Astérisque

A. CONNES

Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. n° 647, p. 289-308

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__289_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 647 Juin 1985

INDICE DES SOUS FACTEURS, ALGÈBRES DE HECKE ET THÉORIE DES NOEUDS
[D'après Vaughan JONES]

par A. CONNES

INTRODUCTION

V. JONES a commencé par résoudre complètement le problème suivant d'apparence anodine : quel est le sous ensemble Σ de $\mathbb{R}_+$ formé par les valeurs de l'indice $[M:N]$ d'un sous facteur N d'un facteur M de type II_1 . Il a montré que

$$\Sigma = \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N} \; , \; n \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

Dans sa démonstration on voit apparaître de manière naturelle la suite croissante $H_m(q)$, $m \in \mathbb{N}$, des algèbres de Hecke associées aux systèmes de Coxeter des groupes symétriques et à la variable $q \in \mathbb{C}$. Il en a ensuite déduit l'existence de traces remarquables sur $H_\infty(q) = \bigcup_m H_m(q)$. Combinant ces traces avec la description des noeuds dans $\mathbb{R}^3$ à partir des groupes de tresses B_n , due à Artin, Alexander et Markov, il en a déduit un nouvel invariant polynomial pour les noeuds [21]. Cet invariant a ensuite été généralisé par P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett et A. Ocneanu en un invariant polynomial à deux variables, qui contient également le polynôme d'Alexander comme cas particulier [15].

Dans cet exposé nous suivrons assez fidèlement le chemin parcouru par V. Jones en y rajoutant un résultat remarquable de A. Ocneanu sur la classification des traces positives sur $H_\infty(q)$.

I - *INDICE D'UN SOUS FACTEUR D'UN FACTEUR DE TYPE* II_1

Soient M un facteur de type II_1 et Tr_M l'unique trace sur M telle que $Tr_M(1) = 1$. Soit $L^2(M)$ l'espace de Hilbert complété de l'espace préhilbertien séparé M muni du produit scalaire $\langle \; \rangle$; $\langle x,y \rangle = Tr_M(y^* x) \quad \forall x,y \in M$. Soit λ la représentation régulière gauche de M dans $L^2(M)$,

$$\lambda(x)y = x\,y \qquad \forall x \in M \; , \; y \in M \; .$$

Pour toute représentation normale π de M dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le commutant $\pi(M)'$ de $\pi(M)$ est un facteur de type II_1.

b) π est équivalente à une sous représentation d'une somme finie de copies de λ .

On dit alors que $(\mathcal{H},\pi)$ est de multiplicité finie. La multiplicité $\dim_M(\mathcal{H},\pi)$ (ou plus brièvement $\dim_M(\mathcal{H})$) vérifie les propriétés générales suivantes [23] :

1) $\dim_M(\mathcal{H},\pi) \in [0, +\infty[$, $\dim_M(L^2(M),\lambda) = 1$;

2) $\dim_M(\mathcal{H},\pi) = \dim_M(\mathcal{H}',\pi')$ si et seulement si les représentations π et π' sont équivalentes.

3) $\dim_M(\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}}(\mathcal{H}_n,\pi_n)) = \sum_1^\infty \dim_M(\mathcal{H}_n,\pi_n)$ (si la somme directe $\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}}(\mathcal{H}_n,\pi_n)$ est de multiplicité finie).

4) Soient $e \in \pi(M)'$ un projecteur et π_e la restriction de π à l'espace $e\mathcal{H}$, on a :

$$\dim_M(e\mathcal{H}, \pi_e) = \mathrm{Tr}_{\pi(M)'}(e) \cdot \dim_M(\mathcal{H},\pi)$$

5) $\dim_M(\mathcal{H},\pi) \cdot \dim_{M'}(\mathcal{H}) = 1$, où M' est le commutant de $\pi(M)$.

Soit alors $N \subset M$ un sous facteur de type II_1 de M . On dit que N est *d'indice fini* dans M si la restriction à N de la représentation régulière gauche λ de M dans $L^2(M)$ est de multiplicité finie, c'est-à-dire si le commutant $\lambda(N')$ est un facteur de type II_1 .

Définition 1 - L'indice $[M:N]$ de N dans M est la multiplicité $\dim_N(L^2(M),\lambda)$.

Proposition 2 - a) Soit N un sous facteur d'indice fini de M. Pour toute représentation $(\mathcal{H},\pi)$ de multiplicité finie de M la restriction π_N de π à N est de multiplicité finie et l'on a :

$$\dim_N(\mathcal{H},\pi_N) = [M:N] \cdot \dim_M(\mathcal{H},\pi).$$

b) Soient N et M comme dans a) et P un sous facteur d'indice fini de N. Alors P est un sous facteur d'indice fini de M et : $|M:P| = |M:N||N:P|$.

c) Soient $N,M,\mathcal{H},\pi$ comme dans a), alors le commutant $\pi(M)'$ est un sous facteur d'indice fini de $\pi(N)'$ et l'on a :

$$[\pi(N)' : \pi(M)'] = [M:N] .$$

La propriété a) est immédiate, b) résulte de a), et c) résulte de la propriété 5) de la fonction dimension, $\dim_M$.

Exemples α) Soit Γ un groupe discret et considérons le commutant M_Γ de la représentation régulière droite de Γ dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$. Pour que M_Γ soit un facteur il faut et il suffit que toute classe de conjugaison non triviale

de Γ soit de cardinalité infinie. De plus M_Γ est alors un facteur de type II_1. En tant qu'algèbre de von Neumann M_Γ est engendrée par l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$ du groupe Γ agissant par convolution à gauche dans $\ell^2(\Gamma)$. Pour tout sous groupe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ d'indice fini, la sous algèbre de von Neumann N de M_Γ engendrée par $\mathbb{C}\Gamma_1 \subset \mathbb{C}\Gamma$ est un sous facteur de M_Γ, isomorphe à M_{Γ_1}, d'indice fini avec :

$$[M_\Gamma : N] = [\Gamma:\Gamma_1]$$

β) Soient M un facteur de type II_1 et $e \in M$ un projecteur. On notera M_e le facteur $M_e = \{x \in M ; xe = ex = x\}$. Pour que M_e soit isomorphe à M_{1-e} il faut et il suffit que le nombre réel positif $\frac{\lambda_o}{1-\lambda_o}$, où $\lambda_o = Tr_M(e)$, appartienne au groupe fondamental de M. ([41]). Soit alors θ un isomorphisme $\theta : M_e \to M_{1-e}$ et posons

$$N = \{x + \theta(x) ; x \in M_e\}$$

Par construction N est un sous facteur de M et un calcul immédiat de $\dim_N(L^2(M),\lambda)$ montre que

$$[M:N] \quad \lambda_o^{-1} + (1-\lambda_o) .$$

Le groupe fondamental du facteur hyperfini R ($[\ ]$) est égal à $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc, grâce à la construction ci-dessus, l'existence pour tout nombre réel $\alpha \geq 4$, d'un sous facteur N de R avec $[R:N] = \alpha$.
Avec les notations de l'introduction on voit en combinant les exemples α) et β) que :

$$\{1,2,3\} \cup [4, +\infty[\subset \Sigma .$$

De plus un résultat de Goldman [18] suggérait que $\Sigma \cap [1,2] = \{1,2\}$ et il restait à déterminer $\Sigma \cap [2,4]$, point de départ du travail de V. Jones.

II - *LA CONSTRUCTION DE V. JONES.*

Soient $M, L^2(M)$, Tr_M et λ comme ci-dessus. Considérons l'involution isométrique J de $L^2(M)$ dans $L^2(M)$ telle que $J(x) = x^*$ $\forall x \in M$.
Pour $x \in M$ soit $\lambda'(x)$ l'opérateur dans $L^2(M)$ de multiplication à droite par x, $\lambda'(x)y = yx$ $\forall y \in M$.
On a $J\lambda(x)^*J = \lambda'(x)$ $\forall x \in M$. De plus $\lambda'(M)$ est égal au commutant de $\lambda(M)$ dans $L^2(M)$ ([14]) on a donc :

$$\lambda(M)' = \lambda'(M) = J\lambda(M)J$$

Soient N une sous algèbre de M et e_N l'opérateur dans $L^2(M)$ qui est la projection orthogonale sur l'adhérence de N dans $L^2(M)$. On a l'égalité $Je_NJ = e_N$ par construction, de plus ([47]) on a la :

Proposition 3 - a) La restriction E_N de e_N au sous espace $M \subset L^2(M)$ est une projection de l'algèbre de von Neumann M sur la sous algèbre N .

b) Pour tous $a, b \in N$, et $x \in M$ on a :

$$E_N(a\,x\,b) = a\,E_N(x)\,b$$

c) Pour tout $x \in M^+$ on a $E_N(x) \in N^+$.

On dit que l'application $E_N : M \to N$ est l'espérance conditionnelle normale associée au couple (M,N). L'opérateur e_N est un projecteur et b) montre que :

$$(*) \qquad e_N\lambda(a) = \lambda(a)e_N \qquad \forall a \in N$$

$$(**) \qquad e_N\lambda(x)e_N = \lambda(E_N(x)) \qquad \forall x \in M$$

En particulier on a $e_N \in \lambda(N)'$; en fait :

Proposition 4 - $\lambda(N)'$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\lambda(M)'$ et e_N.

Le théorème du bicommutant de von Neumann montre qu'il suffit de vérifier que $\lambda(M) \cap \{e_N\}' = \lambda(N)$. Or si $x \in M$ et si $\lambda(x)e_N = e_N\lambda(x)$ on a :

$$\lambda(x)1 = (\lambda(x)e_N)1 = (e_N\lambda(x))1 = e_N(x) = \lambda(E_N(x))1$$

d'où $x = E_N(x)$ et $x \in N$.
Posons $M_1 = J\,\lambda(N)'J$. La proposition 4 montre que M_1 est l'algèbre de von Neumann dans $L^2(M)$ engendrée par $\lambda(M)$ et e_N.

Proposition 5 - On suppose que N est un sous facteur d'indice fini de M .

a) M_1 est un facteur de type II_1 , $\lambda(M)$ est d'indice fini dans M_1 avec $[M_1 : \lambda(M)] = [M:N]$.

b) $Tr_{M_1}(e_N) = [M:N]^{-1}$

c) Soit E_M l'espérance conditionnelle normale canonique de M_1 sur $\lambda(M)$, alors $E_M(e_N) = Tr_{M_1}(e_N)\,1$.

d) Le sous espace vectoriel de M_1 engendré par $\lambda(M)$ et $\lambda(M)e_N\lambda(M)$ est une sous algèbre involutive faiblement dense de M_1 .

e) L'homomorphisme $x \in N \to e_N\,\lambda(x) \in M_1$ est un isomorphisme de N sur l'algèbre de von Neumann réduite

$$(M_1)_{e_N} = \{z \in M_1 \,;\, e_Nz = ze_N = z\}$$

Le d) résulte facilement des égalités (*) et (**) ci-dessus. Pour montrer e) on utilise (*) pour vérifier que l'on a un homomorphisme et d) pour montrer qu'il est surjectif. L'injectivité est automatique car tout facteur de type II_1 est une algèbre simple. L'égalité a) résulte de :

$$[M_1 ; \lambda(M)] = [J\lambda(N)'J : \lambda(M)] = [(N)' : \lambda(M)'] = [M:N]$$

(proposition 2c))

Démontrons l'égalité b) - Comme $Je_NJ = e_N$ on a

$$Tr_{M_1}(e_N) = Tr_{\lambda(N)'}(e_N)$$

La propriété 4 de la multiplicité dim_N montre que

$$Tr_{\lambda(N)'}(e_N) = dim_N(e_N L^2(M)) \cdot dim_N(L^2(M))^{-1} = [M:N]^{-1} .$$

Démontrons c) - D'après e) et l'unicité de la trace Tr_N sur N on a $Tr_{M_1}(e_N z) = Tr_{M_1}(e_N)\, Tr_N(z)$ pour tout $z \in N$. Ainsi pour tout $y \in M$ on a :

$$Tr_{M_1}(e_N E_N(y)) = Tr_{M_1}(e_N).Tr_N(E_N(y)) = Tr_{M_1}(e_N).Tr_M(y) = Tr_{M_1}(e_N).Tr_{M_1}(y).$$

L'égalité (**) montre donc que pour tout $y \in M$ on a $Tr_{M_1}(e_N y) = Tr_{M_1}(e_N y e_N) = Tr_{M_1}(e_N E_N(y)) = Tr_{M_1}(e_N).Tr_{M_1}(y)$, c'est-à-dire que $Tr_{M_1}(e_N)1$ est la projection $E_M(e_N)$. ■

L'idée fondamentale de V. Jones consiste à itérer la construction effectuée ci-dessus du couple $M \subset M_1$ à partir du couple $N \subset M$. On obtient ainsi une suite croissante $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de facteurs de type II_1 et une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de projecteurs, $e_m \in M_m$ dont les propriétés se déduisent facilement de la proposition 5. On notera P le facteur de type II_1 limite inductive de la suite croissante $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et Tr_P la trace normalisée sur P. On a alors [23] :

J_1 : Pour tout m, M_m est d'indice fini dans M_{m+1} avec $[M_{m+1} : M_m] = [M:N]$

J_2 : $e_m \in M_m$, $e_m = e_m^* = e_m^2$.

J_3 : $e_m x = x e_m \quad \forall x \in M_{m-1}$.

J_4 : M_{m+1} est l'algèbre de von Neumann engendrée par M_m et e_{m+1}.

J_5 : Soit E_m l'espérance conditionnelle de M_{m+1} sur M_m on a $E_{m-1}(x)\, e_{m+1} = e_{m+1}\, x e_{m+1} \quad \forall x \in M_m$.

J_6 : Avec $\tau = [M:N]^{-1}$, on a

$$E_{m-1}(e_m) = \tau ,$$

J_7 : $e_{m+1}\, e_m\, e_{m+1} - \tau e_{m+1} = 0$

J_8 : $e_m\, e_{m+1}\, e_m - \tau e_m = 0$

J_9 : $e_i\, e_j = e_j\, e_i$ si $|i - j| \geq 2$

J_{10} : La sous algèbre A_m de P engendrée par $e_1,..,e_m$ et 1 est de dimension finie et $E_m(A_{m+1}) \subset A_m$.

J_{11} : L'application $x \to xe_{m+1}$ de A_{m-1} dans l'algèbre réduite $(A_{m+1})_{e_{m+1}} = \{z \in A_{m+1} ; ze_{m+1} = e_{m+1}\, z = z\}$ est un isomorphisme.

J_{12} : Pour tout $x \in A_m$ on a $Tr_p(xe_{m+1}) = \tau tr_p(x)$.

III - *LE THÉORÈME DE V. JONES*

Théorème 6 - Soit Σ le sous ensemble de $\mathbb{R}^+$ formé par les valeurs de l'indice $[M:N]$ où M et N sont des facteurs de type II_1 , $N \subset M$. Alors

$$\Sigma = \{4 \cos^2 \tfrac{\pi}{n} ; n \in \mathbb{N} , n \geq 3\} \cup [4, +\infty[$$

Pour montrer que $\Sigma \cap [1,4] \subset \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} ; n \in \mathbb{N} , n \geq 3\}$ il faut analyser plus précisément les sous algèbres A_n de P (avec les notations de la section II). Pour tout projecteur $e \in P$ on a $Tr_p \in [0,1]$, de plus si e et f sont des projecteurs et $e \leq f$ on a $Tr_p(e) \leq Tr_p(f)$ avec égalité si et seulement si $e = f$. On note $e \vee f$ (resp $e \wedge f$) le plus petit projecteur de P qui majore e et f (resp. le plus grand qui minore e et f). Les projecteurs $e \vee f$ et $e \wedge f$ appartiennent à l'algèbre de von Neumann engendrée par e et f et on a l'égalité fondamentale [46] :

$$(*) \quad Tr_p(e \vee f) + Tr_p(e \wedge f) = Tr_p(e) + Tr_p(f).$$

Reprenons les notations de la section II et posons

$$q_n = e_1 \cdots e_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On a $q_n \leq q_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = q_n \vee e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $q_m \in A_m$ par construction. De plus, comme A_m est engendrée par 1 et $e_1,..,e_m$, le projecteur q_m est dans le centre de A_m et on a :

$$A_m = \mathbb{C}(1-q_m) + (A_m)_{q_m}$$

On va maintenant calculer par récurrence sur m la valeur de $Tr_p(q_m)$. Le lemme crucial est le suivant :

Lemme 7 : Si $q_m \neq 1$ on a $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1}\, q_{m-1}$

Dem : Comme q_{m-1} commute avec $e_{m+1}(J_3)$ on a $e_{m+1}\, q_{m-1} \leq q_m \wedge e_{m+1}$. De plus $q_m \wedge e_{m+1} \leq e_{m+1}\, q_m\, e_{m+1} = E_{m-1}(q_m)\, e_{m+1}$. Ainsi en utilisant J_{11} on voit que $q_{m-1} \leq E_{m-1}(q_m)$. Comme $E_{m-1}(q_m) \in A_{m-1} = \mathbb{C}(1-q_{m-1}) + (A_{m-1})_{q_{m-1}}$ on a $E_{m-1}(q_m) = \lambda(1-q_{m-1}) + z$ avec

$$z \in (A_{m-1})_{q_{m-1}} \quad \text{et} \quad q_{m-1} \leq z \leq 1 \qquad \text{(proposition 3c))}$$

d'où $z = q_{m-1}$. La proposition 3c) montre que $0 \leq \lambda \leq 1$ et par hypothèse $Tr_p(q_m) < 1$ d'où $\lambda < 1$. Comme $q_m \wedge e_{m+1}$ est le projecteur spectral de $e_{m+1}\, q_m\, e_{m+1}$ associé à la valeur propre 1 , on a $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1}\, q_{m-1}$ ■

La propriété J_{12} montre que $Tr_p(e_{m+1}\, q_{m-1}) = \tau\, tr_p(q_{m-1})$ et l'égalité (*) montre donc que, si $q_m \neq 1$, on a :

$$Tr_p(q_{m+1}) + \tau\, Tr_p(q_{m-1}) = Tr_p(q_m) + Tr_p(e_{m+1}) = Tr_p(q_m) + \tau \quad .$$

Soit alors $\alpha_m = 1 - Tr_p(q_m)$. On a $\alpha_m \in [0,1]$ $\forall m$ et $\alpha_{m+1} \leq \alpha_m$. De plus $\alpha_m \neq 0$ si et seulement si $q_m \neq 1$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, déterminée par les conditions :

$$P_0 = 0 \ , \ P_1 = 1, \ldots \quad P_{n+1}(\tau) = P_n(\tau) - \tau\, P_{n-1}(\tau)$$

Lemme 8 – a) Soit $n_0 \in \{1,2,\ldots,\ \}$ tel que $\alpha_n > 0$ pour tout $n < n_0$ et $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. On a $\alpha_n = P_n(\tau)$ pour tout $n \leq n_0$.

b) Si $\tau > \frac{1}{4}$ on a $n_0 < \infty$, $\tau = (4 \cos^2 \frac{\pi}{n_0})^{-1}$.

Dem : Le a) résulte de la discussion ci-dessus. Vérifions

b)- Soit $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\beta^2 = 1 - 4\tau$. On vérifie que (si $\beta \neq 0$) $P_n(\tau) = ((\frac{1+\beta}{2})^n - (\frac{1-\beta}{2})^n)\ .\ \beta^{-1}$. Si $\tau > \frac{1}{4}$ on a $\beta \in i\mathbb{R}$ et $P_n(\tau) = \frac{\sigma^n - \bar{\sigma}^n}{\sigma - \bar{\sigma}}$ où

$\sigma = \frac{1+\beta}{2}$ et on ne peut avoir $P_n(\tau) > 0$ pour tout n, en fait,

$$P_n(\tau) = |\sigma|^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad \text{où } \theta = \text{Arg } \sigma \ ;$$

On a donc $n_0 < \infty$ et comme $P_{n_0}(\tau) = 0$ on a $\theta = \frac{\pi}{n_0}$, $\sqrt{4\tau-1} = \text{tg } \theta = \text{tg}(\frac{\pi}{n_0})$ et $4\tau = 1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{n_0}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n_0}}$

Le lemme 8 achève la démonstration de l'inclusion

$$\Sigma \subset \{4 \cos^2 \tfrac{\pi}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3\} \cup [4, +\infty]$$

Pour démontrer que Σ contient les valeurs $4\cos^2 \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$, V. Jones utilise sa construction (section II) appliquée à un couple $N \subset M$ d'algèbres de von Neumann de dimension finie ([23]).

IV - *LES ALGÈBRES DE HECKE* $\mathcal{H}_n(q)$ [19] [8]

Soient $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments et n un entier non nul. Considérons le groupe $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$ des matrices d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, et de déterminant 1. Soit $B \subset G$ le sous groupe de Borel formé par les matrices triangulaires supérieures. Nous noterons $\mathcal{H}_n(q)$ l'algèbre pour la convolution dans G, formée par les fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient :

$$f(bgb') = f(g) \qquad \forall b,b' \in B \qquad \forall g \in G \ .$$

Soit X le G-espace $X = G/B$ formé par les drapeaux linéaires dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{F}_q^n$. Un élément F de X est donné par une suite croissante $(F_i)_{i = 0,..,n}$ de sous espaces linéaires de E, tels que

$$\dim F_i = i \qquad \forall i = 0,1,\ldots,n \ .$$

Soit L l'espace vectoriel complexe $L = \mathbb{C}^X$, c'est un G module en utilisant l'action de G sur l'ensemble X. Pour tout $f \in \mathcal{H}_n(q)$ soit $\pi(f) \in \text{End}(L)$ défini par la matrice $\pi(f)_{g_1,g_2} = f(g_1^{-1}g_2) \qquad \forall g_1,g_2 \in G/B$

En ayant pris soin de normaliser la mesure de Haar μ sur G de telle sorte que $\mu(B) = 1$ on vérifie que π est une représentation fidèle de $\mathcal{H}_n(q)$ qui a pour image l'algèbre des opérateurs G invariants dans L. Ainsi π est un isomorphisme :

$$\pi : \mathcal{H}_n(q) \to \mathrm{End}_G(L)$$

A la décomposition de Bruhat $G = \bigcup_{W \in S_n} BwB$ de G

où S_n est le groupe des permutations, correspond une base naturelle $(t_w)_{w \in S_n}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{H}_n(q)$,

$$t_w(g) = 1 \quad \text{si } g \in BwB, \quad t_w(g) = 0 \quad \text{si } g \in BwB$$

On a donc $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H}_n(q)) = n !$. De plus on vérifie que $\pi(t_w) = T_w \in \mathrm{End}_G(L)$ est donné par la *correspondance* sur l'ensemble X qui a un drapeau F associe l'ensemble des drapeaux F' tels que :

$$\dim(F_i \cap F'_j) = \text{Cardinalité } (\{1,\ldots,j\} \cap w\{1,\ldots,i\})$$

$\forall i,j = 0,1,\ldots,n.$

Pour $i = 1,\ldots,n-1$, soit s_i la transposition $(i,i+1)$; on a $s_i \in S_n$ et on notera simplement $T_i = T_{s_i}$. Il n'est pas difficile de calculer la composition des correspondances T_w et d'obtenir la présentation suivante de l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$:

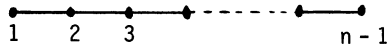
Proposition 9 – L'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ est engendrée par les t_i, $i = 1,\ldots,n-1$ et admet pour présentation les relations suivantes :

a) $(t_i + 1)(t_i - q) = 0 \quad i = 1,.,n-1$

b) $t_i t_j = t_j t_i \quad \forall i,j, \quad |i - j| > 1$

c) $t_{i+1}\, t_i\, t_{i+1} = t_i\, t_{i+1}\, t_i \quad \forall i = 1,\ldots,n-2$

Cette présentation de $\mathcal{H}_n(q)$ correspond à la présentation du groupe symétrique S_n comme groupe de Coxeter à partir des symétries $(s_i)_{i=1,.,n-1}$ et du graphe de Coxeter de type A_{n-1} :



Plus généralement (cf. [19] et [8] exercice 23, p. 55) on associe canoniquement une algèbre à tout système de Coxeter (W,S) et toute application $f : S \to \mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison de S dans W. Dans le cas qui nous intéresse tous les s_i sont conjugués dans $W = S_n$ et une telle fonction f est constante. La construction générale revient donc ici à autoriser une valeur arbitraire de q dans $\mathbb{C}$.

Définition 10 - Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ et $q \in \mathbb{C}$. On notera $\mathcal{H}_n(q)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par $(t_i)_{i = 1,\ldots,n-1}$ avec la présentation suivante :

$(t_i + 1)(t_i - q) = 0 \qquad \forall i = 1,.,n-1$

$t_i t_j = t_j t_i \qquad \forall i,j\ ,\ |i - j| \geq 2$

$t_{i+1}\, t_i\, t_{i+1} = t_i\, t_{i+1}\, t_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n-2$

Pour $q = 1$, l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ est l'algèbre $\mathbb{C}S_n$ du groupe symétrique. Pour $q^n \neq 1$, $q \neq 0$, $\mathcal{H}_n(q)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}S_n$ ([ ]). Pour $q \neq 1$, $q^n = 1$ ou $q = 0$, $\mathcal{H}_n(q)$ n'est pas une algèbre semi simple.

Par construction les $\mathcal{H}_n(q)$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système inductif d'algèbres en utilisant l'unique homomorphisme $\rho_{n,m} : \mathcal{H}_n(q) \to \mathcal{H}_m(q) \qquad n < m$

tel que $\rho_{n,m}(t_{j,n}) = t_{j,m} \quad \forall j = 1,\ldots,n-1$.

Définition 11 - On note $\mathcal{H}_\infty(q)$ la limite inductive de la suite $\mathcal{H}_n(q)$.

Par construction $\mathcal{H}_\infty(q)$ est engendrée par les t_j, $j \in \mathbb{N}^*$ et admet une présentation évidente,

Lemme 12 - a) Supposons $q \neq -1$. Posons $e_j = \frac{1}{q+1}(t_{i+1})$; alors les e_j, $j \in \mathbb{N}^*$ engendrent $\mathcal{H}_\infty(q)$ et $\mathcal{H}_\infty(q)$ admet la présentation suivante, avec $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$

$$e_j^2 = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \ ; \ e_i e_j = e_j e_i \quad \forall i,j, \ |i-j| > 1 \ ;$$

$$e_{i+1}\, e_i\, e_{i+1} - \tau e_{i+1} = e_i\, e_{i+1}\, e_i - \tau e_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* .$$

b) Si $\tau \in \mathbb{R}$ il existe un unique antiautomorphisme antilinéaire involutif $x \to x^*$ de $H_\infty(q)$ tel que $e_j^* = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$.

Le a) résulte d'un calcul immédiat et le b) de l'invariance de la présentation a).

La construction et le théorème de V. Jones entraînent le résultat suivant :

Théorème 13 [24].- Soient $q \in [1,+\infty[\cup \{e^{i\frac{2\pi}{m}} ; m = 3,4,\ldots,\}$, $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, et $H_\infty(q)$ l'algèbre ci-dessus, munie de l'involution $x \to x^*$ du lemme 12b).

1) Il existe une unique trace ϕ sur $H_\infty(q)$ telle que $\phi(1) = 1$ et que $\phi(x\, e_{i+1}) = \tau\, \phi(x) \quad \forall x \in H_i(q)$, $\quad \forall i \in \mathbb{N}$

2) La trace ϕ est positive (i.e. $\phi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in H_\infty(q)$) et la représentation régulière gauche de $H_\infty(q)$ dans l'espace de Hilbert associé à ϕ engendre le facteur hyperfini de type II_1, M.

3) La sous algèbre de von Neumann de M engendrée par $(e_i)_{i \geq 2}$ est un sous facteur N de M et $[M:N] = \tau$.

Il suffit en effet de comparer la présentation de $H_\infty(q)$ du lemme 12 avec les relations J_2, J_7, J_8, J_9 vérifiées par les projecteurs e_j de la construction de V. Jones. On obtient ainsi un homomorphisme involutif ρ de $H_\infty(q)$ dans P et il suffit de poser $\phi = Tr\ p \circ \rho$. L'unicité de ϕ vérifiant 1) est immédiate.

Nous énoncerons maintenant deux résultats remarquables de A. Ocneanu.

Théorème 14 - ([42] [15]). Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq -1$, $q+q^{-1} \in \mathbb{R}$. Posons $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$; Pour qu'il existe une représentation involutive non triviale de l'algèbre involutive $(H_\infty(q), *)$ dans un espace Hilbertien il faut et il suffit que q appartienne à l'ensemble

$$\{e^{i\frac{2\pi}{m}} ; m \in \mathbb{N}, m \geq 3\} \cup [1, +\infty[$$

(Par représentation triviale on entend toute représentation π telle que $\pi(e_j) \in \{0,1\} \quad \forall j \in \mathbb{N}$).

Théorème 15 [42].- a) Soient $q, z \in \mathbb{C}$, $q \neq -1$. Il existe une unique trace $\phi_{q,z}$ sur $\mathcal{H}_\infty(q)$ telle que

$$\phi(x\, e_{n+1}) = z\,\phi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{H}_n(q)$$

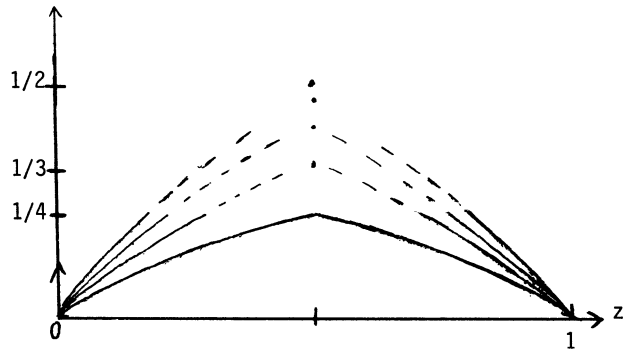
b) Soient $q \in \{e^{i\frac{2\pi}{m}}$; $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3\} \cup [1,\infty[$ et $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$. Pour que $\phi_{q,z}$ soit une trace positive sur l'algèbre involutive $(\mathcal{H}_\infty(q), *)$ il faut et il suffit que $z \in [0,1]$ et que le couple (q,z) vérifie l'une des conditions suivantes :

1) $q \geq 1$, $(1+q)^{-1} \leq z \leq q(1+q)^{-1}$

2) $q \geq 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $z = \dfrac{1-q^{k+1}}{(1+q)(1-q^k)}$

3) $q = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$, $|k| < m-1$, $k \neq 0$ avec $z = \dfrac{1-q^{k+1}}{(1+q)(1-q^k)}$

$(2+q+q^{-1})^{-1} = \tau$.



Comme dans le théorème 13 , 3) on obtient pour chaque valeur de (q,z) un sous facteur N du facteur hyperfini. L'indice de ces sous facteurs a été calculé en fonction de q et z par H. Wenzl [50] .

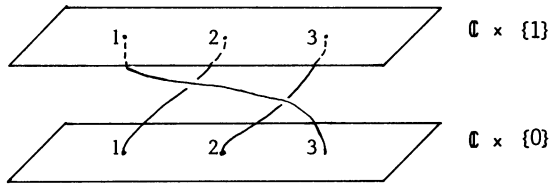
V - GROUPES DE TRESSES, NOEUDS ET THÉORÈMES D'ALEXANDER ET MARKOV

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Y_n l'ensemble des sous ensembles de $\mathbb{C}$ de cardinalité n . On munit Y_n de la topologie obtenue en l'identifiant au quotient par le groupe des permutations, de l'ouvert $\Omega_n \subset \mathbb{C}^n$,

$$\Omega_n = \{(z_i)_{i=1,\ldots,n} \; ; \; z_i \neq z_j \qquad \forall i \neq j\}$$

Par définition, le groupe $B_n = \pi_1(Y_n)$. En considérant de manière évidente $\mathbb{C} \times [0,1]$ comme une partie de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, et en fixant un point base p dans Y_n , disons $p = \{1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{C}$, on représente visuellement un lacet $\phi \in C(S^1, Y_n)$, $\phi(0) = p$, par une tresse dans $\mathbb{R}^3$, notée $\hat{\phi}$:

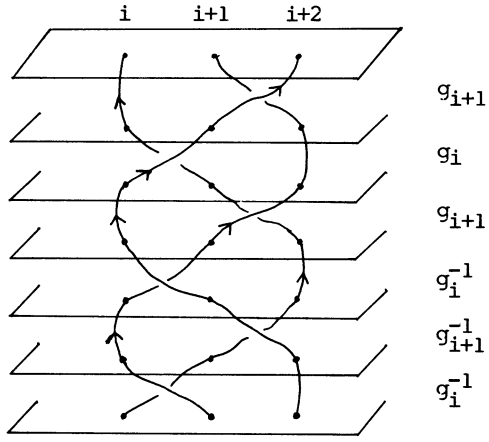
$$\hat{\phi} = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times [0,1] \ ; \ z \in \phi(t)\}$$



La loi de composition dans $B_n = \pi_1(Y_n)$ correspond géométriquement à la mise bout à bout des deux tresses. Pour tout $j = 1,\ldots,n-1$ soit $g_j \in B_n$ l'élément de $\pi_1(Y_n,p)$ qui est la classe du lacet ϕ_j ,

$$\phi_j(t) = \{k \ ; \ k \neq j, j+1\} \cup \{j + \tfrac{1}{2}(1 \pm e^{\pi i t})\} \ , \ t \in [0,1].$$

Le lacet suivant montre que pour tout i on a : $g_i \, g_{i+1} \, g_i = g_{i+1} \, g_i \, g_{i+1}$.



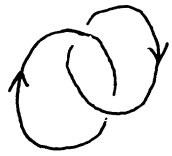
Théorème 16 (Artin) [3].- Pour tout n le groupe B_n est engendré par $g_1,\ldots,g_{n-1}$ et admet la présentation suivante :

a) $g_i \, g_j = g_j \, g_i \qquad \forall i,j \ \ |i - j| > 1$

b) $g_{i+1} \, g_i \, g_{i+1} = g_i \, g_{i+1} \, g_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n-2$.

On appellera *entrelac* dans $\mathbb{R}^3$ toute sous variété compacte *orientée* de classe C^∞, de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. On appellera *noeud* tout entrelac connexe. Pour tout noeud L il existe un plongement ℓ de classe C^∞ de S^1 dans $\mathbb{R}^3$ qui est un diffeomorphisme, préservant l'orientation, de S^1 sur L. Le problème principal de la théorie des noeuds est la classification à isotopie près des plongements de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. On représente un entrelac par sa projection sur un plan, en indiquant cette projection comme réunion de courbes qui se coupent transversalement, et en précisant de manière évidente laquelle passe au-dessus de l'autre :

Noeud



Entrelac

Soient $g \in B_n$ et $\varepsilon(g)$ la permutation correspondante de l'ensemble $p = \{1,2,\ldots,n\}$. Choisissons un représentant ϕ de g tel que $\phi \in C^\infty(S^1, Y_n)$ et que $\phi(t) \subset \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}\, z > 0\}$ pour tout $t \in S^1$. Considérons la droite $\Delta = \{(0,s,0) ; s \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit R_θ, $\theta \in S^1$, la rotation d'axe Δ et d'angle θ. Identifions $\mathbb{C}^+ \times S^1$ à l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ complémentaire de Δ par l'application ρ,

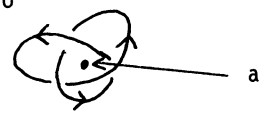
$$\rho(z,\theta) = R_\theta\,(x,y,0) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\,,\ \theta \in S^1$$

La sous variété $\rho(Z)$, où $Z = \{(z,\theta) \in \mathbb{C}^+ \times S^1 ; z \in \phi(\theta)\}$ est un entrelac, muni de l'orientation qui provient de la projection sur S^1. Les composantes connexes de Z sont paramètrées par les cycles de la permutation $\varepsilon(g)$. Par construction la classe d'isotopie de l'entrelac $\rho(Z)$ ne dépend que de $g \in B_n$ et non du choix de ϕ. On obtient ainsi une application $g \to \hat{g}$ de B_n dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des classes d'isotopie d'entrelacs dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 17 – (Alexander) [2].- L'application $g \to \hat{g}$ de la réunion disjointe $\coprod_1^\infty B_n$ dans $\mathcal{L}$ est *surjective*.

Pour trouver g tel que $\hat{g} = L$ il suffit de trouver une droite Δ dans $\mathbb{R}^3$ ne rencontrant pas L et telle que l'angle déterminé par le plan $P(x)$ contenant Δ et $x \in L$ et un plan fixe P_0, $\Delta \subset P_0$ soit une fonction croissante de x.

Exemple

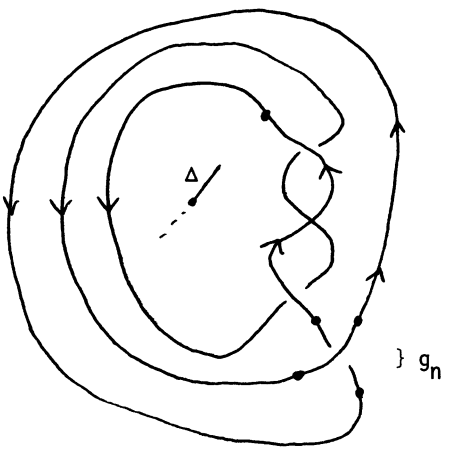
$L =$  a

on prend pour Δ un axe perpendiculaire au plan de projection et passant par a.

On obtient ainsi $L = \hat{g}$ où g désigne la tresse :

Il est évident que $\hat{g}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g dans B_n.

De plus, en considérant l'inclusion naturelle de B_n dans B_{n+1} ($g_i^n \to g_i^{n+1}$) on vérifie que $(g\, g_n^{\pm 1})\hat{} = g$ $\quad \forall g \in B_n$:



Théorème 18 – Markov [34] Birman [6]

La relation d'équivalence $g_1 \sim g_2$ si $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 \in \mathcal{L}$ sur $\coprod_n B_n$ est la relation d'équivalence la moins fine telle que

a) Si $g_1, g_2 \in B_n$ sont conjugués dans B_n on a $g_1 \sim g_2$

b) Si $g \in B_n$, on a $g g_n^{\pm 1} \sim g$.

Ainsi toute application Ψ de $\coprod_n B_n$ dans un ensemble qui vérifie $\Psi(aga^{-1})=\Psi(g)^n$, $\Psi(gg_n^{\pm 1}) = \Psi(g)$ définit un invariant d'isotopie pour les entrelacs dans $\mathbb{R}^3$. La présentation (Définition 10) de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ comparée à la présentation de Artin (théorème 16) du groupe de tresses B_n, montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ il existe un homomorphisme unique π_n^λ de B_n dans $H_n(q)$ tel que :

$$\pi_n^\lambda(g_i) = \lambda t_i \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

Toute trace μ_n sur $H_n(q)$ définit alors, par composition avec π_n^λ, une application Ψ de B_n dans $\mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison. Posons $\mu_n = \alpha_n\phi$ où $\alpha_n \in \mathbb{C}$ et ϕ est la trace définie par V. Jones (théorème 13). On obtient alors, en utilisant 13 1°,

$$\phi(\pi^\lambda(gg_n)) = \lambda\,(\tfrac{-1}{1+q})\;\phi(\pi^\lambda(g)) \qquad \forall g \in B_n$$

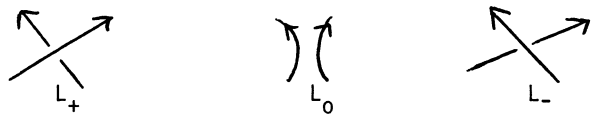
$$\phi(\pi^\lambda(gg_n^{-1})) = \lambda^{-1}\,\tfrac{-q}{1+q}\;\phi(\pi^\lambda(g)) \qquad \forall g \in B_n$$

Ainsi, si $\lambda^2 = q$ et $\alpha_{n+1} = \frac{-\lambda}{1+q}\,\alpha_n$ on a $\mu_{n+1}(\pi_{n+1}^\lambda(gg_n^{\pm 1})) = \mu_n(\pi_n^\lambda(g))$ pour tout $g \in B_n$. On obtient donc :

Théorème 19 [21].- Soient L un entrelac dans $\mathbb{R}^3$, n un entier et $g \in B_n$ tels que $\hat{g} = L$. Il existe un unique polynome de Laurent en $\sqrt{q}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que

$$V_L(q) = (\tfrac{-\sqrt{q}}{1+q})^{n-1}\cdot\phi(\pi_n^{\sqrt{q}}(g))$$

Le polynome V_L ne dépend que de la classe d'isotopie de L. De plus V_L est un polynome de Laurent en q si L a un nombre impair de composantes connexes. On utilisera les symboles L_+, L_o, L_- pour noter des entrelacs dont les projections sur un même plan coincident en dehors d'un petit disque, et sont dans ce disque représentées par les dessins suivants :



Conway a montré que le polynome d'Alexander Δ_L vérifie la relation :

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\,\Delta_{L_0}(t) = 0$$

De même le polynome de V. Jones vérifie la relation :

$$tV_{L_+}(t) - t^{-1}\,V_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\,V_{L_0}(t) = 0$$

Le résultat suivant a été obtenu simultanément par P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W. LICKORISH, K. MILLETT et A. OCNEANU [15] .

Théorème 20 [15].- Il existe une unique application P de l'ensemble des classes d'isotopie d'entrelacs dans $\mathbb{R}^3$ dans l'ensemble des polynomes de Laurent homogènes de degré 0 , en x, y, z telle que

1) $x\,P_{L_+}(x,y,z) + y\,P_{L_-}(x,y,z) + P_{L_0}(x,y,z) = 0$

2) $P_L(x, y, z) = 1$ si L est un noeud trivial.

Le polynome P_L vérifie les propriétés suivantes,

1) Le polynome d'Alexander-Conway est donné par

$$\Delta_L(q) = P_L(1, -1, q^{1/2} - q^{-1/2})$$

2) Le polynome de V. Jones est donné par

$$V_L(q) = P_L(q, -q^{-1}, q^{1/2} - q^{-1/2})$$

3) Si on change simultanément l'orientation de toutes les composantes connexes de L , P_L est inchangé.

4) Si on change l'orientation de $\mathbb{R}^3$ on a

$$P_{\tilde{L}}(x, y, z) = P_L(y, x, z)$$

5) Si L est une somme connexe de L_1 et L_2 on a

$$P_L = P_{L_1}\,P_{L_2}$$

Exemples

a) L = $P_L = yz^{-1} + x^{-1}y^2z^{-1} - x^{-1}z$

b) L = $P_L = x^{-2}z^2 - 2x^{-1}y - x^{-2}y^2$

c) L = $P_L = y^{-2}z^2 - 2xy^{-1} - x^2y^{-2}$

d) L = $P_L = x^{-1}y^{-1}z^2 - xy^{-1} - x^{-1}y - 1$

En particulier P_L (et aussi V_L) distingue le noeud de trèfle de son image dans un miroir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.W. ALEXANDER - *A lemma on systems of knotted curves,* Proc. Nat. Acad. 9(1923), p. 93-95.

[2] J.W. ALEXANDER - *Topological invariants of knots and links,* Trans. Amer. Math. Soc. 30(1928), p. 275-306.

[3] E. ARTIN - *Theorie der Zopfe,* Hamburg, Abh 9, p. 47-72.

[4] R.J. BAXTER - *Exactly solved models in statistical mechanics,* Acad. Press, London (1982).

[5] D. BENNEQUIN - *Entrelacements et structures de contact,* Thèse, Paris (1982).

[6] J. BIRMAN - *Braids, links and mapping class groups,* Ann. Math. Studies, 82(1974).

[7] J. BIRMAN - *On the Jones polynomial of the closed 3 braids,* (Preprint).

[8] N. BOURBAKI - *Groupes et Algèbres de Lie,* Chap. 4, 5, 6, n° 1337, Hermann, Paris, 1960-1972.

[9] O. BRATELLI - *Inductive limits of finite dimensional* C* *algebras,* Trans. AMS 171(1972), p. 195-234.

[10] E. BRIESKORN - *Sur les groupes de tresses,* Sém. Bourbaki n° 401, 1971-1972.

[11] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes réductifs sur un corps local,* Ch. 1, Publ. IHES, Vol. 41 (1972).

[12] W. BURAU - *Über Zopfgruppen und gleichsinning verdrillte verkettunger,* Abh. Math. Sem. Hanischen Univ. 11(1936), p. 171-178.

[13] J.H. CONWAY - *An enumeration of knots and links, computational problems in*

Abstract Algebra, Pergamon, N.Y. (1970), p. 329-358.

[14] J. DIXMIER - *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Deuxième édition, Gauthier Villars (1969).

[15] P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W.B.R. LICKORISH, K. MILLETT and A. OCNEANU - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. A.M.S., Vol. 12, n° 2 (April 1985).

[16] P. FREYD and D. YETTER - *A new invariant for knots and links*, Preprint (Sept. 1985).

[17] F. GARSIDE - *The braid group and other groups*, Quart. J. Math., Oxford 20 (1969), p. 235-254.

[18] M. GOLDMAN - *On subfactors of type* II_1 - Mich. Math. J. 7(1960), p. 167-172.

[19] N. IWAHORI and H. MATSUMOTO - *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of* p-*adic Chevalley groups*, Public. IHES, Vol. 25 (1965), p. 5-48.

[20] V. JONES - *L'indice des sous-facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sci. Paris, t. 286(1977), p. 597-598.

[21] V. JONES - *A polynomial invariant for knots via von Neumann Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985), p. 103-112.

[22] V. JONES - *Groupes de tresses, algèbres de Hecke et facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sci. Paris, t. 298, Sér. I, n° 20 (1984).

[23] V. JONES - *Index for subfactors*, Invent. Math. 72(1983), p. 1-25.

[24] V. JONES - *Braid groups, Hecke algebras and type* II_1 *factors*, Proc. Japan-US Conf. (1983), (Preprint).

[25] V. JONES - *Sur la conjugaison des sous-facteurs des facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sc. Paris, t. 286(1977), p. 597-598.

[26] L.H. KAUFFMAN - *A geometric interpretation of the generalized polynomial*, Preprint (1985).

[27] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. 53(1979), p. 165-184.

[28] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 36(1980).

[29] H. KOSAKI - *Extension of Jones' theory of index to arbitrary factors*, Preprint MSRI, Berkeley, 1985.

[30] J. LANNES - *Sur l'invariant de Kervaire pour les noeuds classiques*, Preprint, Ecole Polytechnique (1984).

[31] W.B.R. LICKORISH and K.C. MILLETT - *A polynomial invariant of oriented links*, Preprint (January 1985).

[32] W.B.R. LICKORISH - *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. 267(1981).

[33] H.N.V. TEMPERCEY and E.H. LIEB - Proc. Royal Soc., London, (1971), p. 251-280.

[34] A.A. MARKOV - *Über die freie Aequivalenz geschlossener Zopfe*, Mat. Sb 1 (1935), p. 73-78.

[35] H. MATSUMOTO - *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Math., Springer, Vol. 590(1977).

[36] H.R. MORTON - *The Jones polynomial for unoriented links*, Preprint, University of Liverpool (1985).

[37] H.R. MORTON - *Threading knot diagrams*, Preprint, University of Liverpool.

[38] H.R. MORTON - *Closed braids representatives for a link and its Jones-Conway polynomial*, Preprint (1985).

[39] K. MURASUGI - *Jones polynomials of special alternating knots*, (Preprint).

[40] F. MURRAY and J. von NEUMANN - *On rings of operators* II, Trans. A.M.S. 41 (1937), p. 208-248.

[41] F. MURRAY and J. von NEUMANN - *On rings of operators* IV, Ann. Math. 44(1943), p. 716-808.

[42] A. OCNEANU - *A polynomial invariant for knots. A combinatorial and an algebraic approach*, Preprint MSRI (1984).

[43] M. PIMSNER and S. POPA - *Entropy and index for subfactors*, Preprint INCREST, Bucharest (1983).

[44] J.H. PRZYTYCKI and P. TRACZYK - *Invariants of links of Conway type*, Preprint, (1985).

[45] B. SEIFERT - *The spherical traces for Hecke algebras associated to type* II_1 *factors*, Preprint IHES (1985).

[46] M. TAKESAKI - *Theory of operator algebras* I, Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1979).

[47] H. UMEGAKI - *Conditional expectation in an operator algebra* I, Tohoku Math. J. 6, (1954), p. 358-362.

[48] J. VAN BUSKIRK - *A version of the generalized Jones polynomial which is positive for positive knots*, Preprint, University of Oregon (1985).

[49] A. WASSERMANN - *Automorphic actions of compact groups*, Thesis, University of Pennsylvania (1981).

[50] H. WENZL - *On sequences of projections*, Preprint, University of Pennsylvania (1984).

Alain CONNES

Collège de France
11 place Marcelin-Berthelot
F-75231 PARIS Cedex 05