Astérisque

ROBERT AZENCOTT

Une approche probabiliste du théorème de l'indice (Atiyah-Singer)

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 633, p. 7-18

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__7_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 633 Novembre 1984

UNE APPROCHE PROBABILISTE DU THÉORÈME DE L'INDICE (ATIYAH-SINGER)

[d'après J.-M. Bismut]

par Robert AZENCOTT

1. Glossaire : structure spin et opérateur de Dirac

1.1. Spineurs : Soit V un espace euclidien de dimension $n=2k$. Soit $J \in \mathrm{End}(V)$, antisymétrique, tel que $J^2=-I$. On a alors $V = W \oplus JW$ avec $\dim W = k$ et V est $\mathbb{R}$-isométrique au complexifié $\tilde{W}$ de W, muni du produit scalaire hermitien évident.

L'algèbre extérieure complexe $S = \Lambda(\tilde{W})$, de dimension 2^k sur $\mathbb{C}$, munie du produit scalaire hermitien usuel s'écrit $S = S^+ \oplus S^-$, où S^+ (resp. S^-) est formé des éléments de degré pair (resp. impairs) ; l'espace hermitien S est celui des *spineurs* en dimension n.

1.2. L'algèbre de Clifford : Pour $v \in V$ la *multiplication de Clifford* $A_v \in \mathrm{End}(S)$ s'écrit $A_v = M_v - M_v^*$, où M_v est la multiplication extérieure par v, et vérifie $A_v^2 = -\|v\|^2 I$. Les A_v, $v \in V$ engendrent une sous-algèbre réelle Cl_n de $\mathrm{End}(S)$, l'*algèbre de Clifford*. La sous-algèbre Cl_n^+ de Cl_n engendrée par les produits d'ordre pair $A_{v_1}A_{v_2}\ldots A_{v_{2r}}$, $r \leq k$, laisse S^+ et S^- *invariants*.

1.3. Le groupe $G = \mathrm{Spin}(n)$: C'est le groupe des $g \in \mathrm{Cl}_n^+$ vérifiant $g^*g = gg^* = I$, et $gA_vg^{-1} = A_{\sigma(g).v}$ pour tout $v \in V$, avec $\sigma(g) \in \mathrm{End}(V)$. On sait que σ est un homomorphisme de G sur $SO(n)$ de noyau réduit à deux éléments.

1.4. Structure spin : Soit M *une variété riemannienne*, compacte, connexe, orientée, de classe C^∞ et de dimension $n = 2k$. Soit $N \xrightarrow{\pi} M$ le fibré des repères orthonormés orientés sur M. Supposons M *munie d'une structure spin*, c'est-à-dire d'un fibré principal $\bar{N} \xrightarrow{\bar{\pi}} M$ de groupe structurel G avec la factorisation $\bar{\pi} = \pi \circ \bar{\sigma}$ où $\bar{\sigma} : \bar{N} \to N$ vérifie $\bar{\sigma}(\bar{u}g) = \bar{\sigma}(\bar{u})\sigma(g)$ pour tout $\bar{u} \in \bar{N}$, $g \in G$.

Comme G opère à gauche sur les espaces de spineurs S, S^+, S^-, on définit *trois fibrés vectoriels hermitiens* F, F^+, F^- par $F = (\bar{N} \times S)/G$ etc... Chaque $\bar{u} \in \bar{N}$ s'identifie à une isométrie de S sur la fibre F_x en $x = \bar{\pi}(\bar{u})$, telle que $\bar{u}g.v = \bar{u}.gv$ pour tout $g \in G$, $v \in S$. De plus $\bar{u}$ envoie S^+, S^- sur F_x^+, F_x^-. De même les $u \in N$ sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ sur T_xM avec $x = \pi u$.

1.5. Un fibré auxiliaire : Soit ξ *un fibré vectoriel hermitien* quelconque sur M, de dimension ℓ. Sur le fibré X des repères unitaires de ξ, de groupe structurel $U(\ell)$, on choisit une connexion arbitraire λ ; on munit le fibré produit $\bar{N} \times_M X$ du produit de la connexion de Levi-Civita sur $\bar{N}$ par la connexion λ. On note ∇ *l'opérateur de dérivée covariante* sur le fibré $F \otimes \xi$, et $\Gamma(Z)$ *l'ensemble des sections* C^∞ d'un fibré quelconque Z.

1.6. Opérateur de Dirac à coefficients dans ξ : C'est l'opérateur différentiel D, d'ordre 1, agissant sur les sections f de $F \otimes \xi$ par

$$(1) \qquad Df(x) = \sum_{1 \le i \le n} (A_{v_i} \otimes I)\nabla_{v_i} f(x) , \qquad x \in M$$

où (v_i) est une base orthonormée (arbitraire) de $T_x M$ et $A_{v_i} \in \mathrm{End}(F_x)$ est la multiplication de Clifford. L'opérateur D est autoadjoint sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ et envoie $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^- \otimes \xi)$, ainsi que $\Gamma(F^- \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$. Soient D^+, D^- les restrictions de D à ces espaces. Il s'agit de calculer l'*indice* $\mathrm{Ind}(D^+) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$.

2. Densité de l'indice et noyau de la chaleur

2.1. Formule de l'indice : Les travaux de Atiyah-Singer, Atiyah-Bott-Patodi, Gilkey, Getzler, et altri fournissent la formule $\mathrm{Ind}(D^+) = \int_M \mathcal{J}(x)dx$, avec identification précise de $\mathcal{J}(x)$; de plus la classe d'équivalence (en cohomologie de de Rham) de la forme différentielle $\mathcal{J}(x)dx$ est *indépendante* du choix de la métrique sur M et de la connexion sur X ; la classe de $\mathcal{J}(x)dx$ se calcule à partir des formes de Pontrjagin sur M et du caractère de Chern $\mathrm{ch}(\xi)$.

2.2. Le semi-groupe $e^{-(t/2)D^2}$: Il agit sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ par

$$(2) \qquad e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y) f(y)dy \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi) , \ x \in M$$

où le noyau $Q_t(x,y)$ est une application linéaire de $(F \otimes \xi)_y$ dans $(F \otimes \xi)_x$. De plus $Q_t(x,x)$ laisse $F_x^+ \otimes \xi_x$ et $F_x^- \otimes \xi_x$ invariants ; pour tout $A \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ ayant la même propriété notons A^+, A^- les restrictions de A à ces sous-espaces et $\rho(A) = \mathrm{tr}(A^+) - \mathrm{tr}(A^-)$. On a alors d'après [1]

$$\mathrm{Ind}\, D^+ = \int_M \rho[Q_t(x,x)]dx$$

d'où la densité de l'indice

$$(3) \qquad \mathcal{J}(x) = \lim_{t \to 0} \rho[Q_t(x,x)] .$$

2.3. L'approche de Bismut : Comme $e^{-(t/2)D^2}$ est subordonné au semi-groupe de la chaleur, Bismut [7] estime $Q_t(x,y)$ grâce à *une version approchée* $\hat{P}$ de la loi de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ sur M conditionnée par $\{x_0 = x , x_t = y\}$ et utilise un mouvement *brownien auxiliaire* W_t sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Il obtient une expression probabiliste de $\mathcal{J}(x)$ à partir de W et d'un pont brownien $\hat{w}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'élégants calculs différentiels stochastiques permettent de découpler les varia-

bles indépendantes W et $\hat{w}$ et d'identifier ainsi $\mathcal{J}(x)dx$ au terme de plus haut degré dans le *produit* de deux formes obtenues séparément par les homomorphismes de Chern-Weil de TM et ξ .

L'efficacité et la finesse du calcul sont remarquables, mais la méthode est un peu alourdie par l'estimation $\hat{P}$ dont la construction requiert un travail technique considérable (Bismut [6]). Nous avons préféré remplacer l'utilisation de $\hat{P}$ par un simple développement de Taylor trajectoriel du brownien conditionné, dans l'esprit de [3]. Ce point de vue s'applique aussi au calcul de Bismut [7] concernant les formules de point fixe de Lefschetz (Atiyah-Singer [2]).

Signalons enfin une belle démonstration récente (Berline-Vergne [4]) des formules de l'indice, basée sur l'étude (non probabiliste !) du noyau de la chaleur sur le fibré des repères.

3. Expression probabiliste de $e^{-(t/2)D^2}$

3.1. L'opérateur D^2 et le laplacien horizontal : Pour $f \in \Gamma(F \otimes \xi)$, le *laplacien horizontal* Δ^H agit sur f par

$$\Delta^H f(x) = \sum_{1 \le i \le n} (\nabla_{v_i})^2 f(x) \ , \qquad x \in M$$

où $v_1 \ldots v_n$ est une base orthonormée quelconque de $T_x M$. Un calcul formel classique (cf. [10], [7]) donne pour $x \in M$

$$-\frac{1}{2} D_x^2 = \frac{1}{2} \Delta_x^H + C_x$$

avec $C_x \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ donné par

$$C_x = -\frac{1}{8} K(x) I - \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} A_{v_i} A_{v_j} \otimes L_x(v_i, v_j) \ . \tag{4}$$

Ici $K(x)$ est la courbure scalaire de M en x ; les v_i forment une base orthonormée quelconque de $T_x M$, les $A_v \in \mathrm{End}(F_x)$ sont les multiplications de Clifford (cf. 1.2); L est le tenseur de courbure du fibré ξ et les $L_x(v_i, v_j)$ sont des endomorphismes antihermitiens de ξ_x .

3.2. Différentielles stochastiques : Lorsque φ_t est une semi martingale brownienne nous notons $d\varphi_t$ sa différentielle stochastique de Stratonovitch, $\delta\varphi_t$ sa différentielle d'Ito. Dans tout le contexte des semi martingales browniennes à valeurs dans des variétés, l'*interprétation formelle* " $d\varphi_t = \varphi_t' dt$ " est *cohérente* et justifiée par Malliavin [12], Bismut [5] ; c'est celle qui sous-tend toutes les notations adoptées ici. L'indice t sera *occasionnellement omis* dans les équations stochastiques. Les ∂_ε , ∂_x ... désignent les *dérivées (déterministes !) usuelles*.

3.2. Brownien sur M et transport parallèle : Soit $w_t : \Theta \to \mathbb{R}^n$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^n$ défini sur l'espace de probabilité (Θ, P) . Construisons le mouvement brownien x_t sur M par la méthode de Malliavin. A tout $v \in \mathbb{R}^n$ on associe le *champ de vecteurs horizontal standard* $B(v)$ sur le fibré

des repères N, défini par $\pi^*B_u(v) = u.v$ pour tout $u \in N$. L'unique solution $u_t : \Theta \to N$ de l'équation différentielle stochastique suivante, avec condition initiale $u_o \in N$,

$$du_t = B_{u_t}(dw_t) \tag{5}$$

a pour projection $x_t = \pi u_t$ mouvement brownien sur M issu de $x_o = \pi u_o$, et solution de

$$dx_t = u_t.dw_t \ . \tag{6}$$

De plus le transport parallèle de $T_{x_o}M$ sur $T_{x_t}M$ le long de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ vaut $u_t u_o^{-1}$.

Plus généralement le *transport parallèle* τ_t de $(F \otimes \xi)_{x_t}$ sur $(F \otimes \xi)_{x_o}$ le long de la trajectoire $x_{[0t]}$ parcourue *en sens inverse du temps* vérifie l'équation de Stratonovitch (cf. [5])

$$d\tau_s f(x_s) = \tau_s \nabla_{dx_s} f(x_s) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi) \tag{7}$$

et donc l'équation d'Ito

$$\delta\tau_s f(x_s) = \tau_s(\nabla_{\delta x} f_s(x_s) + \tfrac{1}{2}\Delta^H f(x_s)ds) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi). \tag{8}$$

En particulier on voit que

$$e^{(t/2)\Delta^H} f(x_o) = E_{x_o}[\tau_t f(x_t)] \ . \tag{9}$$

3.4. La formule de Feymann-Kac "matricielle" : Par analogie avec le cas où $C \in \mathrm{End}\,\Gamma(F \otimes \xi)$ est scalaire on cherche une formule du type

$$e^{-(t/2)D^2} f(x_o) = e^{t((1/2)\Delta^H + C)} f(x_o) = E_{x_o}[V_t \tau_t f(x_t)]$$

avec $V_t \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_o}$, non anticipatif, de classe C^1 en t, et $V_o = I$. La formule d'Ito et (8) donnent

$$E_{x_o}[V_t \tau_t f(x_t)] - f(x_o) = \int_o^t E_{x_o}[(V'_s \tau_s f(x_s) + V_s \tau_s(\tfrac{1}{2}\Delta^H f(x_s))]ds$$

d'où le choix de V_s comme solution de

$$V'_s = V_s \tau_s C_{x_s} \tau_s^{-1} \quad ; \quad V_o = I \ ,$$

et donc d'après (4) $V_s = k_s U_s$ avec $U_s \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_o}$, $k_s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} k_t = \exp[-\frac{1}{8}\int_o^t K(x_s)ds] \\ U'_s = -\frac{1}{2} U_s\Big(\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha^{ij} \otimes L_s^{ij}\Big) \text{ et } U_o = I \ , \end{cases} \tag{10}$$

où $\alpha^{ij} = A_{u_o e_i} A_{u_o e_j}$, $L_s^{ij} = \tau_s L_{x_s}(u_s e_i, u_s e_j)\tau_s^{-1}$, et (e_i) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$; dans ce calcul on utilise (4) avec $v_i = u_t e_i$. On obtient donc

$$e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y) f(y)dy = E_x[k_t U_t \tau_t f(x_t)] \tag{11}$$

4. Pont brownien et calcul probabiliste du noyau de $e^{-(t/2)D^2}$

4.1. Pont brownien : Soit $p(t,x,y)$ la densité de transition du brownien (x_t) sur M, c'est-à-dire le noyau de la chaleur sur M. Pour a, b fixés dans M

et $t > 0$ donné, on peut définir (cf. [3], [13]) le processus de Markov $\hat{x}_s$ $0 \le s \le t$ non homogène en temps, à valeurs dans M, tel que la loi de $\hat{x}_{[0t]}$ coïncide avec une loi conditionnelle, celle de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ conditionnée par $\{x_0 = a\ ;\ x_t = b\}$. La densité de transition $\hat{p}$ de $\hat{x}$ s'écrit, pour $0 \le s_1 < s_2 < t$,

$$\hat{p}(s_1,s_2,x,y) = \frac{p(s_2 - s_1,x,y)p(t - s_2,y,b)}{p(t - s_1,x,b)} \quad .$$

Le générateur infinitésimal spatial de $\hat{x}$ au temps s vaut (cf. [3])

$$\frac{1}{2}\Delta_x + \operatorname{grad}_x \log p(t-s,x,b) \qquad \text{pour } 0 \le s < t,\ x \in M. \tag{12}$$

De plus $\hat{x}$ est à trajectoires p.s. continues sur $[0t]$ avec $\hat{x}_0 = a$, $x_t = b$.

Pour $s \in [0t[$ considérons le champ de vecteurs V_s sur M défini par

$$V_s(x) = \operatorname{grad}_x \log p(t-s,x,b) \qquad x \in M. \tag{13}$$

Soit $\overline{V}_s$ le relevé horizontal de V_s sur le fibré des repères N. Alors on peut construire $\hat{x}$ en résolvant le *système* d'équations stochastiques suivant où $\hat{u}_s \in N$ et $\hat{x}_s = \pi\hat{u}_s$

$$\begin{cases} d\hat{u}_s = B_{\hat{u}_s}(dw_s) + \overline{V}_s(\hat{x}_s)ds \\ d\hat{x}_s = \hat{u}_s.dw_s + V_s(\hat{x}_s)ds \end{cases} \tag{14}$$

avec $\hat{x}_0 = a$ et $\hat{u}_0 = u_0 \in \pi^{-1}(a)$. La loi conditionnelle de $u_{[0t]}$ étant donné $\{x_0 = a\ ;\ x_t = b\}$ est celle de $\hat{u}_{[0t]}$ d'où la formule, pour ψ fonctionnelle mesurable (sur l'espace des chemins à valeurs dans N)

$$\int_\Theta \psi(u_{[0t]})dP = \int_M db\, p(t,a,b) \int_\Theta \psi(\hat{u}_{[0t]})dP \ . \tag{15}$$

4.2. Expression probabiliste de $Q_t(a,b)$: Appliquons (15) à la fonctionnelle $\psi(u_{[0t]}) = k_t U_t \tau_t f(x_t)$ définie par (7), (10), pour transformer (11) en

$$\int_M Q_t(a,b)f(b)db = \int_M db\, p(t,a,b) \int_\Theta \hat{k}_t \hat{U}_t \hat{\tau}_t f(\hat{x}_t)dP \tag{16}$$

avec la définition

$$\begin{cases} \hat{k}_t\ ,\ \hat{U}_t\ ,\ \hat{\tau}_t \text{ sont les solutions de (7), (10)} \\ \text{lorsqu'on remplace } x_t\ ,\ u_t \text{ par } \hat{x}_t\ ,\ \hat{u}_t\ . \end{cases} \tag{17}$$

Ceci entraîne, f étant arbitraire, et puisque $\hat{x}_t = b$, P p.s.,

$$Q_t(a,b) = p(t,a,b) \int_\Theta \hat{k}_t \hat{U}_t \hat{\tau}_t dP \ . \tag{18}$$

Il est bien connu que $\lim_{t\to 0} t^{n/2} p(t,a,a) = 2\pi^{-n/2}$; d'autre part la courbure scalaire K étant bornée, on a $k_t = 1 + o(t)$. Puisque la différence des traces ρ est linéaire, on conclut, grâce à (3), (18) que

$$\mathcal{J}(a) = \lim_{t\to 0} \rho[Q_t(a,a)] = \lim_{t\to 0} (2\pi t)^{-n/2} \int_\Theta \rho(\hat{U}_t \hat{\tau}_t)dP \ , \tag{19}$$

où $(\hat{x}_{[0t]}, \hat{u}_{[0t]})$ sont les conditionnés de $(x_{[0t]}, u_{[0t]})$ par $\{x_0 = x_t = a\}$.

5. Changement de temps

Fixons $a \in M$ et soit $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0 . Posons

$$V_s^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mathrm{grad}_x \log p(\varepsilon^2(1-s), x, a) \qquad 0 \le s \le 1 \tag{20}$$

et soit $\overline{V}_s^\varepsilon$ le champ horizontal sur N relevé de V_s^ε . Notons $(\hat{x}_s^\varepsilon, \hat{u}_s^\varepsilon)$, $0 \le s \le \varepsilon^2$ le pont brownien obtenu en conditionnant (x_s, u_s) par $\{x_0 = x_{\varepsilon^2} = a\}$. Soient $\hat{U}^\varepsilon$, $\hat{\tau}^\varepsilon$ les solutions de (17) associées à $(\hat{x}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon)$ sur $[0, \varepsilon^2]$. Soit $\mathcal{P}^\varepsilon$ le processus $(\hat{x}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon, \hat{U}^\varepsilon, \hat{\tau}^\varepsilon)$. Comme les browniens $s \to w_{s\varepsilon^2}$ et $s \to \varepsilon w_s$ ont même loi, il est évident que le processus $s \to \mathcal{P}^\varepsilon_{s\varepsilon^2}$, $0 \le s \le 1$, a même loi que la solution $(Y_s, \Phi_s, S_s, \vartheta_s)$ du système d'équations suivant, déduit de (17), (14)

$$\begin{cases} d\Phi_s = \varepsilon B_{\Phi_s}(dw_s) + \overline{V}_s^\varepsilon(Y_s)ds \\ dY_s = \varepsilon \Phi_s . dw_s + V_s^\varepsilon(Y_s)ds \end{cases} , \tag{21}$$

avec $\Phi_o = u_o$, $Y_o = Y_1 = a$, $Y_s = \pi\Phi_s$, $Y_s \in M$, $\Phi_s \in N$,

$$\begin{cases} d\vartheta_s f(Y_s) = \vartheta_s \nabla_{dY_s} f(Y_s) \\ dS_s = -\frac{\varepsilon^2}{2} S_s \Big(\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha^{ij} \otimes \vartheta_s L_{Y_s}(\Phi_s e_i, \Phi_s e_j) \vartheta_s^{-1} \Big) ds \end{cases} , \tag{22}$$

avec $S_o = \vartheta_o = I$, $S_s \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_a$, ϑ_s^{-1} transport parallèle de $(F \otimes \xi)_a$ sur $(F \otimes \xi)_{Y_s}$ le long de $Y_{[0s]}$.

Par construction $\rho(\hat{U}_{\varepsilon^2} \hat{\tau}_{\varepsilon^2})$ et $\rho(S_1 \vartheta_1)$ ont même loi, donc (19) entraîne

$$\mathcal{J}(a) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} \int_\Theta \rho(S_1 \vartheta_1) dP . \tag{23}$$

6. Découplage d'une équation différentielle

6.1. Découplage probabiliste d'équation déterministe : Soit J un ensemble fini d'indices et soient φ^ν , ψ^ν , $\nu \in J$ des fonctions continues sur [01] à valeurs dans End(A) et End(B) où A , B sont deux espaces vectoriels hermitiens. Soit $H_t \in \mathrm{End}(A \otimes B)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$H_t' = H_t \Big(\sum_{\nu \in J} \varphi_t^\nu \otimes \psi_t^\nu \Big) \qquad \text{avec } H_o = I .$$

Soit W_t un brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^J$, défini sur l'espace de probabilité auxiliaire $(\tilde{\Theta}, \tilde{P})$; notons W_t^ν les coordonnées de W_t , et $H_t^A \in \mathrm{End}(A)$, $H_t^B \in \mathrm{End}(B)$ les solutions des équations d'*Ito*

$$\begin{cases} \delta H_t^A = H_t^A \Big(\sum_\nu \varphi_t^\nu \delta W_t^\nu \Big) & H_o^A = I^A \\ \delta H_t^B = H_t^B \Big(\sum_\nu \psi^\nu \delta W_t^\nu \Big) & H_o^B = I^B . \end{cases}$$

On a alors

$$H_t = \int_{\tilde{\Theta}} H_t^A \otimes H_t^B \, d\tilde{P}(W) ,$$

ce qui se déduit trivialement de la formule d'Ito.

6.2. Application au calcul de $\rho(S_1\vartheta_1)$: L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $SO(n)$, l'espace vectoriel $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, et $\mathbb{R}^J$ avec $J = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n\}$, munis de leurs produits scalaires usuels sont naturellement isométriques.

Le brownien auxiliaire W sera donc ici le brownien standard $W_t : \tilde{\Theta} \to \mathcal{G}$ et sera *choisi indépendant* du brownien $w_t : \tilde{\Theta} \to \mathbb{R}^n$. Le lemme 6.1 donne alors d'après (22)

$$S_t = \int_{\tilde{\Theta}} S_t^F \otimes S_t^\xi \, d\tilde{P}(W) \tag{24}$$

avec $S_t^F \in \mathrm{End}(F_a)$ et $S_t^\xi \in \mathrm{End}(\xi_a)$ définis par

$$\begin{cases} \delta S_t^F = -\frac{\varepsilon^2}{2} S_t^F \Big(\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha^{ij} \delta W_t^{ij} \Big) & \text{avec } S_o^F = I \\ \delta S_t^\xi = S_t^\xi \Big(\sum_{1 \le i < j \le n} \vartheta_t L_{Y_t}(\Phi_t e_i, \Phi_t e_j) \vartheta_t^{-1} \delta W_t^{ij} \Big) & \text{avec } S_o^\xi = I . \end{cases} \tag{25}$$

Pour $B \in \mathrm{End}(\xi_a)$, et pour $A \in \mathrm{End}(F_a)$ laissant F_s^+ , F_a^- invariants, on a $\rho(A \otimes B) = \chi(A)\mathrm{tr}(B)$ avec $\chi(A) = \mathrm{tr}\, A^+ - \mathrm{tr}\, A^-$. Les restrictions ϑ_t^F , ϑ_t^ξ de ϑ_t à F et ξ vérifiant $\vartheta_t^F \otimes \vartheta_t^\xi = \vartheta_t$, on tire finalement de (24)

$$\rho(S_1\vartheta_1) = \int_{\tilde{\Theta}} \chi(S_1^F\vartheta_1^F)\, \mathrm{tr}(S_1^\xi \vartheta_1^\xi)\, d\tilde{P}(W)$$

et W , w étant indépendants, (23) donne

$$\mathcal{J}(a) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} \int_{\Theta \times \tilde{\Theta}} \chi(S_1^F\vartheta_1^F)\, \mathrm{tr}(S_1^\xi \vartheta_1^\xi)\, dP(w)\, d\tilde{P}(W) . \tag{26}$$

7. Asymptotique du pont brownien en temps petit

Il s'agit d'estimer (Y_s, Φ_s) à l'ordre 2 en ε , pour en déduire le développement d'ordre 2 du transport parallèle inverse ϑ_1^F le long de $Y_{[01]}$.

7.1. La fonction $V_s^\varepsilon(x)$: Soit $a \in M$. Pour $\mathcal{V}$ voisinage assez petit de a , la géodésique minimisante allant de a à tout point de $\mathcal{V}$ est unique. Si $d(u,a)$ est la distance riemannienne, on sait que le noyau p de la chaleur vérifie pour $s > 0$, $x \in \mathcal{V}$

$$p(s,x,a) = s^{-n/2} \exp\Big(-\frac{d^2(x,a)}{2s}\Big) \psi(s,x,a) , \tag{27}$$

où ψ *est* C^∞ *en* $s \ge 0$, $x \in \mathcal{V}$, *avec* $\psi(0,x,a) > 0$. On notera l'*inclusion de* $s = 0$ dans le domaine de régularité de ψ . Pour une preuve de (27) renvoyons à Kanaï [11]. On en déduit que *la fonction* $V_s^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mathrm{grad}_x \log p(\varepsilon^2(1-s),x,a)$ *est* C^∞ *en* $\varepsilon \ge 0$, $x \in \mathcal{V}$ *pour* $0 \le s < 1$. De plus (27) donne en $\varepsilon = 0$, $x \in \mathcal{V}$, $0 \le s < 1$

$$V_s^o(x) = \frac{n(x,a)}{1-s} \tag{28}$$

où $n(x,a)$ est la vitesse en x de la géodésique joignant x et a en temps 1. La parité de V_s^ε en ε , et (28) donnent

$$\partial_\varepsilon V_s^o(x) = 0 \; ; \; \mathrm{vert}[\partial_x V_s^o(a).z] = -\frac{1}{1-s} z \qquad \text{pour } z \in T_aM \tag{29}$$

où $\mathrm{vert}[v]$ représente la partie verticale d'un vecteur v tangent à TM .

7.2. Développement de Taylor du brownien conditionné : Soit $Y_t \in \mathbb{R}^n$ la solution de l'équation stochastique

$$dY = \varepsilon dw + \Phi^{-1}V^{\varepsilon}(Y)dt \qquad \text{avec } Y_0 = 0 \tag{30}$$

de sorte que (21) s'écrit

$$d\Phi = B_{\Phi}(dY) \quad \text{et} \quad dY = \Phi.dY \ . \tag{31}$$

Il est légitime (cf. [12], [5], [3]) de différentier (30), (31) en ε, d'où

$$\begin{cases} d(\partial_\varepsilon Y) = dw + \{(\partial_\varepsilon \Phi^{-1})V^{\varepsilon}(Y) + \Phi^{-1}[\partial_\varepsilon V^{\varepsilon}(Y) + \partial_x V^{\varepsilon}(Y).\partial_\varepsilon Y]\}dt \\ d(\partial_\varepsilon \Phi) = B_{\Phi}[d(\partial_\varepsilon Y)] + (B'_{\Phi}.\partial_\varepsilon \Phi).dY \\ d(\partial_\varepsilon Y) = \partial_\varepsilon \Phi.dY + \Phi.d(\partial_\varepsilon Y) \end{cases} \tag{32}$$

Grâce à (28), (29) on voit immédiatement que *pour* $\varepsilon = 0$ *on a*

$$Y_t \equiv 0 \ ; \quad \Phi_t \equiv u_o \ ; \quad Y_t \equiv a \ , \tag{33}$$

$$\begin{cases} d(\partial_\varepsilon Y_t) = dw_t - \frac{1}{1-t}u_o^{-1}\partial_\varepsilon Y_t dt \\ d(\partial_\varepsilon Y_t) = u_o.d(\partial_\varepsilon Y_t) \\ d(\partial_\varepsilon \Phi_t) = B_{u_o}[d(\partial_\varepsilon Y_t)] \ . \end{cases} \tag{34}$$

Rappelons que *le pont brownien standard* $\hat{w}_t$ *sur* $\mathbb{R}^n$, obtenu en conditionnant w_t par $\{w_o = w_1 = 0\}$, vérifie

$$d\hat{w}_t = dw_t - \frac{1}{1-t}\hat{w}_t dt \ . \tag{35}$$

De (33), (34) on conclut que *pour* $\varepsilon = 0$,

$$\partial_\varepsilon Y_t = \hat{w}_t \ ; \quad \partial_\varepsilon Y_t = u_o.\hat{w}_t \ ; \quad \partial_\varepsilon \Phi_t = B_{u_o}(\hat{w}_t) \ . \tag{36}$$

7.3. Développement de Taylor du transport parallèle conditionné ϑ_1^F : Soit ω la forme différentielle d'ordre 2 sur le fibré des repères N, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, définissant la connexion de Levi-Civita sur N. Posons $\Phi_1 = u_o e^{L(\varepsilon)}$ où $L(\varepsilon) \in \mathcal{G}$. De (33), (36) on déduit $L(\varepsilon) = \varepsilon^2\mu + o(\varepsilon^2)$ avec $\mu \in \mathcal{G}$, d'où par définition de ω, $\langle \omega, \partial_\varepsilon \Phi_1 \rangle = 2\varepsilon\mu + o(\varepsilon)$ et $\mu = \frac{1}{2}(\partial_\varepsilon \langle \omega, \partial_\varepsilon \Phi_1 \rangle)_{\varepsilon=0}$. L'homomorphisme σ de G sur $SO(n)$ fournit $\sigma\vartheta_1^F = \Phi_o\Phi_1^{-1}$, et donc $\bar{u}_o \in \bar{N}$ au dessus de u_o, tel que

$$\vartheta_1^F = \bar{u}_o(I - \varepsilon^2\mu + o(\varepsilon^2))\bar{u}_o^{-1} \ . \tag{37}$$

7.4. Dérivée spatiale Φ' du brownien horizontal : La donnée $\Phi_o = q \in N$ et (31) fournissent un difféomorphisme $q \to \Phi_t(q)$ de N dont la dérivée $\Phi'_t(q) = \partial_q \Phi_t$ vérifie, par différentiation de (31),

$$d\Phi'(q)z = (B'_{\Phi(q)}.\Phi'(q)z).dY \qquad \text{pour tout } z \in T_qN \ .$$

Par "variation de la constante z", (32) montre que

$$\partial_\varepsilon \Phi_t = [\Phi_t^* Z(t)]_{\Phi_t}$$

où Φ_t^*, Φ_t^{*-1} sont les actions évidentes du difféomorphisme Φ_t sur les champs de vecteurs, et $Z(t)$ est le champ de vecteurs sur N

$$Z(t) = \int_0^t \Phi_s^{*-1}(B[d(\partial_\varepsilon \gamma_s)]) \ .$$

7.4. Calcul de μ , transport parallèle infinitésimal : On a vu que $\mu = \frac{1}{2}\partial_\varepsilon \eta(\varepsilon,t)$ en $\varepsilon = 0$, $t = 1$ avec $\eta(\varepsilon,t) = \langle \omega, \partial_\varepsilon \Phi_t \rangle_{\Phi_t}$. Par 7.3 on a $\eta(\varepsilon,t) = g(t,\Phi_t)$ avec

$$g(t,q) = \langle \omega, \Phi_t^* Z(t) \rangle_q \qquad q \in N$$

d'où la différentielle stochastique de $\eta(\varepsilon,\cdot)$

$$d_t \eta = d_t g + \partial_q g . d\Phi_t = d_t g + [B(d\gamma) g(t,\cdot)]_{\Phi_t} \ .$$

Pour tout champ fixe Z sur N , la définition du crochet de Lie donne $d\Phi_t^* Z = [\Phi_t^* Z, B(d\gamma)]$, et donc

$$d\Phi_t^* Z(t) = [\Phi_t^* Z(t), B(d\gamma)] + \Phi_t^* dZ(t)$$

$$d_t g(t,q) = \langle \omega, d\Phi_t^* Z(t) \rangle_q = \langle \omega, [\Phi_t^* Z(t), B(d\gamma)] \rangle_q \ .$$

Soit Ω *le tenseur de courbure équivariant de la connexion* ω *sur* N . Si Z^1 , Z^2 sont des champs de vecteurs sur N , on sait que

$$\langle \omega, [Z^1, Z^2] \rangle = [\omega(Z^1), \omega(Z^2)] + Z^1.\omega(Z^2) - Z^2.\omega(Z^1) - \Omega(Z^1, Z^2)$$

d'où facilement $d_t g$ et

$$d_t \eta(\varepsilon,t) = \Omega_{\Phi_t}(B(d\gamma_t), \partial_\varepsilon \Phi_t) \ . \tag{38}$$

Différentions (38) par ∂_ε . *Pour* $\varepsilon = 0$ on a $d\gamma_t \equiv 0$ et $d_t \partial_\varepsilon \eta(0,t)$ coïncide donc avec $\Omega_{\Phi_t}(B(d\partial_\varepsilon \gamma_t), \partial_\varepsilon \Phi_t)$, qui par (33), (36) vaut $\Omega_{u_o}(B(d\hat{w}_t), B(\hat{w}_t))$. D'où le résultat

$$\mu = \frac{1}{2}\partial_\varepsilon \eta(0,1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Omega_{u_o}(B(d\hat{w}_t), B(\hat{w}_t)) \ . \tag{39}$$

8. Passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$

8.1. Apparition du Pfaffien : Pour $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2k})$ la fonction polynomiale $Pf(A)$ définie par

$$A^{\wedge k} = k! Pf(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k} \tag{40}$$

est invariante par ad $O(n)$. Si φ_s est un chemin C^1 à valeurs dans $G = Spin(2k)$, avec $\varphi_o = I$, on a [7], [1] élémentairement, χ étant la différence des traces sur S^+ , S^-

$$\lim_{s \to 0} s^{-k} \chi(\varphi_s) = i^k Pf(\varphi_o') \tag{41}$$

où $\varphi_o' \in \mathcal{G} \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^k)$.

8.2. Le terme $\varepsilon^{-n}\chi(S_1^{F_\varepsilon} S_1^{F})$ pour $\varepsilon = 0$: L'action de $e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{G}$ sur l'espace des spineurs S s'écrit $\frac{1}{2} A_{e_i} A_{e_j}$. L'endomorphisme $\left(\frac{1}{2}\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha^{ij} W_t^{ij}\right)$ de $F_a = \bar{u}_o S$ vaut donc $\bar{u}_o W_t \bar{u}_o^{-1}$ avec $W_t \in \mathcal{G} \subset End(S)$. L'équation d'Ito (25) donne alors, avec $R_t \in G$

$$(42)\qquad \begin{cases} S_t^F = \exp\left(\frac{\varepsilon^4 n(n-1)}{16}\, t\right) \bar{u}_o R_t \bar{u}_o^{-1} \\ dR_t = -\varepsilon^2 R_t . dW_t \quad \text{et} \quad R_o = I \\ R_1 = \exp(-\varepsilon^2 W_1) = I - \varepsilon^2 W_1 + o(\varepsilon^2) \ . \end{cases}$$

Regroupant (42), (37), (41) on conclut

$$(43)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} \chi(S_1^F \vartheta_1^F) = (-i)^k \mathrm{Pf}(\mu + W_1) \ .$$

8.3. Expression probabiliste de la densité de l'indice : Pour $\varepsilon = 0$ on a clairement $\vartheta_1^\xi = I$, et $S_t^\xi = \beta_t \in \mathrm{End}\ \xi_a$ donné par (cf. (25))

$$(44)\qquad \begin{cases} \delta\beta_t = \beta_t \left(\sum_{1 \le i < j \le n} L^{ij} \delta W_t^{ij} \right) \quad \text{avec} \quad \beta_o = I \\ L^{ij} = L_a(u_o e_i, u_o e_j) \in \mathrm{End}\ \xi_a \ . \end{cases}$$

Passant à la limite en $\varepsilon = 0$ dans l'expression (26) de $\mathcal{J}(a)$, on a alors

$$(45)\qquad \mathcal{J}(a) = \int_{\Theta \times \tilde{\Theta}} \mathrm{Pf}\left[-\frac{i}{2\pi}(\mu + W_1)\right] \mathrm{tr}\ \beta_1\, dP(w) d\tilde{P}(W)$$

où l'intégrale stochastique μ ne dépend que de w (cf. (39)).

9. Calcul stochastique sur l'algèbre extérieure

9.1. L'exponentielle extérieure : Pour $A \in \Lambda^2(T_a M)$ on définit

$$\exp^\wedge A = 1 + A + \ldots + \frac{A^{\wedge k}}{k!}$$

élément de $\Lambda^+(T_a M)$, algèbre *commutative* des formes différentielles de degré pair. Pour B, B' dans cette algèbre, *on note* $B \underset{n}{=} B'$ *quand* B, B' *ont même composante de degré* n. En particulier pour $A, A' \in \Lambda^2(T_a M)$ on a

$$(A+A')^{\wedge k} \underset{n}{=} k!\ \exp^\wedge(A+A') = k!(\exp^\wedge A) \wedge (\exp^\wedge A') \ .$$

9.2. Magie extérieure : découplage des browniens w et W : Considérons $(\mu + W_1)$ comme un élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2k}) \simeq \mathcal{G}$. L'image par u_o de la forme différentielle

$$\mathrm{Pf}(\mu + W_1) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k} = \frac{1}{k!}\ (\mu + W_1)^{\wedge k}$$

est d'après 9.1 le terme de degré n dans $(\exp^\wedge u_o \mu u_o^{-1}) \wedge (\exp^\wedge u_o W_1 u_o^{-1})$. L'image de $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k}$ par u_o étant *la forme volume* da *sur* M, (45) implique donc, grâce à l'*indépendance* de μ et (W_1, β_1)

$$(46)\qquad \mathcal{J}(a)da \underset{n}{=} \left[\int_\Theta \exp^\wedge\left(-\frac{i}{2\pi}\, u_o \mu u_o^{-1}\right) dP(w) \right] \wedge \left[\int_{\tilde{\Theta}} \exp^\wedge\left(-\frac{i}{2\pi}\, u_o W_1 u_o^{-1}\right) \mathrm{tr}\ \beta_1 d\tilde{P}(W) \right]$$

9.3. L'homomorphisme de Weil de TM : Il envoie l'algèbre des polynômes complexes sur $\mathcal{G}$ invariants par l'action adjointe de $O(n)$ dans l'algèbre des formes différentielles sur M. Si q est un tel polynôme, son image est l'unique forme $\tilde{q}$ sur M qui se relève en $q(\Omega)$ sur le fibré des repères N, où Ω est la courbure équivariante de N. Cet homomorphisme se prolonge trivialement aux séries entières ad $O(n)$-invariantes.

9.4. L'intégrale en w : La fonction $q : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ définie par

$$q(A) = \int_\Theta \exp\left[-\frac{i}{4\pi}\int_0^1 \langle A\hat{w}_t, d\hat{w}_t\rangle\right] dP(w) \tag{47}$$

est évidemment invariante par ad $O(n)$, grâce aux symétries de la mesure de Wiener. Après diagonalisation de A , une formule d'aire aléatoire de Paul Lévy donne facilement

$$q(A) = \varphi\left(-\frac{iA}{2\pi}\right) \quad \text{avec} \quad \varphi(A) = \det\left(\frac{\mathrm{sh}(A/2)}{A/2}\right)^{-1/2}. \tag{48}$$

Pour $\bar{v}, \bar{v}' \in T_{u_o}(N)$ et $v = \pi^*\bar{v}$, $v' = \pi^*\bar{v}'$, les tenseurs de courbure R_a et Ω_{u_o} de M et N vérifient

$$\begin{aligned}\langle \Omega_{u_o}(\bar{v},\bar{v}')\hat{w}_t, d\hat{w}_t\rangle &= \langle R_a(v,v')u_o\hat{w}_t, u_o d\hat{w}_t\rangle = \langle R_a(u_o d\hat{w}_t, u_o\hat{w}_t), v\wedge v'\rangle \\ &= \langle u_o\Omega_{u_o}(B(d\hat{w}_t), B(\hat{w}_t))u_o^{-1}, \bar{v}\wedge\bar{v}'\rangle ,\end{aligned}$$

d'où l'image $\tilde{q}$ de q par l'homomorphisme de Weil, grâce à (47), (39)

$$\tilde{q}_a = q(\Omega_{u_o}) = \int_\Theta \exp\wedge\left(-\frac{i}{2\pi}\, u_o \mu u_o^{-1}\right) dP(w) . \tag{49}$$

Pour une intéressante *interprétation de* $\varphi(A)$ *voir Berline-Vergne* [4].

9.5. L'intégrale en W : Comme le brownien W_t est à valeurs dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, on a pour α fixé dans $\mathbb{C}$ la différentielle *d'Ito*

$$\delta \exp\wedge \alpha W_t = \alpha(\exp\wedge \alpha W_t)\wedge \delta W_t = \alpha(\exp\wedge W_t)\wedge\left(\sum_{1\le i<j\le n} e_i\wedge e_j\, \delta W_t^{ij}\right)$$

car dans la formule d'Ito le terme $\delta W_t \wedge \delta W_t$ est nul (les carrés des $e_i\wedge e_j$ sont nuls et les termes croisés sont Ito-négligeables). Puisque $\beta_t \in \mathrm{End}\,\xi_a$ vérifie (cf. (44))

$$\delta\beta_t = \beta_t\left(\sum_{1\le i<j\le n} L^{ij}\delta W_t^{ij}\right) ,$$

le calcul d'Ito donné au § 6.1 montre que

$$H_t = \int_{\tilde{\Theta}} (\exp\wedge \alpha W_t)\otimes\beta_t\, d\tilde{P}(W) \tag{50}$$

vérifie $H_t' = \alpha H_t K$ avec $K = \sum_{1\le i<j\le n}(e_i\wedge e_j)\otimes L^{ij}$, d'où

$$H_t = \exp(\alpha t K) . \tag{51}$$

L'application $\psi : A\otimes B \longrightarrow (u_o A u_o^{-1})\,\mathrm{tr}\, B$ étant linéaire, (50), (51) entraînent

$$\int_{\tilde{\Theta}} (\exp\wedge \alpha u_o W_1 u_o^{-1})\,\mathrm{tr}\,\beta_1 d\tilde{P}(W) = \psi(\exp \alpha K) = \mathrm{tr}\exp\alpha\mathcal{L} , \tag{52}$$

où $\mathcal{L} = \sum_{1\le i<j\le n} L^{ij}.(u_o e_i\wedge u_o e_j)$ est une forme différentielle d'ordre 2 sur $T_a M$ à valeurs dans $\mathrm{End}\,\xi_a$. Noter que $\exp\mathcal{L}$ se calcule en faisant les produits des L^{ij} dans $\mathrm{End}\,\xi_a$ et des formes $u_o e_i\wedge u_o e_j$ dans $\Lambda(T_a M)$.

La définition (44) des L^{ij} montre que $\mathcal{L}$ est la projection sur $T_a M$ de la courbure équivariante $\Omega^X_{r_o}$ du fibré X (repères unitaires de ξ), avec $r_o \in X$ pris dans la fibre de a . Pour $\alpha = -\frac{i}{2\pi}$ on identifie ainsi l'intégrale (52) avec l'image du polynôme $A \longrightarrow \mathrm{tr}\exp\left(-\frac{iA}{2\pi}\right)$ par l'homomorphisme de Chern-Weil. Cette classe n'est autre que le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\xi)$ du fibré ξ .

9.4. Formule de l'indice : On a donc obtenu

$$\mathcal{J}(a)\,da \underset{n}{=} \varphi\left(-\frac{i}{2\pi}\,\Omega_{u_o}\right) \wedge \mathrm{ch}(\xi)$$

avec $\varphi(A) = \left(\det \frac{\mathrm{sh}(A/2)}{A/2}\right)^{-1/2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATIYAH, R. BOTT, V. PATODI - *Heat equation and index theorem*, Invent. Math. 19(1973), 279-330.

[2] M. ATIYAH, I. SINGER - *Index of elliptic operators I, II*, Ann. Math. 87(1968), 484-530, 546-604.

[3] R. AZENCOTT - *Densité des diffusions en temps petit*, Sém. Proba. XVIII, Lect. Notes in Math. 1059(1984), 402-498.

[4] N. BERLINE, M. VERGNE - *Calcul de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac par la méthode de la chaleur*, à paraître.

[5] J.-M. BISMUT - *Mécanique Aléatoire*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag 1981.

[6] J.-M. BISMUT - *Large deviations and Malliavin calculus*, Birkhäuser 1984.

[7] J.-M. BISMUT - *The Atiyah-Singer theorems : a probabilistic approach I, II*, J. Funct. Anal. 57(1984), 56-98, 329-348.

[8] E. GETZLER - *Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. 92(1983), 163-178.

[9] P. GILKEY - *Curvature and eigenvalues of the Laplacian*, Adv. in Math. 10(1973), 344-382

[10] N. HITCHIN - *Harmonic Spinors*, Adv. in Math. 14(1974), 1-55.

[11] KANAÏ - *Short time asymptotics for fundamental solutions of partial differential equations*, Comm. Part. Diff. Equ. 2(1977), 781-830.

[12] P. MALLIAVIN - *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, Proc. Int. Conf. Stoch. Diff. Equ. Kyoto 1976, 195-263, N.Y. Wiley 1978.

[13] S. MOLCHANOV - *Diffusions and Riemannian geometry*, Russ. Math. Surveys 30 (1975), 1-63.

Robert AZENCOTT

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX