Astérisque

ALEXIS MARIN

Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension trois

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 693, p. 151-164

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__151_0>

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Février 1988
40ème année, 1987-88, n° 693

UN NOUVEL INVARIANT POUR LES SPHÈRES D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

[d'après Casson]

par Alexis MARIN

Une variété de dimension trois H ayant l'homologie de la sphère S^3 borde une variété Spin de dimension quatre W : sa forme d'intersection est unimodulaire et paire (cf. [H-N-K], § 7). La signature de W est donc divisible par 8 ([Se], p. 91) et d'après le théorème de Rohlin ([R 1]) la réduction modulo 2 de $\frac{\text{sign}(W)}{8}$ ne dépend que de H ; c'est l'*invariant de Rohlin* $\rho(H)$ de la *sphère d'homologie* H.

On s'est particulièrement intéressé à l'invariant de Rohlin des sphères d'homologie depuis les travaux de Kirby et Siebenmann sur l'Hauptvermutung. En effet, si les principes de scindement, obtenus par la théorie des anses en dimension supérieure à 5, subsistaient en dimension 5 et 4, on obtiendrait une sphère d'homotopie de dimension 3 d'invariant de Rohlin non nul ([Si 1], Theorem 0, p. 59). Un tel contre-exemple à la conjecture de Poincaré aurait permis à Siebenmann ([Si 2]) de trianguler (*comme complexe simplicial*) les variétés orientables de dimension 5 qui ne sont pas triangulables comme variété PL. En fait, Siebenmann se contentait d'une sphère d'homologie d'invariant de Rohlin non nul et dont la double suspension est homéomorphe à S^5 et donc, depuis la solution par Edwards de la conjecture de la double suspension (cf. [L]), toutes les variétés orientables de dimension 5 sont triangulables. En dimension supérieure (ou dans le cas non orientable), la "triangulabilité des variétés non triangulables" est équivalente à l'existence d'une sphère d'homologie H d'invariant de Rohlin non nul et dont le double pour la somme connexe $H \# H$ borde une variété acyclique ([G-S] ou [Ma]). Si la sphère d'homologie H possède un difféomorphisme renversant l'orientation, alors $H \# H \approx H \# -H$ borde la variété acyclique $(H^3 - D^3) \times I$. Ceci conduisit Casson en 1976 à demander (Problème 3.43 de [Ki]) si l'invariant de Rohlin d'une telle sphère d'homologie amphichérale est toujours nul.

Casson donna la réponse en 1985 en associant à toute sphère d'homologie orientée un entier $\lambda(H)$, changeant de signe avec l'orientation de H, et dont

la réduction modulo 2 est $\rho(H)$; cependant, cet invariant ne suffit pas pour clôre l'Hauptvermutung (voir 1.3 et 1.4). L'invariant $\lambda(H)$ compte algébriquement les classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(H)$ dans $SU(2)$ (voir les § 2 et 3). Interprétant classes de conjugaison du groupe fondamental comme connexions plates à transformation de jauge près, Taubes annonça en 1986 ([T 1]) une nouvelle définition de l'invariant de Casson : la courbure définit une section du fibré cotangent de la variété M de dimension infinie des connexions sur $H \times SU(2)$ à transformation de jauge près (voir le § 7). Taubes compte les classes de connexions plates en définissant dans ce cadre une classe d'Euler. En 1987, Floer construisit huit groupes d'homologie $HF_i(M)$ $(0 \leq i \leq 7)$ dont la somme alternée des rangs est 2λ .

Dans cet exposé, nous présenterons surtout le point de vue exposé par Casson en 1985 et tenterons au § 7, d'après un récent exposé de Braam ([B]), de donner une idée d'homologie de Floer, espérant convaincre un spécialiste de consacrer un exposé à cette théorie dont les retombées en dimension 4 ne font que commencer ([A]).

Nous remercions tous ceux dont les notes nous ont permis d'entrer dans un sujet non rédigé (voir cependant [Ak-M.C.] et [B]) : Akbulut et Edwards pour les conférences de Casson et Boileau pour celles de Braam, ainsi que Guillou qui a contribué à la compréhension de ces notes.

1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Dans cet exposé, une *h-sphère* H est une sphère d'homologie orientée de dimension 3 , $-H$ est la h-sphère H munie de l'orientation opposée. On note S l'ensemble des classes de difféomorphisme orienté de h-sphères, $\Delta_K(t)$ le polynôme d'Alexandre d'un noeud K dans une h-sphère H , normalisé par $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ et $\Delta_K(1) = 1$ (voir l'appendice) et K_n (ou plus précisément (H,K_n) la h-sphère obtenue par chirurgie de Dehn de coefficient $1/n$ sur le noeud K (en particulier $K_0 = H$, voir [Rf], p. 257-264).

1.1 THÉORÈME.- *Il y a une application* $\lambda : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ *vérifiant :*

i) $\lambda(H) = 0$ *si toute représentation de* $\pi_1(H)$ *dans* $SU(2)$ *est triviale.*

ii) *L'invariant de Rohlin de* H *est la réduction modulo* 2 *de* $\lambda(H)$.

iii) $\lambda(-H) = -\lambda(H)$.

iv) $\lambda(H_1 \# H_2) = \lambda(H_1) + \lambda(H_2)$.

v) $\lambda(K_{n+1}) - \lambda(K_n) = \frac{1}{2}\Delta''_K(1)$.

1.2 COROLLAIRE.- *L'invariant de Rohlin d'une sphère d'homotopie ou d'une h-sphère amphichérale est nul.*■

1.3 *Remarque.*- L'invariant λ de Casson n'est pas invariant par cobordisme homologique : soit en effet K un noeud dans S^3 qui borde un disque lisse dans D^4 et avec $\Delta''_K(1) \neq 0$ (par exemple, le noeud du docker cf. [Rf], p. 225). La trace de la chirurgie de coefficient 1 sur K contient une sphère que l'on peut contracter pour obtenir un cobordisme homologique entre S^3 (= K_0) et K_1 , deux h-sphères, qui ont, d'après v), des invariants de Casson distincts. On ne peut donc conclure de ce que $H \not\simeq H$ borde une variété acyclique, que $2\lambda(H)$ est nul (et donc $\rho(H) = 0$) : l'invariant de Casson ne permet pas de décider en général de la "triangulabilité des variétés non triangulables", mais :

1.4 COROLLAIRE.- *Une variété topologique V de dimension 4 , de forme d'intersection paire et de signature non divisible par 16 est non triangulable.*

En effet, la somme connexe des links des sommets serait une sphère d'homotopie d'invariant de Rohlin non nul. Rappelons que, d'après Freedman, il y a de telles variétés V ([Si 3]). ■

2. REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE Γ DANS $S^3 = SU(2)$

On note Q l'algèbre de Lie du groupe S^3 des quaternions unité. L'espace $R(\Gamma)$ des représentations d'un groupe discret Γ dans S^3 est muni de la topologie de la convergence simple. On désigne par $\tilde{R}(\Gamma)$ l'ouvert formé des représentations irréductibles et $\mathcal{R}(\Gamma) = R(\Gamma) - \tilde{R}(\Gamma)$. Le groupe S^3 agit à droite (par conjugaison) sur $R(\Gamma)$. Cette action se factorise à travers $S^3 / \{\pm 1\} = SO(3)$ et est libre sur $\tilde{R}(\Gamma)$; on obtient ainsi un $SO(3)$ fibré principal $\pi : \tilde{R}(\Gamma) \longrightarrow \hat{R}(\Gamma)$.

2.1 *Lemme.- Si L est un groupe libre de rang k , l'espace $R(L)$ est homéomorphe à $(S^3)^k$ et muni d'une structure C^∞ telle que son espace tangent en la représentation triviale s'identifie fonctoriellement à $H^1(L,Q)$.*■

Soit X la classe fondamentale de $S^3 = R(\mathbb{Z})$. A tout homomorphisme $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ ($\alpha \in H^1(\Gamma;\mathbb{Z})$) , on associe $\psi(\alpha) = R(\alpha)_*(X)$ dans $H_3(R(\Gamma);\mathbb{Z})$. Grâce aux théorèmes d'Hurewicz, Künneth et des coefficients universels, on en déduit :

2.2 *Lemme.- Dans la catégorie des groupes libres de type fini, on a un isomorphisme de foncteurs $\psi^* : H^{3*}(R(.);\mathbb{Z}) \longrightarrow \Lambda^* H_1(.;\mathbb{Z})$.*■

Le groupe fondamental Γ_g d'une surface orientable de genre g est le quotient d'un groupe libre L_{2g} de générateurs $a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g$ par le sous-groupe normal engendré par $\delta = [a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]$. A la surjection $L_{2g} \longrightarrow \Gamma_g$ correspond une injection $R(\Gamma_g) \hookrightarrow R(L_{2g})$ dont l'image est $\partial^{-1}(1)$, où $\partial : R(L_{2g}) \longrightarrow S^3$ est donnée par $\partial(\rho) = \rho(\delta)$. Du calcul de l'application

tangente à l'application commutateur $(x,y) \longmapsto [x,y]$, on déduit que l'ensemble singulier de ∂ est $\mathcal{R}(L_{2g})$ et donc :

2.3 *Lemme.- Pour* $g > 1$, $\tilde{R}(\Gamma_g)$ *et* $\hat{R}(\Gamma_g)$ *sont des sous-variétés de* $R(L_{2g})$ *et* $\hat{R}(L_{2g})$ *respectivement de dimension* $6g-3$ *et* $6g-6$.■

3. SCINDEMENTS DE HEEGAARD ET REPRÉSENTATIONS : DÉFINITION DE L'INVARIANT

Soit f une fonction de Morse ordonnée sur une variété fermée orientée M de dimension 3 et t un niveau régulier séparant les points critiques d'indice 1 et 2 . Les ensembles $\{f \leq t\}$ et $\{f \geq t\}$ sont deux corps d'anses W_1 et W_2 d'union M se rencontrant sur leur bord commun $F = \{f = t\}$. Une telle décomposition $W_1 \cup_F W_2$ de M s'appelle un *scindement de Heegaard de genre* g *de* M (g est le genre de la surface F). L'ordre de W_1 et de W_2 a une importance : il permet d'orienter F comme bord de W_1 (avec la convention de la normale extérieure). Si $M' = W_1' \cup_{F'} W_2'$, on peut, en prenant des sommes connexes le long des bords, former le scindement de Heegaard $W_1 \# W_1' \cup_{F \# F'} W_2 \# W_2'$ de $M \# M'$. Si M' est S^3 , la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ munie du scindement standard $\{|z_1| \leq |z_2|\} \cup \{|z_1| \geq |z_2|\}$, on obtient sur $M = M \# S^3$ un *stabilisé élémentaire* du scindement de Heegaard de départ. Un *stabilisé* s'obtient par répétition de ce processus.

3.1 THÉORÈME de Reidemeister Singer ([Si 4]).- *Deux scindements de Heegaard d'une même variété ont des stabilisés isomorphes.*■
Voir [W] pour plus de renseignements sur les scindements de Heegaard.

Soit $W_1 \cup_F W_2$ un scindement de Heegaard de genre g de M et F_* le complémentaire d'un disque dans la surface F . Correspondant au diagramme de Van Kampen

$$L_{2g} = \pi_1(F_*) \longrightarrow \pi_1(F) \begin{array}{c} \nearrow \pi_1(W_2) \\ \searrow \pi_1(W_1) \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \pi_1(M) \ ,$$

où toutes les flèches sont des surjections, on a, au niveau des espaces de représentations, un diagramme d'inclusions :

$$R_* \supset R \begin{array}{c} \supset \\ \supset \end{array} \begin{array}{c} Q_2 \\ Q_1 \end{array} \begin{array}{c} \supset \\ \supset \end{array} Q_1 \cap Q_2 = R(\pi_1(M)) \ .$$

$\pi_1(W_i)$ est un groupe libre de genre g ; donc Q_i est une sous-variété de dimension moitié dans $R_* = R(L_{2g})$.

3.2. Orientations de R_* , $\tilde{R}$, $\hat{R}$, $\hat{Q}_i$

Fixons une orientation de S^3 . Les orientations de Q_i dépendent du choix d'une base de $\pi_1(W_i)$; elle sont donc arbitraires. Par contre, on peut se restreindre aux bases $(a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g)$ de $\pi_1(F_*)$ qui sont symplectiques pour l'orientation de F_* ; la courbe δ représente alors le bord orienté de F_* . D'après 2.2, l'orientation de R_* ainsi obtenue ne dépend pas du choix de la base. On oriente $\tilde{R}$ comme fibre de la submersion ∂ . De même, on oriente $\hat{R}$ et $\hat{Q}_i$ comme base des $SO(3)$ fibrés $\tilde{R} \longrightarrow \hat{R}$ et $\tilde{Q}_i \longrightarrow \hat{Q}_i$ (on écrit les cartes de submersion en mettant la base en première coordonnée). Comme R_* est produit de $2g$ exemplaires de S^3 , son orientation ne change pas quand on change celle de S^3 . Il en est de même pour $\hat{R}$ (car les orientations de la base S^3 de ∂ et de $SO(3)$ changent simultanément !). Les orientations de Q_1 et Q_2 (respectivement $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$) varient de la même manière lorsqu'on change l'orientation de S^3 . Désignons par $(Q_1,Q_2)_{R_*}$ le nombre d'intersection homologique de Q_1 et Q_2 dans R_* ; de 2.2 et 2.1 vient le :

3.3 *Lemme.-* M *est une* h*-sphère si et seulement si* $(Q_1,Q_2)_{R_*} = \pm 1$; *en ce cas,* Q_1 *et* Q_2 *sont transverses en la représentation triviale.*■

En particulier, pour une h-sphère, la représentation triviale est isolée et $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ est compact : on peut donc définir le nombre d'intersection homologique de $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$ dans $\hat{R}$ noté $\langle \hat{Q}_1,\hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$.

3.4 PROPOSITION et DÉFINITION.- *Le nombre* $\frac{1}{2}(-1)^g \langle \hat{Q}_1,\hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} / (Q_1,Q_2)_{R_*}$ *ne dépend pas du scindement de Heegaard* $W_1 \cup_F W_2$ *de la* h*-sphère* H ; *c'est l'invariant de Casson* $\lambda(H)$ *de* H .

Démonstration.- D'après 3.2, l'expression ne dépend ni de l'orientation de S^3 , ni des choix arbitraires des orientations de Q_1 et Q_2 ; il suffit donc, selon 3.1, de voir qu'elle est invariante par stabilisation élémentaire : R_* , Q_1 et Q_2 deviennent alors $S^3 \times S^3 \times R_*$, $S^3 \times 1 \times Q_1$, $1 \times S^3 \times Q_2$; le nouveau dénominateur est :

$$(-1)^{\dim(S^3).\dim Q_1} (S^3 \times 1 , 1 \times S^3)(Q_1 , Q_2) = (-1)^g (Q_1 , Q_2)_{R_*} ;$$

le changement est analogue pour le numérateur mais, comme $\dim \hat{Q}_1 = \dim Q_1 - 3$, le signe a changé.■

Nous verrons en 5.3 que $\langle \hat{Q}_1,\hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ est pair (essentiellement car $S^3 \longrightarrow SO(3)$ est de degré 2) ; ceci explique le $\frac{1}{2}$ dans la formule.

4. PRÉSENTATIONS DE CHIRURGIE, SCHÉMA DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

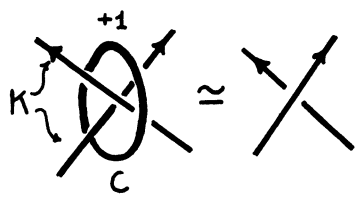
Toute variété orientée M de dimension 3 est le bord d'une variété orientée de dimension quatre W. Quitte à modifier W (remplacer des $S^1 \times D^3$ par des $D^2 \times S^2$), on peut supposer que W possède une fonction de Morse constante sur M et n'ayant pour points critiques qu'un minimum et des points d'indice 2. Les sphères d'attachement de ces points critiques forment un entrelacs E muni d'une trivialisation de son fibré normal. On dit que M est obtenu par *chirurgie sur* E et que W est la *trace de la chirurgie*. (cf. [H], chapitre 6). Si M est une h-sphère, la forme d'intersection de W est unimodulaire et, quitte à faire une somme connexe avec $\pm\mathbb{C}P^2$ (rajouter à E une composante dénouée avec trivialisation d'autoenlacement ± 1), cette forme est diagonalisable ([se], p. 92). En réalisant la diagonalisation par glissement d'anses, on obtient que les nombres d'entrelacement de deux composantes quelconques de E sont 0 et que les autoenlacements des trivialisations sont ± 1. Ainsi des niveaux séparant les points critiques forment une suite de h-sphères $S^3 = H_0, \ldots, H_p = H$ où H_{i+1} s'obtient à partir de H_i par une chirurgie de coefficient ± 1. On peut donc calculer λ par application répétée de la propriété v) du Théorème 1.1 ; les propriétés iii) et iv) en découlent, ainsi que ii) d'après A.2. Pour établir v), on établira au § 5 la :

4.1 PROPOSITION.- $\lambda(K_{n+1}) - \lambda(K_n)$ *est un entier indépendant de* n.

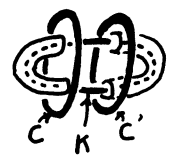
On note $\lambda'(K)$ cet invariant du noeud K. Il vient de 4.1 que pour un entrelacs K,L à deux composantes de nombre d'enlacement nul $\sum_{i,j=0}^{i} (-1)^{i+j} \lambda(K_{k+i}, L_{\ell+j})$ est indépendant de k et ℓ ; on note $\lambda''(K,L)$ cet invariant ; c'est la différence des $\lambda'(K)$ quand K est vu dans les h-sphères $L_{\ell+1}$ et L_ℓ. Au § 6, on établira la :

4.2 PROPOSITION.- $\lambda''(K,L) = 0$ *pour un entrelacs bord* (i.e. si K et L bordent deux surfaces de Seifert disjointes).

Si $L = C$ est le bord d'un disque coupant transversalement K en deux points, on peut identifier la h-sphère $L_{\pm 1} = C_{\pm 1}$ à $H = C_0$, le noeud K correspondant à son image après que l'on ait "changé un croisement" (cf. [Rf], p. 264...), et donc, en ce cas, $\lambda''(K,C)$ est la variation de $\lambda'(K)$ après que l'on ait changé "le croisement entouré par C".



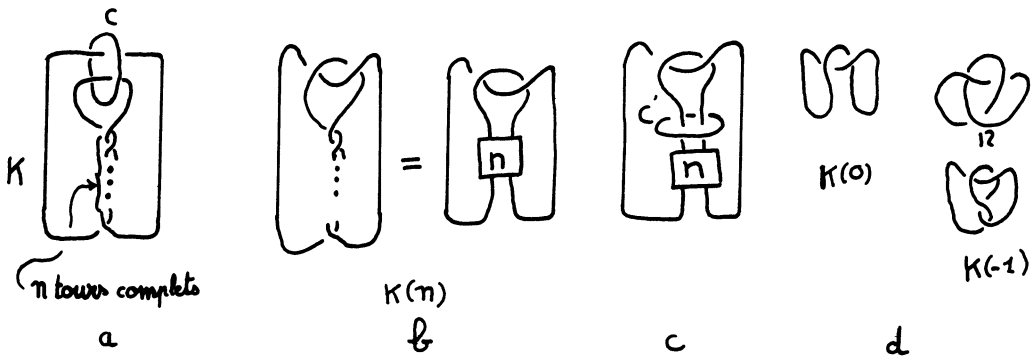
Un changement de croisement entouré par C' est dit *disjoint* de celui entouré par C si, pour D et D', des disques bordés par C et C', $D \cap K$ ne sépare pas $D' \cap K$ sur K. En ce cas, C et C' bordent des surfaces de Seifert disjoin-



tes dans le complémentaire de K et donc, tant dans $H = K_0$ que dans K_1, on a $\lambda''(C,C') = 0$. En développant et en regroupant ces identités, on obtient le :

4.3 *Lemme.*- $\lambda''(K,C)$ *est invariant par changement de croisement disjoint de* C .■

Pour identifier $\lambda'(K)$ à $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$, on se ramène d'abord au cas de noeuds dans S^3 (par une récurrence sur le nombre de chirurgies pour passer de S^3 à H). Comme tout noeud peut se dénouer par une succession de changements de croisement, il suffit d'identifier $\lambda''(K,C)$ à la variation de $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ quand on change le croisement entouré par C. Remarquons que, grâce à la formule de Conway (A.1), le lemme 4.3 est vrai pour cette variation. On peut donc supposer que (K,C) est l'entrelacs représenté en a). Comme K est trivial, on a $\lambda''(K,C) = \lambda'(K(n))$, mais $\lambda'(K(n-1)) - \lambda'(K(n)) = \lambda''(K(n),C)$ est, d'après 4.3,



indépendant de n (cf. figures b) et c)). Comme (figure d)) $K(0)$ est trivial et $K(-1)$ est le noeud de trèfle, il suffit d'identifier $\lambda'(K)$ et $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ pour le noeud de trèfle. Ce sera conséquence d'un calcul direct qui établit la :

4.4 PROPOSITION.- *Soit* K *un noeud de genre* 1 *à surface de Seifert dénouée* (i.e. dont le complément d'un bicollier est un corps d'anses) ; *alors* :

$$\lambda'(K) = \frac{1}{2}\Delta_K''(1) \ .\blacksquare$$

4.5 *Remarque.*- D'après le schéma donné ci-dessus, 4.4 est le seul endroit où les conventions d'orientation de 3.2 peuvent influer sur le résultat final. Nous profiterons de cette liberté aux § 5 et 6.

5. TWIST DE DEHN ET REPRÉSENTATIONS : DÉMONSTRATION DE 4.1

Le lien entre les scindements de Heegaard du § 3 et les chirurgies du § 4 est donné par le :

5.1 *Lemme.*- *Tout noeud* K *dans une* h-*sphère* H *possède une surface de Seifert dénouée.*

De plus, si L *est un noeud à nombre d'enlacement* 0 *avec* K , *on peut exiger que* L *soit sur la surface* S *et la sépare.*■

Prenant pour W_1 un bicollier $S \times [-1,1]$ autour de S et $W_2 = H - \overset{\circ}{W}_1$, on a un scindement de Heegaard de H tel que K sépare la surface F en deux exemplaires F^- et F^+ de S , en identifiant F^- à F^+ , on a : $Q_1 \simeq R'_*$, $R = \{(\rho^-,\rho^+) \in R'_* \times R'_* \mid \partial\rho^- = \partial\rho^+\}$ et $Q_1 \hookrightarrow R$ est l'inclusion diagonale.

Soit $\vartheta : \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \times [-1,1] \longrightarrow F$ un bicollier préservant l'orientation autour d'une courbe C dans une surface F . Le *twist de Dehn* autour de C est l'homéomorphisme h_C de F (plus précisément h_ϑ), identité hors de l'image de ϑ et tel que $h_\vartheta(\vartheta(u,v)) = \vartheta(u+v+1,v)$.

5.2 *Lemme.- Soit* $h = h_K$ *le twist de Dehn autour de* K ; *alors :*

$$W_1 \cup_{h^n} W_2 = W_1 \amalg W_2 / \{\partial W_1 = F \ni h^n(x) \sim x \in F = \partial W_2\}$$

est un scindement de Heegaard de K_n .■

On a donc $\lambda(K_n) = \frac{1}{2}(-1)^g < \hat{h}^n(\hat{Q}_1),\hat{Q}_2>_{\hat{R}} / (h^n_*(Q_1),Q_2)_{R_*}$. Comme K borde dans F_* , le twist h induit l'identité sur l'homologie de F_* et donc, d'après 2.2, $(h^n_*(Q_1),Q_2)_{R_*} = (Q_1,Q_2)_{R_*}$.

L'action de h sur R s'écrit $h_*(\rho^-,\rho^+) = (\rho^-,\rho^+ . \partial\rho^-)$ [le point base est sur F^- et $\rho . x$ désigne la représentation conjuguée de ρ par x : $\gamma \longmapsto x^{-1}\rho(\gamma)x$]. Le principe de la démonstration de 4.1 est de pousser $h_*(Q_1)$ sur Q_1 par l'isotopie SO(3) invariante $H_t(\rho^-,\rho^+) = (\rho^-,\rho^+ . \exp(tz))$ où $z \in Q$ est tel que $|z| < \pi$ et $\exp(z) = \partial\rho^-$. Cette isotopie n'est pas définie sur $R^K = \{\rho \in R \mid \rho(K) = -1\} = R'^- \times R'^-$ où $R'^- = \{\rho \in R_* \mid \partial\rho = -1\}$. Si $\hat{R}^K = \hat{R}^K/SO(3)$ et $\hat{R}'^- = \hat{R}'^-/SO(3)$, on a une SO(3)-fibration $p : \hat{R}^K \longrightarrow \hat{R}'^- \times \hat{R}'^-$. Désignons par $\hat{\delta}_K$ la préimage de la diagonale par p . En examinant le "déchirement" produit par H_t sur $Q_1 \cap R^K$, on obtient le :

5.3 *Lemme.-* $<\hat{h}^{n+1}(\hat{Q}_1),\hat{Q}_2> - <\hat{h}^n(\hat{Q}_1),\hat{Q}_2> = 2\,<\hat{\delta}_K,\hat{Q}_2>$.■

Ceci achève la démonstration de 4.3.■

5.4 *Remarque.-* En fait, le cycle $\hat{\delta}_K$ est défini dès que K sépare F (sans supposer $W_1 = F^- \times [-1,1]$) : on peut rendre Q_1 transverse à R^K , soit $Q_{1-} = Q_1 \cap R^K$ et δ_K l'image de $Q_{1-} \times SO(3)$ par $((\rho^-,\rho^+),x) \longmapsto (\rho^-,\rho^+ . x)$. Le lemme 5.3 est vrai avec $\hat{\delta}_K = \delta_K/SO(3)$. On obtient de même que, pour tout $3g-3$ cycle de $\hat{R}$, on a :

$$<\hat{h}^{n+1}(\hat{Q}_1),\alpha> - <\hat{h}^n(\hat{Q}_1),\alpha> = 2\,<\hat{\delta}_K,\alpha> .$$

6. INTERVENTION DU THÉORÈME DE NEWSTEAD : DÉMONSTRATION DE 4.2

Soit K,L un entrelacs bord. D'après la deuxième partie de 5.1, on peut supposer que L est une courbe séparante dans la moitié F^+ de la surface F construite au § 5. Il vient de 5.3 que :

$$(-1)^g \lambda''(K,L) = \langle \hat{h}_L(\hat{\delta}_K) - \hat{\delta}_K, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} .$$

Comme $\hat{h}_L(\hat{\delta}_K)$ est l'image réciproque par p du graphe de $\hat{h}'_L : \hat{R}'_L \longrightarrow \hat{R}'_L$, il suffit, pour établir 4.2, de montrer que le twist de Dehn $\hat{h}'_L$ induit l'identité en homologie.

Newstead ([N]) a calculé l'anneau de cohomologie rationnelle de $\hat{R}'_L$. Il utilise deux résultats non triviaux :

1) $\hat{R}'_L$ est homéomorphe à l'espace $S^{(g)}$ des modules de fibrés stables sur une courbe de genre g, fibrés de rang 2 et dont le déterminant est fixé, de classe de Chern 1 ([N-S]).

2) $S^{(g)}$ est une variété algébrique projective ([M]).

Atiyah et Bott, en utilisant la théorie de Morse et les équations de Yang-Mills, ont retrouvé le résultat de Newstead et obtenu la cohomologie entière de ces espaces de module ([AB]). D'après la forme des générateurs donnés par Newstead (Theorem 1 de [N] ou 9.11 de [A-B]), on a le :

6.1 THÉORÈME de Newstead.- *Un difféomorphisme de F^+ induisant l'identité sur l'homologie de F^+ induit l'identité sur l'homologie de $\hat{R}'_L$.*

6.2 *Remarque*.- Les propriétés iii) et iv) du théorème 1.1 ont des démonstrations directes. D'après le schéma du § 4, la propriété ii) suivrait de la parité de $\lambda''(K,L)$ pour tout entrelacs bord. On peut donc obtenir tous les résultats du § 1 (sauf, bien sûr, 1.1 v) !) en n'utilisant que cette parité qui s'établit élémentairement (i.e. sans le théorème de Newstead et ses présupposés) par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} 2(-1)^g (Q_1,Q_2)_{R_*} \lambda''(K,L) &= \langle \hat{h}_L(\hat{h}_K(\hat{Q}_1)), \hat{Q}_2 \rangle - \langle \hat{h}_K(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle - \langle \hat{h}_L(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle + \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle \\ &= \langle \hat{h}_K(\hat{Q}_1), \hat{h}_L^{-1}(\hat{Q}_2) \rangle - \langle \hat{Q}_1, \hat{h}_L^{-1}(\hat{Q}_2) \rangle - (\langle \hat{h}_K(Q_1), \hat{Q}_2 \rangle - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle) \\ &= 2 \langle \hat{\delta}_K, \hat{h}_L^{-1}(\hat{Q}_2) \rangle - 2 \langle \hat{\delta}_K, \hat{Q}_2 \rangle = -4 \langle \hat{\delta}_K, \hat{\delta}_L \rangle . \end{aligned}$$

(pour $\hat{\delta}_L$, on utilise la définition de la remarque 5.4).■

7. UN APERÇU DE L'HOMOLOGIE DE FLOER (cf. [B])

Soit A l'espace des connexions du S^3 fibré principal trivial $P = H \times S^3$ sur une h-sphère H. Une connexion non triviale est irréductible et le groupe de jauge G ($\simeq C^\infty(H,S^3)$) agit avec stabilisateurs $\{\pm 1\}$ sur $A - 0$: hors de la classe triviale, le quotient $M = A/G$ est une variété (10.4 de [Lw]) de groupe

fondamental $\mathbb{Z}$ (son revêtement universel est $A - 0_{/G_0}$, où $G_0 = \{f : H \longrightarrow S^3 \mid \deg(f) = 0\}$).

En utilisant la forme bilinéaire non dégénérée $b : \Omega^1(H,\mathfrak{Q}) \times \Omega^2(H,\mathfrak{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(x,y) = \int_H tr(x \wedge y)$ et le fait que l'espace tangent à l'orbite $\mathcal{G}.A$ est l'image de $d_A : \Omega^0(H,\mathfrak{Q}) \longrightarrow \Omega^1(H,\mathfrak{Q})$ (comme P est trivial, A "=" $\Omega^1(H,\mathfrak{Q})$), on identifie l'espace cotangent à M en la classe de A au noyau de $d_A : \Omega^2(H,\mathfrak{Q}) \longrightarrow \Omega^3(H,\mathfrak{Q})$. D'après l'identité de Bianchi, $d_A(F_A) = 0$ et la courbure définit une 1-forme sur M . Cette forme est la différentielle de l'invariant de Chern-Simons $CS : M \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ([C-S], § 6 et [A-P-S], II, p. 421-422). Les classes de conjugaison de connexions plates sont donc les points critiques de CS . Supposons qu'ils soient non dégénérés et en nombre fini (d'après la remarque suivant 3.3, $\hat{R}(\pi_1(H))$ est compact et l'on peut, en perturbant CS se ramener à ce cas). Floer organise ces points en un complexe de Witten (*cf.* [He], § 3) : il associe à chaque point critique un indice dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et, si C_i est le module libre sur les points critiques d'indice i , il construit un opérateur bord $\delta : C_i \longrightarrow C_{i-1}$ en "comptant" les lignes de gradient joignant deux points critiques d'indices consécutifs. Si β_i est le rang du groupe d'homologie HF_i obtenu, Floer établit la relation $\lambda(H) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{7} (-1)^i \beta_i$.

a) *Les indices.* L'opérateur étoile de Hodge définit une métrique Riemannienne $(.,.) = b(.,*.)$ sur M (rappelons que, d'après [Lw], 10.4, l'espace tangent en A à M est le noyau de $\delta_A : *d_A*$). Le gradient de CS est alors $*F_A$ et donc le Hessien de CS en une connexion plate A est $*d_A : \ker \delta_A \longrightarrow \ker \delta_A$. Cet opérateur est auto-adjoint à spectre discret mais, comme ce spectre est non borné, on ne peut définir l'indice du point critique A comme en dimension finie. La variation de l'indice le long d'un chemin générique A_t joignant deux points critiques a cependant un sens ([A-P-S], III, 7) : c'est le nombre algébrique de changements de signe des valeurs propres dans la famille de "Hessiens" (projection sur $\ker \delta_{A_t}$) $\circ *d_{A_t}$. Grâce au théorème de l'indice appliqué à $H \times S^1$ (Theorem 7.4 de [A-P-S], III), ce *flot spectral* le long d'un chemin fermé représentant k fois le générateur de $\pi_1(M)$ vaut $8k$. Cela permet à Floer de définir l'indice modulo 8 d'un point critique en le joignant à la connexion triviale et en tenant compte des signes des "trois petites valeurs propres" qui dégénèrent sur 0 (qui est une valeur propre de multiplicité 3 de $*d_{A_0}$). Pour plus de détails, notamment l'effet du changement d'orientation de H sur les indices, voir [B], § 3.

b) *L'opérateur bord : espaces de liaisons par lignes de gradient.* Considérons une ligne de gradient A_t joignant deux points critiques α et β comme une connexion $\bar{A}$ asymptotiquement plate sur le S^3 fibré trivial sur $H \times \mathbb{R}$. La courbure de $\bar{A}$ est $-\frac{d}{dt} A_t \wedge dt + F_{A_t}$ et donc l'équation $\frac{d}{dt} A_t = *F_{A_t}$ des

lignes de gradient équivaut à l'anti-self-dualité de $F_{\bar{A}}$:

(ASD) $$F_{\bar{A}} = - *F_{\bar{A}} .$$

Soit $M(\alpha,\beta;i)$ l'espace des modules des connexions $\bar{A}$ $(= A_t)$ asymptotiquement plates sur $H \times \mathbb{R}$, de valeurs limites α et β, vérifiant l'équation (ASD) et telles que le flot spectral de A_t vaut i. Taubes a montré ([T 2]) que, quitte à perturber l'équation (ASD), l'espace $M(\alpha,\beta;i)$ a un nombre fini de composantes connexes et est une variété orientée de dimension i, sur laquelle la translation le long des lignes de gradient est une action propre et libre de $\mathbb{R}$. Ainsi, $M(\alpha,\beta;1)/_{\mathbb{R}}$ est un nombre fini de points munis de signes $\varepsilon = \pm 1$, la somme de ces signes est le coefficient d'incidence $\langle\alpha,\delta\beta\rangle$ de l'opérateur bord $\delta : C_i \longrightarrow C_{i-1}$. Floer montre que si δ dépend de la perturbation de (ASD) (et, bien sûr, de celle de CS), l'homologie du complexe ne dépend que de la h-sphère H.

APPENDICE. POLYNÔME D'ALEXANDER, FORMULE DE CONWAY ET INVARIANT DE ROBERTELLO

Soit $S \times [-1,1]$ un bicollier autour d'une surface orientée S bordant un entrelacs orienté E dans une h-sphère H. La *forme de Seifert* de la *surface de Seifert* S est la forme bilinéaire $V : H_1(S;\mathbb{Z}) \times H_1(S;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui à (x,y) associe le nombre d'entrelacement de $x \times 1$ et de y. Le polynôme $\det(t^{1/2}V - t^{-1/2}{}^tV)$ ne dépend que de l'entrelacs orienté E ; c'est le polynôme d'Alexander normalisé $\Delta_E(t)$. Remarquons que $V - {}^tV$ est la forme d'intersection de la surface, donc $\Delta_E(1) = 1$ si E n'a qu'une composante et $\Delta_E(1) = 0$ sinon. Dans le cas d'un noeud, $\Delta_K(t)$ ne dépend ni de l'orientation de K ni de celle de H et est symétrique $(\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t))$.

A.1 *Lemme.- Soient* K_-, K_o, K_+ *trois entrelacs orientés qui sont identiques hors d'une boule* B *et qui coupent* B *suivant les schémas.*

K_- K_o K_+

Alors, on a la formule de Conway : $\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\,\Delta_{K_o}(t)$.

Démonstration. Soit S_o une surface de Seifert connexe pour K_o coupant B en Soient S_- et S_+ les surfaces de Seifert pour K_- et K_+, égales à S_o hors de B et coupant B en et respectivement. On a $H_1(S_\pm) = H_1(S_o) \oplus \mathbb{Z}_{a_o}$ (où a_o est une courbe traversant B) et

$V_+ = V_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. La formule s'obtient en développant le déterminant de $t^{1/2}V - t^{-1/2}{}^tV$ suivant la première colonne.■

L'*invariant de Robertello* ([Rb]) d'un noeud K dans une h-sphère H est $Rb(K) = \rho(K_{\pm 1}) - \rho(H)$. Soit W^4 la trace de la chirurgie de coefficient ± 1 sur le noeud K . L'union du disque de chirurgie et d'une surface de Seifert S pour le noeud K est une surface caractéristique F dans W . D'après la formule de Rohlin (§ 3 de [R 2]) $Rb(K)$ est l'invariant de Arf de la réduction q modulo 2 de la forme quadratique $Q = V + {}^tV$ du noeud K . Comme le déterminant de Q est impair (car $\det(V - {}^tV) = 1$!), on peut, sur $\mathbb{Z}_{(2)}$, réduire Q à une somme de facteurs de rang 2 (cf. [H-N-K], p. 4-5). On en déduit la formule de Levine $\Delta_K(-1) = \det(Q) \equiv 1 + 4\,\mathrm{Arf}(q) \bmod 8$. En calculant $\Delta_K(-1)$ par le développement de Taylor en 1 (qui est convergent dans $\mathbb{Z}_{(2)}$!), on obtient le :

A.2 *Lemme.- L'invariant de Robertello de K est la réduction modulo 2 de* $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$.■

BIBLIOGRAPHIE

[Ak-MC] S. AKBULUT, Mc CARTHY - *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*, Preprint.

[A] M.F. ATIYAH - *New invariants of 3 and 4 dimensional manifolds*, à paraître dans les proceedings de la conférence en l'honneur de Hermann Weyl, Mai 1987.

[A-B] M.F. ATIYAH, R. BOTT - *The Yang - Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. A308 (1982), 523-615.

[A-P-S] M.F. ATIYAH, W.K. PATODI, I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*, I, II, III, Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), 43-69 ; 78 (1975), 405-432 ; 79 (1975), 71-89.

[B] P.J. BRAAM - *Floer homology groups for homology three-spheres*, Preprint Oxford, Janv. 88.

[C-S] S.S. CHERN, J. SIMONS - *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. 99 (1974), 48-69.

[G-S] D. GALEWSKI, R. STERN - *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, BAMS 82 (1976), 916-918.

[G-M] L. GUILLOU, A. MARIN - *A la recherche de la topologie perdue*, Progress in Math., vol. 62, Birkhäuser, 1986.

[He] G. HENNIART - *Les inégalités de Morse [d'après E. Witten]*, Sém. Bourbaki 1983-84, exposé n° 617, Nov. 83, Astérisque 121-122 (1985), 43-61.

[H] M. HIRSCH - *Differential topology*, GTM, 33, Springer, 1976.

[H-N-K] F. HIRZEBRUCH, W.D. NEUMAN, S.S. KOCH - *Differentiable manifolds and quadratic forms*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[Ki] R. KIRBY - *Problems in low dimensional manifold theory*, Proc. Symp. in Pure Math. 32 (1978), 273-312.

[L] F. LATOUR - *Double suspension d'une sphère d'homologie d'après R. Edwards*, Sém. Bourbaki 1977-78, exposé n° 515 (Fév. 78), Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 710 (1979), 169-186.

[Lw] H.B. LAWSON - *The theory of gauge fields in four dimensions*, Lecture Notes NSF, CBMS, Conference nr 58 (1983).

[Ma] T. MATUMOTO - *Variétés simpliciales d'homologie et variétés topologiques métrisables*, Thèse Univ. Paris-Sud Orsay (1976).

[M] D.B. MUMFORD - *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Int. Congress Math. Stockholm (1962), 526-530.

[N-S] M.S. NARASIMHAN, C.S. SESHADRI - *Stable and unitary vector bundles on a compact surface*, Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.

[N] P.E. NEWSTEAD - *Characteristic classes of stable bundles of rank 2 over an algebraic curve*, TAMS 169 (1972), 337-345.

[Rb] R. ROBERTELLO - *An invariant of knot cobordism*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 543-555.

[R 1] V. ROHLIN - *Nouveaux résultats dans la théorie des variétés de dimension* 4, Dokl. Akad. Nauk, SSSR 84 (1952), 221-224 (en russe), traduction dans [G-M], 17-23.

[R 2] V. ROHLIN - *Proof of Gudkov's hypothesis*, Funk. Ann. App. 6 (1972), 136-138.

[Rf] D. ROLFSEN - *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.

[Se] J.-P. SERRE - *Cours d'arithmétique*, PUF, 1970.

[Si 1] L.C. SIEBENMANN - *Disruption in low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem*, Topology of Manifolds (Athens, Georgia Conference, 1969), Markham, Chicago 1970, 57-76.

[Si 2] L.C. SIEBENMANN - *Are non-triangulable manifolds triangulable ?*, Topology of Manifolds (Athens, Georgia Conference, 1969), Markham, Chicago 1970, 77-84.

[Si 3] L.C. SIEBENMANN - *La conjecture de Poincaré topologique en dimension* 4 [*d'après M.H. Freedman*], Sém. Bourbaki 1981-82, exposé n° 588 (Fév. 82), Astérisque 92-93 (1982), 219-248.

[Si 4] L.C. SIEBENMANN - *Les bissections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer ; un retour aux sources*, Prépublications d'Orsay 80, T16 (1980).

[T 1] C.H. TAUBES - *Casson's invariant for homology 3-spheres and Fredholm-Euler class*, Abstract AMS, vol. 7 (1986), 188.

[T 2] C.H. TAUBES - *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Diff. Geom. 25 (1987), 363-430.

[W] F. WALDHAUSEN - *Some problems on 3 manifolds*, Proc. Symp. in Pure Math. 32 (1978), 313-322.

Alexis MARIN

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département de Mathématiques et d'Informatique
U.A. 746 du C.N.R.S.
46 allée d'Italie
F-69364 LYON CEDEX 07