour l'union disjointe.

4.1 La catégorie de Temperley-Lieb

Soit k un anneau commutatif muni d'un élément inversible $A \in k$. On peut considérer la catégorie suivante :

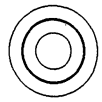
— Les objets sont ceux de la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$.

— Les morphismes sont les k-combinaisons linéaires d'entrelacs en bandes contenus dans $\mathbf{C} \times [0,1]$ et rencontrant $\mathbf{C} \times \partial[0,1]$ de façon standard, définies modulo l'isotopie régulière des entrelacs en bandes et les relations skein de Kauffman.

La composition est définie comme pour la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$. On a donc une k-catégorie $\mathcal{TL}$ que l'on appellera catégorie de Temperley-Lieb. Le point important est que, comme dans le cas de la catégorie $\mathcal{E}$, on peut définir une opération associative $\otimes$, un objet neutre $\mathbf{1}$, ainsi que des transformations $c, \theta, *, \omega$ et e et la catégorie $\mathcal{TL}$ est munie d'une structure de k-catégorie enrubannée. De plus, l'oubli de l'orientation induit un foncteur de catégorie enrubannée de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{TL}$.

Comme les relations skein permettent de réduire entièrement tout entrelacs en bandes, on vérifie que la k-algèbre $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ est égale à k. Plus généralement, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([p],[q])$ possède une k-base formée des classes d'isotopie d'entrelacs en bandes représentés par les diagrammes sans croisement et sans boucle fermée. Quant à l'algèbre $\mathcal{A} = \mathrm{H}_0(\mathcal{TL})$, ses éléments sont représentés par les combinaisons linéaires d'entrelacs en bandes contenus dans $S^1 \times B^2$, définies modulo les relations skein et $\mathcal{A}$ est l'algèbre $k[z]$ où z est le nœud

standard essentiel sans twist de $S^1 \times B^2$.

$z =$  $= \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{[1]})$.

Cette algèbre est de dimension infinie, on ne peut donc pas appliquer tel quel le théorème 3.5 pour construire des invariants de variétés de dimension 3. Il est cependant possible de décrire complètement la forme de Hopf ainsi que le twist θ ([BHMV1]). On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2.([BHMV1]) – *Si l'anneau k est intègre, il existe un $\mathcal{TL}$-invariant de type V (dans une extension de k) si et seulement si il existe un entier $p \geq 1$ tel que p soit inversible et que : $A^p = -1$.*

Supposons que l'on soit dans ce cas, c'est-à-dire que k est intègre, que p est inversible dans k et que $A^p = -1$. On prendra p le plus petit possible. On supposera également $p \geq 3$. Posons tout d'abord pour tout $n \geq 0$:

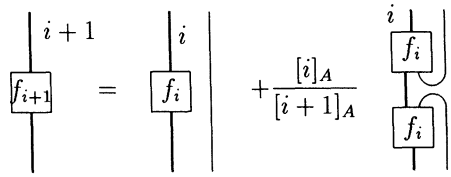
$$[n]_A = \frac{A^{2n} - A^{-2n}}{A^2 - A^{-2}}.$$

Soit q le plus petit entier tel que $A^{4q} = 1$. Alors les éléments $[1]_A, [2]_A, \ldots, [q-1]_A$ sont inversibles dans k et $[q]_A$ est nul. On peut définir des idempotents $f_0, \ldots, f_{q-1}$ de $\mathcal{TL}$ par les formules :

$$f_0 = \mathrm{Id}_{[0]} \qquad f_1 = \mathrm{Id}_{[1]}$$

$$\forall i > 0 \quad f_{i+1} = f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]} + \frac{[i]_A}{[i+1]_A}(f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]})(\mathrm{Id}_{[i-1]} \otimes e)(f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]});$$

l'élément e désigne le vecteur de la base standard de $\mathrm{End}([2])$ distinct de Id.



Ces éléments sont des idempotents vérifiant :

$$\forall i < q \quad \forall x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([i],[i]) \qquad x f_i = \varepsilon(x) f_i,$$

ε étant le caractère annulant tous les vecteurs de la base canonique sauf 1. De plus la trace $\tau(f_i)$ est égale à $(-1)^i[i+1]_A$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([q-1],[q-1]) \qquad \tau(xf_{q-1}) = \varepsilon(x)\tau(f_{q-1}) = 0$$

et ceci implique que f_{q-1} est nul dans la catégorie $\mathcal{TL}_{red}$. Sa classe $\mathrm{tr}(f_{q-1})$ est donc nulle dans l'algèbre $\mathcal{A}' = \mathrm{H}_0(\mathcal{TL}_{red})$.

Pour tout $i = 0, \ldots, q-1$, désignons par e_i la classe $\mathrm{tr}(f_i)$ de f_i dans $\mathcal{A}$. On vérifie que e_i est égal au i-ième polynôme de Tchebychev de z. C'est-à-dire que si z est égal à $y + y^{-1}$ dans une extension de $k[z]$, on a :

$$e_i = \frac{y^{i+1} - y^{-i-1}}{y - y^{-1}.}$$

Ceci implique que e_i est un polynôme unitaire de z. Comme e_{q-1} est nul dans l'algèbre $\mathcal{A}'$, cette dernière est de type fini sur k.

Lorsque p est pair, q est égal à p/2 et on vérifie que le théorème 3.5 s'applique intégralement. Si p est impair, q est égal à p et, dans ce cas, le théorème ne s'applique plus. On a :

$$\mathcal{A}' = k[z]/(e_{q-1})$$

mais la forme de Hopf est dégénérée sur $\mathcal{A}'$.

Si p est égal à 1 ou 2, l'algèbre $\mathcal{A}'$ est égale à $\mathcal{A}$ et la forme de Hopf est également dégénérée. Dans ces deux cas, $p = 1$ ou 2 ou p impair, on peut cependant directement construire un triplet (α, κ, Ω) vérifiant les conditions (I5) et (I6), ce qui donne également un $\mathcal{TL}$-invariant qui est d'ailleurs toujours de type V ([BHMV1]).

On a de plus :

$$\mathrm{H}'(\mathcal{TL}) = \begin{cases} k[z]/(e_k + e_{k-1}) & \text{si} \quad p = 2k+1 \\ k[z]/(z+2) & \text{si} \quad p = 1 \\ k[z]/(z^2-4) & \text{si} \quad p = 2. \end{cases}$$

Dans le cas p pair ≥ 4, cet invariant a été conjecturé par Witten puis construit par Reshetikhin et Turaev à l'aide des groupes quantiques ([RT2]). Signalons également une construction de cet invariant à l'aide des algèbres de Temperley-Lieb par Lickorish ([Li2]). L'invariant pour p impair correspond à l'invariant construit par Kirby et Melvin ([KM]).

Remarque. – On peut appliquer cette méthode à d'autres invariants connus des entrelacs. Si l'on considère par exemple le polynôme de HOMFLY ou le polynôme de Kauffman, on construit une catégorie enrubannée en quotientant la catégorie linéaire engendrée par la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ par les relations skein qui apparaissent dans ces polynômes. On obtient alors un analogue de la catégorie $\mathcal{TL}$. Dans les deux cas, l'algèbre correspondante $\mathcal{A}$ est une algèbre de polynôme en une suite de variables. Et les calculs devraient pouvoir se poursuivre dans ce cadre. Ils sont malheureusement trop compliqués, et rien de décisif n'a été fait actuellement.

5. LE CAS DES GROUPES QUANTIQUES

Les groupes quantiques sont des bigèbres de Hopf qui apparaissent comme déformation d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie ([D1] [D2] [J] [Lu] [Ro]). Le point important est que l'on peut enrichir ces algèbres en des bigèbres de Hopf quasitriangulaires. L'élément R a été construit par Drinfeld en utilisant un objet appelé double quantique d'une bigèbre de Hopf ([D1] [D2]).

5.1. Groupes quantiques classiques

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ une matrice de Cartan d'une algèbre de Lie L de type classique, c'est-à-dire dans l'une des séries A, B, C ou D. La matrice A est symétrique et l'on peut définir une algèbre $U_q(L)$ par générateurs et relations :

— générateurs : X_i^+, X_i^-, k_i $(1 \leq i \leq m)$

— relations :

(GQ1) les éléments k_i sont inversibles et commutent entre eux

(GQ2) $\forall i,j \qquad k_i X_j^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm a_{ij}/2} X_j^{\pm}$

(GQ3) $\forall i,j \qquad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{k_i^2 - k_i^{-2}}{q - q^{-1}}$

(GQ4) $\forall i \neq j \qquad \sum_{k=0}^{k=1-a_{ij}} (-1)^k \frac{[1-a_{ij}]!}{[k]![1-a_{ij}-k]!} (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0,$

où l'on note :

$$[n]! = \prod_{j=1}^{n} \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}.$$

On vérifie que l'algèbre $U_q(L)$, qui est une déformation de l'algèbre enveloppante de L, est définie sur l'anneau commutatif $\mathbf{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, (q - q^{-1})^{-1}]$. De plus $U_q(L)$ a une structure de bigèbre de Hopf en définissant la comultiplication Δ, l'antipode γ et la

coünité ε par :

$$\Delta(X_i^{\pm}) = k_i \otimes X_i^{\pm} + X_i^{\pm} \otimes k_i \qquad \text{et} \qquad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i$$

$$\gamma(X_i^{\pm}) = -q^{\pm 1} X_i^{\pm} \qquad \text{et} \qquad \gamma(k_i) = k_i^{-1}$$

$$\varepsilon(X_i^{\pm}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(k_i) = 1.$$

5.2. Matrice R

Supposons maintenant l'anneau $\mathbf{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, (q-q^{-1})^{-1}]$ envoyé dans $\mathbf{C}$. L'élément $q^{1/2}$ est donc un paramètre complexe distinct de $0, \pm 1, \pm i$.

La description explicite de $U_q(L)$ permet d'identifier l'algèbre $U_q(L)$ tensorisée par la sous-algèbre commutative engendrée par les k_i avec le double de Drinfeld de la sous-algèbre engendrée par l'algèbre de Borel, elle-même engendrée par les éléments k_i et X_i^+. Ceci permet de construire un élément R appartenant à un complété de $U_q(L) \otimes U_q(L)$ et $U_q(L)$ est "presque" une bigèbre de Hopf quasitriangulaire. La catégorie $Rep(U_q(L))$ est une catégorie monoïdale, mais si M et N sont deux représentations de $Rep(U_q(L))$, il n'est pas sûr que R puisse agir par multiplication sur $M \otimes N$.

Si q n'est pas une racine de l'unité, la catégorie $Rep(U_q(L))$ est semi-simple et R agit sur tout produit tensoriel $M \otimes N$. Dans ce cas la catégorie $Rep(U_q(L))$ est une $\mathbf{C}$-catégorie enrubannée, mais elle ne possède pas de $Rep(U_q(L))$-invariant.

Supposons que q soit une racine primitive l-ième de l'unité. La catégorie $Rep(U_q(L))$ n'est plus semi-simple. On peut cependant construire une famille finie de modules simples V_λ indexée par certains types de tableaux de Young ([TW]). Par exemple, si l'algèbre de Lie L est égale à sl_k, ces tableaux sont les tableaux ayant au plus $k-1$ lignes et dont la première ligne est de longueur au plus $l-k$.

Turaev et Wenzl montrent que la sous-catégorie pleine de la catégorie $Rep(U_q(L))$ engendrée par les produits tensoriels de tels modules forme une $\mathbf{C}$-catégorie enrubannée $\mathcal{M}_q(L)$. Soit $\mathcal{M}'_q(L)$ la sous-catégorie enrubannée de $\mathcal{M}_q(L)$ engendrée par les objets de $\mathcal{M}_q(L)$ et les endomorphismes scalaires des modules V_λ. Alors Turaev et Wenzl montrent (sous une forme différente) que l'algèbre $\mathcal{A}$=$\mathrm{H}_0(\mathcal{M}'_q(L)_{red})$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$, engendrée par les éléments $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$, et que la forme de Hopf est non-dégénérée sur $\mathcal{A}$. On a donc :

THÉORÈME 5.3.([TW]) – *Si L est une algèbre de Lie de type A, B, C ou D et si q est une racine primitive de l'unité, il existe un $\mathcal{M}'_q(L)$-invariant de type V, unique à un signe près.*

Remarque. – Si L est l'algèbre de Lie sl_2, l'invariant associé correspond à l'invariant obtenu pour le crochet de Kauffman lorsque A est une racine paire de -1. Cette correspondance provient en fait du foncteur canonique des entrelacs dans les k-catégories enrubannées. Ce foncteur induit un foncteur de $\mathcal{TL}$ dans la catégorie $\mathcal{M}'_q(L)$, avec $q = A^4$. Les éléments $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ correspondent aux traces des idempotents f_i trouvés en section 4. Le tableau de Young λ a ici une seule ligne, c'est donc un nombre i et $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ est envoyé en $\mathrm{tr}(f_i) = e_i$.

BIBLIOGRAPHIE

[BHMV1] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum et P. Vogel – *Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket*, Topology **31** (1992), 685–699.

[BHMV2] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum et P. Vogel – *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology, à paraître.

[BW] J. Birman et H. Wenzl – *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 249–273.

[D1] V. Drinfeld – *Quantum groups*, Proceedings for the ICM, Berkeley (1986), 798–820.

[D2] V. Drinfeld – *On almost cocommutative Hopf algebras*, Algebra i Analis (1) **2** (1989), 30–46 (en russe).

[FR] R. Fenn et C. Rourke – *On Kirby's calculus of links*, Topology **18** (1979), 1–15.

[J] M. Jimbo – *Introduction to the Yang-Baxter equation, braid group, knot theory and statistical mechanics*, World Scientific (1989), 111–134.

[Ka1] L. H. Kauffman – *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.

[Ka2] L. H. Kauffman – *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 417–471.

[Ki] R. Kirby – *A calculus for framed links*, Invent. Math. **45** (1978), 33–56.

[KM] R. Kirby et R. Melvin – *On the 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* $sl_2(\mathbf{C})$, Invent. Math. **105** (1990), 473–545.

[Li1] W. B. R. Lickorish – *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. **76** (1962), 531–540.

[Li2] W. B. R. Lickorish – *Three-manifold invariants and the Temperley-Lieb algebra*, Comm. Math. Helv. **67** (1992), 571–591.

[Lu] G. Lusztig – *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. **70** (1988), 237–249.

[Ma] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. **5** Springer-Verlag (1971).

[Ro] M. Rosso – *Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.

[RT1] N. Yu. Reshetikhin et V. G. Turaev – *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.

[RT2] N. Yu. Reshetikhin et V. G. Turaev – *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.

[Tu] V. G. Turaev – *Quantum invariants of 3-manifolds*, preprint 1992.

[TW] V. G. Turav et H. Wenzl – *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*, Int. J. of Math. **4**, 2 (1993), 323–358.

[Wa] K. Walker – *On Witten's 3-manifold invariants*, preprint 1991.

[Wal] A. H. Wallace – *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. of Math. **12** (1960), 503–528.

[Wi] E. Witten – *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

Pierre VOGEL
Université de Paris VII
Département de Mathématiques
Tour 45-55, $5^{\text{ième}}$ étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05
vogel@mathp7.jussieu.fr