Astérisque

DANIEL BENNEQUIN

Caustique mystique

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 634, p. 19-56

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__19_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 634 Novembre 1984

CAUSTIQUE MYSTIQUE
[d'après Arnold et al.]

par Daniel BENNEQUIN

1. Les miroirs ardents

La *développée* d'une courbe plane X est aussi bien le lieu des centres de courbure de X que l'enveloppe des normales à X dans le plan. Une *développante* de X est l'une des courbes planes dont X est la développée (cf. [Coxeter 1]) (figure 1). Ces constructions remontent au traité des horloges de Huygens (cf. [Huygens 1]). La développée d'une cycloïde (roulette) est une cycloïde égale (figure 2). Huygens se sert de cela pour calculer la longueur d'une cycloïde, car l'arc AD de la développée est égal à la normale BD à la développante (théorème de l'enveloppe) (figure 1).

Soit O un point du plan et M une courbe plane, l'enveloppe K des rayons issus de O et réfléchis dans M est la *caustique* par réflexion dans M. La figure 3 montre le cas où O est rejeté à l'infini et où M est un cercle (ce qu'on observe dans une tasse à café). Huygens savait que K est alors une épicycloïde (la néphroïde) (voir son "Traité de la lumière" (1678) (en français) (paru en 1690) [Huygens 2]). Dans ce traité, Huygens étudie aussi les caustiques obtenues par réfraction (figure 4). Mais son intérêt se porte surtout sur les *fronts* de l'onde de lumière (figure 5), il montre que ces fronts acquièrent des singularités cuspidales se propageant le long des caustiques. Les fronts sont les développantes de la caustique ([Huygens 2]). Ces découvertes semblent avoir été faites à peu près au même moment par Ehrenfried von Tschirnhausen ([Tschirnhaus]) (1682), à qui l'on doit le terme de caustique. Le traité de Tschirnhaus a tout de suite attiré l'attention des premiers analystes, parmi eux Jacques et Jean Bernoulli (cf. [Bernoulli]), Mr de la Hire et le marquis de l'Hospital (cf. [l'Hospital]). C'est dans l'"Analyse des infiniment petits" que l'on trouve l'allure des développantes d'une courbe en un point d'inflexion A (figure 6). Elles acquièrent sur la tangente AF un point de rebroussement de seconde espèce (un "bec d'aigle", me dit Morin).

Dans les années 60, R. Thom montre tout le parti qu'on peut tirer de la théorie des singularités génériques d'applications, pour étudier les caustiques et les fronts d'onde (cf. [Thom 1,3]) (voir le § 3).

Depuis 1970, Arnold et toute une école de singularistes soviétiques, ont obtenu

des résultats remarquables sur les singularités des caustiques, des fronts d'ondes, des développantes et de leurs analogues en toute dimension. D'abord il est apparu que les caustiques "simples" correspondent aux désingularisations des surfaces de Klein associées aux polyèdres réguliers dans $\mathbb{R}^3$ (cf. § 4) ([Klein]), et aussi que les fronts d'ondes "simples" dans $\mathbb{R}^\mu$ sont isomorphes aux *discriminants* des *kaléidoscopes* de Coxeter ([Coxeter 2]) du type A_μ , D_μ , E_μ (cf. § 5) (le discriminant (réel) d'un groupe fini engendré par des réflexions dans $\mathbb{R}^\mu$ est la partie réelle du lieu de ramification des invariants algébriques du groupe dans $\mathbb{C}^\mu$; voir le § 5). Tout cela est décrit dans [Arnold 1,2]. Depuis 1978, l'examen des développantes a mis à jour une structure algébrique et géométrique d'une richesse incroyable (cf. [Arnold 3,4,5,6,8,15]). Par exemple, les kaléidoscopes du type B_μ décrivent les familles génériques de développantes d'une hypersurface dans $\mathbb{R}^\mu$ (voir le § 9). Et, le groupe F_4 apparaît dans l'étude de la famille des normales à une surface à bord dans $\mathbb{R}^3$ (cf. [I.G. Scherback] et § 8).

Autre exemple : la famille des développantes d'une courbe plane qui possède un point d'inflexion ordinaire. Les efforts conjugués de Guivental, Lyaschko, O.P. Scherback, Platonova et Arnold ont montré que cette famille s'obtient en projetant les sections génériques du discriminant du groupe H_3 de l'icosaèdre (figure 7) (cf. [O.P. Scherback 1] et § 9). Dernier exemple : les formes normales des variétés singulières (lagrangiennes et legendriennes) qui "relèvent" les familles de tangentes et les familles de développantes, proviennent directement de la théorie des invariants des formes binaires (cf. [Cayley 1] et § 9). Ce sont les "queues d'aronde ouvertes" de [Arnold 9] et de [Guivental 1].

Les premiers tracés de caustiques que j'ai trouvés sont dus à Léonard de Vinci (vers 1510) (figure 8) et Albrecht Dürer (vers 1525) (figure 9) (cf. [A. Dürer]). Léonard de Vinci fut le premier à dresser la liste des groupes finis d'isométries planes (cf. [H. Weyl]), (figure 10). Vinci et Dürer étaient passionnés par les polyèdres réguliers (figure 11), et par l'art de dessiner les draperies (figures 12 et 13). Ils auraient sans doute apprécié les liens mystérieux entre les kaléidoscopes, les caustiques, et les 14 points de vue génériques sur une surface lisse pour un observateur qui se promène dans l'espace (figure 14) (cette liste a été établie par [Landis], [Platonova 1], [O.P. Scherback 2] et [Arnold 10], voir aussi [Gaffney] et [Bruce 1,2]) (cf. § 7).

Les théories formelles d'où sortent les caustiques et les fronts sont la géométrie symplectique et la géométrie de contact (cf. [Hamilton], [Malus], et [Cayley 2,3]). Le § 2 rappelle ces notions et suggère quelques constructions utiles.

Pour écrire cet exposé, l'aide de A. Chenciner, J. Martinet et A. Morin m'a été bien utile.

2. Lagrangiennes et legendriennes (voir [Weinstein 1] et [Arnold 11,12])

Une *structure symplectique* sur une variété W de dimension paire est une forme différentielle *fermée* ω sur W, de degré 2, de rang maximum en chaque point de W. Exemple : le fibré cotangent T^*Y d'une variété Y, avec la dérivée extérieure ω de la *forme de Liouville* λ (λ est définie par les tautologies $\alpha^*(\lambda) = \alpha$, α 1-forme différentielle sur Y).

Une sous-variété J de W est *involutive* si chaque espace tangent $T_yJ \subset T_yW$ contient son orthogonal symplectique N_y (on dit aussi que J est coïsotrope). Alors le sous-fibré N de $T(J)$ engendre un feuilletage, appelé *feuilletage caractéristique* de J. Exemple : une hypersurface lisse de W est toujours involutive, son feuilletage caractéristique est défini par les équations canoniques de Lagrange et Hamilton. Lorsque J est involutive et fibrée par son feuilletage caractéristique N, le quotient D de J par N hérite d'une structure symplectique quotient de ω. Exemple : l'espace des droites orientées d'un espace euclidien E, avec J le fibré en sphères de rayon 1, $S^*E \subset T^*E$ (exercice : identifier la structure obtenue avec celle du fibré cotangent à une sphère de rayon 1 dans E).

Une sous-variété V de W est *isotrope* si la forme induite par ω sur V est identiquement nulle. Lorsqu'une sous-variété de W est à la fois isotrope et involutive, on dit qu'elle est *lagrangienne* (sa dimension est la moitié de celle de W). Exemple : le fibré conormal N^*X d'une sous-variété X de Y forme une sous-variété lagrangienne de T^*Y ($p \in N^*_X X$ si $p|T_xX = 0$). Autre exemple : le graphe d'une 1-forme fermée sur Y est lagrangien dans T^*Y.

Un *feuilletage lagrangien* est un feuilletage de W dont chaque feuille est lagrangienne. Exemple : les fibres du cotangent. Les feuilles d'un feuilletage lagrangien possèdent une structure affine canonique (ω transporte la connexion de Bott du fibré normal sur le fibré cotangent (cf. [Weinstein 2])). Lorsqu'un feuilletage lagrangien sur W définit une fibration p de base Y, on parle de *fibration lagrangienne*, et on appelle *application* p-*lagrangienne* $V \to Y$ la restriction de la projection $p : W \to Y$ à une sous-variété lagrangienne V de W.

Exemple 1.— X une sous-variété lisse d'un espace affine euclidien E, N^*X son fibré conormal, SN^*X l'intersection de S^*E avec N^*X, les lignes du flot caractéristique de S^*E (flot géodésique) passant par SN^*X forment une sous-variété lagrangienne V^*X de T^*E, qu'on peut bien appeler le *faisceau des normales* à X dans E. L'application lagrangienne $V^*X \longrightarrow E$ s'appelle application *normale*. Ses valeurs singulières forment la *caustique de source* X (enveloppe des droites perpendiculaires à X dans E).

Soient $p_1 : W_1 \longrightarrow Y_1$ et $p_2 : W_2 \longrightarrow Y_2$ deux fibrations lagrangiennes, et soit V_1 (resp. V_2) une sous-variété lagrangienne de W_1 (resp. W_2) ; nous dirons que les applications induites $V_1 \longrightarrow Y_1$ et $V_2 \longrightarrow Y_2$ sont *isomorphes*, s'il existe

un voisinage W_1' (resp. W_2') de V_1 (resp. V_2) dans W_1 (resp. W_2), et un difféomorphisme symplectique (transformation canonique) de W_1' dans W_2' qui envoie V_1 sur V_2 et qui envoie chaque trace sur W_1' d'une fibre de p_1 dans la trace sur W_2' d'une fibre de p_2.

Une *structure de contact* sur une variété M de dimension impaire $2n+1$ est un champ F d'hyperplans tangents à M tel que le cône Σ_F dans T^*M des formes linéaires nulles sur F soit une sous-variété symplectique de T^*M. Il faut voir F comme une équation de Pfaff sur M la moins intégrable possible (localement F est définie par $\alpha = 0$ avec $\alpha \wedge (d\alpha)^n = 0$). Une variété intégrale L de F ($T(L) \subset F|L$) est dite *horizontale* ; sa dimension ne peut excéder n. Les sous-variétés de M qui sont *horizontales* et de dimension n sont les *sous-variétés legendriennes* de F. Du cône Σ_F le fibré F hérite une structure *conforme symplectique* ; on peut donc définir des sous-variétés *involutives* dans M comme en géométrie symplectique, ce sont les sous-variétés J de M telles que $T(J) \cap F|J$ soit un sous-fibré de $F|J$ et contienne son orthogonal symplectique N. Le sous-fibré N de $T(J)$ est intégrable et engendre le *feuilletage caractéristique* de J. La structure de contact passe au quotient sur J/N. Une hypersurface transverse à F est toujours involutive.

De façon tout à fait analogue au cas symplectique, on définit des feuilletages legendriens, des fibrations legendriennes $p : M \to S$, des applications p-legendriennes, leurs isomorphismes, etc...

Les structures de contact interviennent comme version projective du symplectique. Exemple : le fibré projectif cotangent P^*Y d'une variété Y, c'est l'espace des *éléments de contact* de Y (d'où le nom du contact) (si $v \in T_h P^*Y$, on a $v \in F$ si sa projection dans $T(Y)$ appartient à h ; comparer à la définition de la forme de Liouville sur T^*Y). Une sous-variété legendrienne typique de P^*Y est formée par les éléments de contact tangents à une sous-variété de Y ; par exemple tous les éléments qui ont même *point d'appui*. La projection $P^*Y \longrightarrow Y$ est une fibration legendrienne. On peut aussi considérer les éléments de contact *orientés* sur Y, leur espace s'identifie avec S^*Y.

Exemple 2.– Soient E un espace affine euclidien et X une hypersurface lisse de E, la sous-variété $SN^*X = N^*X \cap S^*Y$ de S^*Y est legendrienne. Le flot géodésique φ_t sur S^*Y respecte la structure de contact, les projections sur Y des images successives de SN^*X par φ_t sont les fronts d'onde de la lumière émise par X. Les singularités de fronts d'onde sont donc des singularités d'applications legendriennes.

Les structures de contact constituent aussi la version "espace-temps" du symplectique. Exemple : l'espace $J^1(Y) = \mathbb{R} \times T^*Y$ des jets d'ordre 1 des fonctions numériques sur Y, avec la structure $dt = \lambda$ (t coordonnée sur $\mathbb{R}$, λ forme de

Liouville de T^*Y). Il s'identifie naturellement à l'ouvert de $P^*(Y \times \mathbb{R})$ des éléments de contact sur l'espace-temps $S = Y \times \mathbb{R}$ transverses à l'axe des temps. La projection $J^1(Y) \longrightarrow S$ est une fibration legendrienne.

Exemple 3.— E est un espace euclidien, $E \times \mathbb{R}$ l'espace-temps associé. Notons W_1 l'hypersurface dans $J^1(E)$ constituée par les "*éléments de lumière*" : $dt = pdy$ avec $|p|^2 = 1$. Le champ caractéristique de W_1 est noté χ_1 . Soient X une hypersurface lisse dans E , $N^*X \subset T^*E$ son fibré conormal ; notons encore SN^*X la trace de $N^*X \times \{0\}$ sur W_1 . Considérons le sous-espace L^*X de W_1 constitué par les courbes intégrales de χ_1 passant par SN^*X ; c'est une sous-variété legendrienne de $J^1(E)$ appelée *variété de Hamilton-Jacobi*. Son image dans $E \times \mathbb{R}$ est le graphe de la fonction multivaluée "temps nécessaire pour venir de X ", on l'appelle "*graphe du temps*".

Beaucoup de constructions en géométrie symplectique se ramènent à un raffinement du théorème suivant (qui doit venir de S. Lie ou de E. Cartan).

THÉORÈME 1.— *Soit* ℓ *une sous-variété isotrope d'une variété symplectique* W , *et soit* I *un sous-fibré isotrope de* $T(W)_{|\ell}$ *contenant* $T(\ell)$, *il existe une sous-variété isotrope* L *contenant* ℓ *telle que* $T(L)_{|\ell} = I$.

Démontrons le par récurrence sur $\dim I - \dim \ell$. Choisissons un supplémentaire N de $T(\ell)$ dans I ; on a $T(\ell) \subset I \subset I^{\perp} \subset N^{\perp}$, donc il existe une hypersurface J de W contenant ℓ , telle que $T(J)|\ell \supset N^{\perp}$ (donc $(T(J)|\ell)^{\perp} \subset N$). Soit ξ le feuilletage caractéristique de J ; notons ℓ' la réunion des feuilles de ξ passant par ℓ et I' le sous-fibré de $T(J)|\ell'$ obtenu à partir de I par l'holonomie de ξ . On a $\dim I' - \dim \ell' = \dim I - \dim \ell - 1$, etc.

Ce théorème a le remarquable corollaire suivant.

THÉORÈME 2 (Guivental).— *Soient* $j_1 : X_1 \longrightarrow W_1$ *et* $j_2 : X_2 \longrightarrow W_2$ *des germes de sous-variétés des variétés symplectiques* (W_1,ω_1) *et* (W_2,ω_2) , *et soit* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *un germe de difféomorphisme tel que* $f^* j_2^* \omega_2 = j_1^* \omega_1$; *il existe un difféomorphisme symplectique* F *d'un voisinage de* X_1 *dans* W_1 *sur un voisinage de* X_2 *dans* W_2 *qui prolonge* f .

Démonstration.— Le graphe ℓ du difféomorphisme f s'interprète comme un germe de sous-variété isotrope dans le produit $W = \mathrm{Hom}(W_1,W_2) = (W_1,-\omega_1) \times (W_2,\omega_2)$. Un peu d'algèbre linéaire donne un sous-fibré lagrangien I de $T(W)_{|\ell}$ qui contient $T(\ell)$ et qui est transverse à $TW_{1|\ell} \times \{0\}$ comme à $\{0\} \times TW_{2|\ell}$. Le théorème 1 donne un germe de lagrangienne L dans W transverse aux fibrations sur W_1 et sur W_2 , et contenant ℓ . Le difféomorphisme F a pour graphe L .

En appliquant le théorème 2 au cas où X_1 et X_2 sont des points, on obtient le *théorème de Darboux* : localement toutes les structures symplectiques sont faites comme celle d'un $T^*\mathbb{R}^n$. A partir de là il est facile de voir que toutes les

structures de contact sont faites comme celle d'un $J^1(\mathbb{R}^n)$ ou d'un $P^*(\mathbb{R}^{n+1})$. On peut aussi montrer que toutes les fibrations lagrangiennes (resp. legendriennes) ont pour modèle local $T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $J^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ou $P^*(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$) ([Weinstein 2]).

Un procédé pour construire des lagrangiennes (resp. des legendriennes) d'une variété symplectique (resp. d'une variété de contact) est la *réduction symplectique*. Soit J une sous-variété involutive dans (W,ω) (resp. (M,F)), nous notons N son feuilletage caractéristique, et nous supposons que $J \longrightarrow J/N$ est une fibration. Soit L une sous-variété lagrangienne de W (resp. legendrienne de M), telle que $L \cap J = \ell$ soit une sous-variété de J et telle que $T(L)_{|\ell} \cap T(J)_{|\ell} = T(\ell)$ (intersection régulière de Bott) ; alors l'image de ℓ dans J/N est une sous-variété (éventuellement immergée) lagrangienne (resp. legendrienne) (voir [Weinstein 1], [Guillemin-Sternberg]) (au niveau linéaire symplectique $(L \cap J)^{\perp} = L + N$ donc $(L \cap J)^{\perp} \cap J = L \cap J + N$).

Remarque.— Tout ce que nous avons dit reste vrai en géométrie symplectique analytique complexe (ou réelle). De même pour la géométrie de contact.

3. Théorie des catastrophes

Soit X une hypersurface lisse dans un espace affine euclidien E de dimension ℓ. Notons N le fibré normal à X dans E et ν l'application de N dans E qui envoie le vecteur $\vec{n}$ d'origine x sur le point $x + \vec{n}$. L'enveloppe de la famille des droites perpendiculaires à X dans E est l'ensemble des valeurs singulières de ν (figure 15). La métrique sur E permet de rapatrier la structure symplectique de T^*E sur TE et l'exponentielle $TE \longrightarrow E$ qui à $\vec{v} \in T_x E$ associe $x + \vec{v}$ est une fibration lagrangienne. Ainsi, l'application normale de l'exemple 1 du § 1 est isomorphe à ν et K est la caustique de source X.

Lorsque E est un plan ($\ell = 2$) , l'expérience montre qu'en bougeant un peu X , on peut s'arranger pour que ν ne présente que des singularités génériques pour une application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, à savoir des *plis* et des *fronces* (figure 16) (cf. [Whitney]).

Mais dès que $\ell \geq 3$, par exemple dans $\mathbb{R}^3$, on obtient de façon stable des singularités qui ne sont pas génériques de $\mathbb{R}^\ell$ dans $\mathbb{R}^\ell$. Dans $\mathbb{R}^3$, en plus des *arêtes de rebroussements* et des *queues d'aronde* (figure 17), il y a des *poils* (ombilics elliptiques) (figure 18) et des *crêtes de vagues* (ombilics hyperboliques) (figure 19).

Vers le milieu des années 60, R. Thom avait trouvé un moyen de faire rentrer les caustiques dans la théorie des singularités génériques ; il suffit de prendre en compte tous les rayons possibles issus de X et pas seulement ceux que la lumière va réellement suivre (construction de Huygens-Feynman). En effet, soit Y

un ouvert de $\mathbb{R}^3$ où l'on veut décrire la caustique, introduisons la fonction numérique $\varphi(x,y) = |x-y|^2$ sur le produit de X par Y, et considérons l'application $F : X \times Y \longrightarrow Y \times \mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $(y,\varphi(x,y))$; le lieu singulier C de F est défini par $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ et la restriction de F à C est singulière au dessus des points de K. Or l'application F n'aura que des singularités génériques (et stables) d'applications de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ (la description analogue pour les fronts d'onde se trouve dans [Thom 1]) (voir aussi [Porteous]).

Nous allons voir qu'une construction semblable, due à Arnold, Hörmander et Weinstein, permet de ramener l'étude de tout germe d'application lagrangienne $T^*Y \supset V \longrightarrow Y$ (resp. legendrienne $J^1Y \supset L \longrightarrow Y \times \mathbb{R}$) à l'étude d'une famille de fonctions φ_y, $y \in Y$ sur un espace X de variables internes : les caustiques sont exactement les catastrophes élémentaires de bifurcation.

Soit $Z \xrightarrow{p} Y$ une fibration de fibre X ; on note M l'ouvert de $P^*(Z \times \mathbb{R})$ qui s'identifie à $J^1(Z,\mathbb{R})$ (éléments de genre temps), et J la sous-variété involutive de M formée par les éléments de contact tangents aux fibres de $p \times Id : Z \times \mathbb{R} \longrightarrow Y \times \mathbb{R}$.

Considérons une fonction numérique φ sur Z, et notons G son graphe dans $Z \times \mathbb{R}$; nous relevons G à la legendrienne $\tilde{G}$ de M constituée par les espaces tangents de G. Nous disons que φ est *transverse* à $p : Z \to Y$ si $\tilde{G}$ est transverse à J. Soit $\tilde{C}$ l'intersection (supposée transverse) de $\tilde{G}$ avec J, le *lieu critique* C de φ est la projection de $\tilde{C}$ sur Z, son *contour apparent* Δ est la projection de $\tilde{C}$ sur $Y \times \mathbb{R}$. D'autre part le quotient de J par son feuilletage caractéristique N s'identifie à $J^1(Y)$; la *legendrienne* $L \subset J^1(Y)$ de φ est la réduction de $\tilde{G}$ par N, sa *lagrangienne* $V \subset T^*Y$ est la projection de L sur T^*Y. L'application $V \to Y$ est "l'application des catastrophes" (cf. [Thom 1], [Zeeman]). L'ensemble de ses valeurs singulières est la *caustique* K de φ, c'est le fermé des bifurcations de la famille de fonctions φ_y, $y \in Y$ sur X.

La fonction φ s'appelle *potentiel générateur* de tous ces objets (ou famille (génératrice) de potentiels (locaux)). Exemple : la fonction distance sur $X \times E$ est le potentiel générateur de la caustique de source X. En coordonnées, $V(\varphi)$, par exemple, est l'ensemble $\{(y,\eta) | \eta \in T^*_yY \ ; \ \exists\, x \ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \ \& \ \eta = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\} \subset T^*Y$.

Deux potentiels φ et φ' sur $Z \to Y$ et $Z' \to Y'$ sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme f d'un voisinage de $C(\varphi)$ sur un voisinage de $C(\varphi')$, respectant les projections sur Y et Y', tel que $\varphi' \circ h = \varphi$ (en formules $h(x,y) = (x'(x,y),y'(y))$).

On dit que φ et φ' sont *moralement équivalents* (en anglais right$^+$-equivalent) s'il existe une fonction ψ sur Y telle que $\varphi + \psi \circ p$ soit isomorphe à φ' (cf. [Mather]) ($\varphi'(x'(x,y),y'(y)) = \varphi(x,y) + \psi(y)$).

Et on dit que φ et φ' sont *équivalents* (en anglais K-equivalent) s'il existe

une famille C^∞ de difféomorphismes f de $\mathbb{R}$ paramétrés par Z tels que $f \circ \varphi$ soit isomorphe à φ' (cf. [Mather]) ($\varphi'(x'(x,y),y'(y)) = f_{x,y}(\varphi(x,y))$).

Si E est un espace vectoriel et si Q est une forme quadratique non dégénérée sur E, le potentiel $\varphi_Q(x,y) = Q(x)$ sur $E \times Y$ engendre la section nulle dans $J^1(Y)$ comme dans $T^*(Y)$. On dit que φ sur $Z \to Y$ et φ' sur $Z' \to Y'$ sont *stablement équivalents* (resp. *stablement moralement équivalents*) s'il existe des formes quadratiques non dégénérées Q et Q' sur des espaces vectoriels E et E' (éventuellement de dimensions différentes) tels que $\varphi+Q$ sur $Z \times E \longrightarrow Y$ et $\varphi' + Q'$ sur $Z' \times E' \longrightarrow Y$ soient équivalents (resp. moralement équivalents).

Un potentiel φ sur $Z \to Y$ est *résiduel* en un point z de $C(\varphi)$ si la dérivée seconde relative (i.e. dans la fibre X) $d^2_p\varphi$ est nulle au point z. R. Thom a démontré (cf. [Thom 1]), en utilisant le lemme $\mathfrak{m}J^2$ de Tougeron :

THÉORÈME 3.— *Tout germe de potentiel est stablement équivalent à un germe résiduel et deux germes de potentiels résiduels qui sont stablement équivalents sont en fait équivalents.*

THÉORÈME 4 ([Hörmander], [Weinstein 3], [Arnold 1]).— *Tout germe de lagrangienne dans T^*Y (resp. legendrienne dans $J^1(Y)$) possède un potentiel générateur. Deux germes de projections lagrangiennes sur T^*Y (resp. legendriennes sur $J^1(Y)$) sont isomorphes si et seulement si leurs potentiels générateurs sont stablement moralement équivalents (resp. stablement équivalents).*

L'existence d'un potentiel est facile. Par exemple, soit L legendrienne dans $J^1(Y)$, prenons comme fibration p la projection $T^*Y \longrightarrow Y$, relevons L dans $P^*(T^*Y \times \mathbb{R})$ à $\tilde{L}$ par les hyperplans de la structure de contact de $J^1(Y)$ tangents à L. Un peu d'algèbre linéaire donne un sous-fibré "lagrangien" I de $TP^*_{|\tilde{L}}$ contenant $T(\tilde{L})$, et transverse à la fois à la variété involutive J, aux fibres de la projection sur $J(Y)$ et aux caractéristiques de J. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 1.

Les résultats d'équivalence se montrent avec le même genre d'idée à partir du théorème 3 (voir [Wall] et [Zakalyukin 1]).

Soit X un germe de variété au point O, et f une fonction numérique C^∞ sur X, dont O est un point singulier *strictement isolé*. C'est-à-dire que l'idéal jacobien $J(f)$ engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans l'algèbre A des germes de fonctions C^∞ en O, contient une puissance de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A (cf. [Thom 1] ou [Thom 2]).

Rappelons qu'un déploiement $F : X \times Y \longrightarrow Y \times \mathbb{R}$ de f est *versel* si tout autre déploiement $F' : X \times Y' \longrightarrow Y' \times \mathbb{R}$ est induit par F (i.e. si $F(x,y) = (y,\varphi(x,y))$, et $F'(x,y') = (y',\varphi'(x,y'))$, il existe un difféomorphisme fibré $(x'(x,y),y'(y))$ tel que $\varphi'(x',y') = \varphi(x,y)$). Le théorème de base (corollaire du théorème de pré-

paration de Malgrange-Weierstrass), dit que le déploiement $F(x,y) = (y,\varphi(x,y))$ est versel, si et seulement si ses *vitesses initiales* $\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}$ engendrent un supplémentaire de $J(f)$ dans A (voir [Martinet], [Chenciner] et [Mather]).

Soit $V \supset T^*Y$ un germe de sous-variété lagrangienne, on dit que la projection $V \to Y$ est une application lagrangienne *stable* si, sur toute lagrangienne V' assez proche (en topologie C^∞) de V, il existe un point où le germe de $V' \to Y$ est isomorphe au germe $V \to Y$.

Soient $T^*Y \supset V \to Y$ un germe lagrangien, et $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ un potentiel générateur de V, on peut considérer φ comme une déformation d'un germe $f : X \to \mathbb{R}$ en un point 0 de X. Nous supposerons que $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$. Et nous dirons que f est la *source* de V (ou centre organisateur).

THÉORÈME 5 ([Arnold 1], [Guckenheimer]).— *L'application $V \to Y$ est lagrangiennement stable si et seulement si le déploiement $\hat{F} : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de f défini par $\hat{F}(x,y,\lambda) = (y,\lambda,\varphi(x,y) - \lambda)$ est versel (voir aussi* [Duistermaat 1,2]).

Si le germe $f : X \to \mathbb{R}$ s'annule en 0, on peut faire une théorie du déploiement "projectif" qui ne s'intéresse qu'aux germes d'hypersurfaces en 0 ; dans X, il faut remplacer A par $\mathfrak{m}$ et $J(f)$ par l'idéal $\tilde{J}(f)$ engendré par f et par les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (cf. [Mather] ou [Looijenga 1]).

On parle alors de déploiement versel pour les niveaux. La définition de la stabilité des applications legendriennes est analogue à celle de la stabilité lagrangienne ; et la version "contact" du théorème 5 dit qu'un germe $J^1(Y) \supset L \to Y \times \mathbb{R}$ est stable si et seulement si le déploiement $\hat{F}(x,y,\lambda) = (y,\lambda,\varphi(x,y) - \lambda)$ associé à un potentiel φ de L est versel pour les niveaux (cf. [Arnold 2,7] et [Zakalyukin 1]).

4. Caustiques et groupes de quaternions

Ainsi la théorie des singularités lagrangiennes et legendriennes génériques se ramène à la théorie des déploiements des fonctions numériques à point singulier isolé. Ce qui a permis à [Arnold 1] et [Zakalyukin 1] de classer toutes ces singularités génériques sur les bases de dimension $\ell \leq 10$.

Lorsque $\ell \leq 5$, elles sont toutes stables et on retrouve la liste de Thom (cf. [Zeeman]).

Pour $\ell = 1$, le potentiel A_2,

$$\varphi(x,y) = x^3 + yx .$$

Il donne la lagrangienne en coordonnées paramétriques dans $T^*\mathbb{R}$,

$$y = -3x^2 \quad , \quad \eta = x ,$$

et la courbe de Legendre dans $J^1(\mathbb{R})$

$$y = -3x^2 \quad , \quad \eta = x \quad , \quad t = -2x^3 .$$

Le front est donc un point de rebroussement de première espèce : $8y^3 + 9t^2 = 0$. Et la caustique est un *pli*.

Pour $\ell = 2$, en plus de A_2 , $\varphi(x,y_1,y_2) = x^3 + y_1x$, on trouve les potentiels $A_3^{\pm}$ des *fronces* (ou *cusps*)

$$\varphi(x,y_1,y_2) = \pm x^4 + y_2x^2 + y_1x .$$

Les fronts sont des queues d'aronde (figure 17).

Pour $\ell = 3$, viennent la *queue d'aronde* A_4 , de potentiel

$$x^5 + y_3x^3 + y_2x^2 + y_1x ,$$

et les deux *ombilics* D_4^+ et D_4^- (figure 18) dont le corang (dimension de X pour un potentiel résiduel) est 2 ,

$$\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1^3 \pm x_1x_2^2 + y_3x_1^2 + y_1x_1 + y_2x_2 .$$

Pour $\ell = 4$, on a en plus $A_5^{\pm}$ de source $\pm x^6$, le "*papillon*", et D_5 , l'ombilic parabolique, ou "*champignon*" (voir [Thom 1]) de potentiel

$$x_1^4 \pm x_1x_2^2 + y_4x_1^3 + y_3x_1^2 + y_1x_1 + y_2x_2 .$$

Pour $\ell = 5$, A_6 de source x^7 , D_6 de source $x_1^5 \pm x_1x_2^2$, et E_6 de potentiel

$$x_1^3 \pm x_2^4 + y_5x_1^2x_2 + y_4x_1x_2 + y_3x_1^2 + y_1x_1 + y_2x_2 .$$

A partir de $\ell = 6$, un phénomène nouveau apparaît en plus de trois singularités stables A_7 , D_7 , E_7 , il y a la "classe" P_8^* (ou $T^*_{3,3,3}$). Une classe d'isomorphisme du type P_8^* dépend d'une fonction ψ de 6 variables, un potentiel s'écrit

$$\pm x_1^3 \pm x_2^3 \pm x_3^3 + \psi(y_1,\ldots,y_6)x_1x_2x_3 + y_1x_1^2 + y_2x_2^2 + y_3x_3^2 + y_4x_1 + y_5x_2 + y_6x_3 .$$

Pour $\ell \geq 7$, en plus de A_8 , D_8 , E_8 , deux classes analogues apparaissent pour les *caustiques* X_9^* et P_9^* , à partir des singularités unimodales de fonctions $X_9 = T_{2,4,4}$ et $P_9 = T_{3,3,4}$. On a aussi la classe P_8 dont le potentiel est donné par le déploiement universel de la singularité unimodale $\pm x_1^3 \pm x_2^3 \pm x_3^3 + ax_1x_2x_3$. Pour les *fronts*, P_8 et X_9^* demeurent mais P_9^* est remplacé par ${}_1P_9^0$ où l'on *fixe* la valeur du module (consulter le livre d'Arnold, Husein-Zade et Varchenko ([Arnold 7])).

Une singularité lagrangienne $V \to Y$ (resp. legendrienne $L \to S = Y \times \mathbb{R}$) est *simple* s'il existe une collection *finie* $\mathcal{D}$ de germes d'applications lagrangiennes (resp. legendriennes), telle que toute application lagrangienne $V' \to Y$ (resp. legendrienne $L' \to S$) suffisamment proche de $V \to Y$ (resp. $L \to S$) possède en *chacun* des points de V' (resp. L') un germe isomorphe à l'un des germes de $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 6 ([Arnold 1]).— *Les seules applications lagrangiennes et legendriennes simples et stables, sont celles qui sont engendrées par les déploiements versels de* A_k , $k \geq 1$, $f(x) = \pm x^{k+1}$; D_k , $k \geq 4$, $f(x,y) = \pm x^{k-1} \pm xy^2$; E_6 , $f(x,y) = \pm x^3 \pm y^4$; E_7 , $f(x,y) = \pm x^3 \pm xy^3$, *et* E_8 , $\pm x^3 \pm y^5$.

Soit I un icosaèdre dans $\mathbb{R}^3$, ses symétries forment un sous-groupe H_3 de $O(3)$ isomorphe à $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2$. Les isométries directes de H_3 forment un groupe alterné de 5 lettres $\mathfrak{A}_5$ (figure 20). En relevant $\mathfrak{A}_5$ dans $SU(2)$ par le revêtement quaternionique $SU(2) \longrightarrow SO(3)$ on tombe sur le groupe binaire de l'icosaèdre $\mathrm{II} = <2,3,5>$ à 120 éléments. Soit $S = \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]^{\mathrm{II}}$ l'algèbre des polynômes en 2 variables invariants sous l'action de II . L'algèbre S possède 3 générateurs liés par une équation (syzygie). D'après [Klein] :

$$f = xy(x^{10} + 11x^5y^5 - y^{10}) ,$$

$$H = -(x^{20} + y^{20}) + 228(x^{15}y^5 - x^5y^{15}) - 494\, x^{10}y^{10} ,$$

$$T = (x^{30} + y^{30}) + 522(x^{25}y^5 - x^5y^{25}) - 10005(x^{20}y^{10} + x^{10}y^{20}) ,$$

et

$$T^2 + H^3 = 1728\, f^5 .$$

Donc S est l'anneau des coordonnées d'une surface E_8 , $x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 = 0$, dans $\mathbb{C}^3$.

En partant des autres groupes finis d'isométries directes de $\mathbb{R}^3$, on trouve toutes les autres singularités simples dans $\mathbb{C}^3$: $\mathfrak{A}_4$ (tétraèdres) donne E_6 (figure 21) ; $\mathfrak{S}_4$ (cube) donne E_7 ; les groupes cycliques $\mathbb{Z}/k+1$ (les polygones plans) donnent les A_k , les groupes diédraux $I_2(k-2)$ (les dièdres) donnent les D_k (cf. [Slodowy 1]).

Remarque.— Les singularités stables et unimodales ne sont pas moins belles que les simples. Comme toujours, le premier module qui apparaît est un birapport, mais il prend des formes géométriques étonnantes. Voyons l'exemple des fronts. Pour $\ell = 7$, on a P_8 à cause de $x^3 + y^3 + z^3 + axyz$, le module est l'invariant j sur $M_{1,o}$ des cubiques planes (voir [Mumford]), les "symétries" sont celles du groupe des paveurs p3 (engendré par deux rotations de 120°). Pour $\ell = 8$, X_9 à cause de $x^4 + y^4 + ax^2y^2$, 4 points sur la droite projective, $M_{o,4}$, le groupe des paveurs p4 (déplacements du pavage carré). Pour $\ell = 9$, J_{10} avec $x^3 + y^6 + ax^2y^2$, 3 points de la droite affine, le groupe des paveurs p6 (déplacements du pavage hexagonal) (cf. [Fejes-Toth] et [Milnor 2]) (voir figure 22).

5. Kaléidoscopes

Les singularités simples ont hérité leurs noms de la géométrie de leurs monodromies et de leurs désingularisations (voir [Du Val], [Artin], [Brieskorn 1,2], [Tjurina].

Appelons *kaléidoscope* (ou *groupe de Coxeter fini*) un groupe fini G d'isométries d'un espace euclidien E , engendré par des réflexions dans des hyperplans $H_1, \ldots, H_\mu$ de E . Notons R_i la réflexion dans H_i ; le groupe G est défini par les relations $(R_iR_k)^{p_{ik}} = Id_E$, $1 \le i \le k \le \mu$, avec $p_{ii} = 1$ et $p_{ik} > 1$ si

$i < k$. L'angle dièdre de H_i avec H_k est π/p_{ik} (cf. [Coxeter 2], [Coxeter-Moser], [Bourbaki]). Le *graphe de Coxeter* de G a un sommet par générateur, R_i , une arête de R_i à R_k si $p_{ik} > 2$, et le nombre p_{ik} est écrit au-dessus de l'arête si $p_{ik} > 3$. On dit qu'un kaléidoscope est *irréductible* si son graphe est connexe.

La sous-algèbre $\mathbb{R}[E]^G$ de $\mathbb{R}[E]$ formée par les polynômes invariants sous l'action de G est elle-même une algèbre de polynômes. C'est l'algèbre des polynômes en μ polynômes $a_1,\ldots,a_\mu \in \mathbb{R}[E]$. (Voir [Chevalley], [Bourbaki]) (lorsque G est irréductible, l'invariant de plus bas degré a_1 est toujours de degré 2). Notons $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié $E \otimes \mathbb{C}$ de E ; l'algèbre $\mathbb{C}[E_{\mathbb{C}}]^G$ s'interprète naturellement comme l'anneau des coordonnées de la variété algébrique affine $E_{\mathbb{C}/G}$. Ainsi, la projection $p_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow E_{\mathbb{C}/G}$ est un isomorphisme affine (en coordonées p est donnée par $a = (a_1,\ldots,a_\mu) : E \longrightarrow E$).

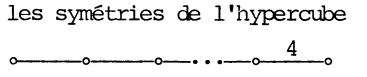
Le *discriminant* $\Delta(G)$ est l'hypersurface de $E_{\mathbb{C}/G}$ où p se ramifie, il s'identifie à l'image dans $E_{\mathbb{C}}$ de la réunion des hyperplans $H_i \otimes \mathbb{C}$ par la complexifiée de a . Le *discriminant réel* $\Delta^r(G)$ est la partie réelle de $\Delta(G)$.

Exemple.— Le kaléidoscope A_μ : le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{\mu+1}$ permute les coordonnées $(z_0,\ldots,z_\mu)$ sur l'hyperplan $z_0 + \ldots + z_\mu = 0$ de $\mathbb{C}^{\mu+1}$. La variété des orbites est l'espace des polynômes $z^{\mu+1} + a_1 z^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1}z + a_\mu$, et le discriminant est constitué par les polynômes ayant au moins une racine double ("queue d'aronde" généralisée). A cause de cet exemple, Arnold a baptisé *application de Viète* l'application a .

Tous les kaléidoscopes ont été déterminés par E. Cartan et H.S.M. Coxeter (voir [Bourbaki 1]) (figure 23). Voici les seuls irréductibles : les A_μ sont les groupes symétriques $\mathfrak{S}_{\mu+1}$, ce sont les symétries du simplexe α_μ (figure 24) de $\mathbb{R}^\mu$,

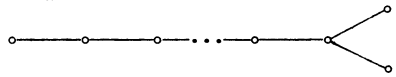
($\mu \geq 1$ sommets),

les B_μ (ou C_μ) sont les symétries de l'hypercube β_μ de $\mathbb{R}^\mu$,



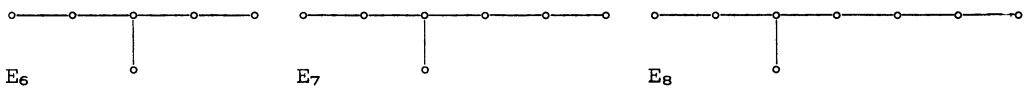
($\mu \geq 2$ sommets),

les D_μ , d'indice 2 dans les précédents, sont les symétries de l'hypercube qui respectent $h\beta^\mu$, le polytope obtenu en prenant un sommet sur deux de l'hypercube ($h\beta^\mu$ est irrégulier dès que $\mu \geq 5$),

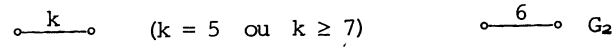


($\mu \geq 4$ sommets),

les exceptionnels E_6 , E_7 , E_8 ,

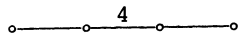


les diédraux $I_2(k)$ d'ordre $2k$ (dont $G_2 = I_2(6)$),

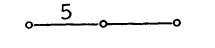


$(k = 5$ ou $k \geq 7)$ G_2

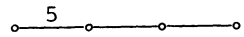
le groupe F_4 à 1152 éléments, groupe des symétries du polytope régulier (auto-réciproque) à 24 pièces (figure 25) dans $\mathbb{R}^4$,



H_3 à 120 éléments, symétries de l'icosaèdre et du dodécaèdre (figures 11 et 20),



et enfin H_4 , à 14400 éléments, groupe de symétries du polytope régulier à 600 pièces (figure 26) de $\mathbb{R}^4$ et de son réciproque (figure 27), à 120 pièces,



Grâce à l'école d'Arnold, nous savons maintenant que les discriminants de tous ces groupes (sauf peut-être H_4), caractérisent une situation singulière "simple" en géométrie de contact (cf. §§ 8 et 9 ci-dessous).

Auparavant, la description du discriminant d'une singularité rationnelle (désingularisée par éclatements successifs de points) avait été conjecturée par Grothendieck, et réalisée par Brieskorn (cf. [Brieskorn 1], [Slodowy 1,2]). E.J.N. Looijenga précise cette description grâce à l'*application des périodes* (cf. [Looijenga 1,2,3]).

Soit $f : X \to \mathbb{C}$ un germe en $0 \in X \subset \mathbb{C}^n$ de fonction nulle en 0 , singulière, *analytique complexe*, à singularité isolée , on note μ la dimension de $\mathcal{O}(x)/J(f)$, et $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mu-1}$ des fonctions analytiques complexes sur X qui engendrent un supplémentaire de $J(f)$ dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ des fonctions analytiques nulles en 0 . Soit Y un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{\mu-1}$, on définit
$\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\varphi(x,y) = f(x) + y_1\varphi_1(x) + \ldots + y_{\mu-1}\varphi_{\mu-1}(x)$,
$F : X \times Y \longrightarrow Y \times \mathbb{C} = S$ par $F(x,y) = (y,\varphi(x,y))$ (déploiement miniversel restreint). Le contour apparent Δ du potentiel φ dans S s'appelle le *discriminant* de f . C'est l'ensemble des couples (y,λ) tels que $F^{-1}(y,\lambda)$ soit une variété singulière. Quitte à rétrécir $Z = X \times Y$ et à prendre un voisinage D de 0 assez petit dans $\mathbb{C}$, on peut supposer que F induit une fibration localement triviale de $Z' = Z - F^{-1}(\Delta)$ sur $S' = S - \Delta$ ([Milnor 1]). Les fibres $Z_s = F^{-1}(s)$ pour $s \in S'$ ont le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères S^{n-1} , les *cycles évanescents* (cf. [Milnor 1] et [Demazure]). Choisissant un point base s_0 dans S' on a la représentation de monodromie

$$\pi_1(S',s_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_{n-1}(Z_{s_0}),\mathbb{Z})$$

dont l'image est un groupe G .

Notons $\tilde{S}' \xrightarrow{\pi} S'$ le revêtement régulier associé, et $\tilde{F} : Z' \times_{S'} \tilde{S}' \longrightarrow \tilde{S}'$ la fibration qui s'en déduit. Choisissons un point base $\tilde{s}_o$ dans $\tilde{S}'$ au dessus de s_o, et une $(n-1)$-forme ω holomorphe sur Z. Soit $\delta \in H_{n-1}(Z_{\tilde{s}_o}, \mathbb{Z})$ un cycle évanescent, il se promène canoniquement dans les groupes $H_{n-1}(Z_{\tilde{s}}, \mathbb{Z})$ sur $\delta(\tilde{s})$, $\tilde{s} \in \tilde{S}'$. L'*application des périodes* $\tilde{P}_\omega : \tilde{S}' \longrightarrow H^{n-1}(Z_{\tilde{s}_o}, \mathbb{C})$ est définie en formule par

$$\tilde{P}_\omega(\tilde{s})(\delta) = \int_{\delta(\tilde{s})} \omega .$$

THÉORÈME 7 ([Varchenko]).— *Il existe* ω, *et un voisinage* U *de* 0 *dans* S, *tels que* $\tilde{P}_\omega$ *soit de rang* μ *sur* $\pi^{-1}(U \setminus \Delta) \subset \tilde{S}'$.

Supposons maintenant que le germe f soit *simple* (i.e. ses déformations verselles ne rencontrent qu'un nombre fini de classes d'équivalence de germes), et que n soit un nombre impair. Notons E l'espace $H^{n-1}(Z_{\tilde{s}_o}, \mathbb{R})$ et $E_{\mathbb{C}} = E \otimes \mathbb{C}$; la forme d'intersection définit une structure euclidienne sur E et le groupe de monodromie G est un groupe fini d'isométries de E. Il est engendré par les réflexions dans μ hyperplans de E (correspondant aux cycles évanescents), ceci exprime les formules de Picard-Lefschetz (cf. [Demazure]). Le groupe G est isomorphe à un groupe de Coxeter A_μ, D_μ ou E_μ.

Nous pouvons définir l'application quotientée des périodes $P : S' \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ par $P_\omega(S) = p_{\mathbb{C}}(\tilde{P}_\omega(\tilde{S}))$ si $\pi(\tilde{S}) = S$.

THÉORÈME 8 (Looijenga).- *Si* f *est simple, et si* n *est impair, il existe* ω *telle que* P_ω *s'étende en un isomorphisme analytique de* S *sur* $E_{\mathbb{C}}$ *au voisinage de* 0, *qui envoie* $\Delta(f)$ *sur* $\Delta(G)$.

D'où l'identification géométrique des fronts d'onde simples et stables : $\Delta(A_\mu)$, $\Delta(D_\mu)$ et $\Delta(E_\mu)$.

Remarque 1.- Pour une version réelle de ce théorème, voir [Looijenga 3].

Remarque 2.- Les preuves des théorèmes 7 et 8 se servent de la connexion de Gauss-Manin locale.

Remarque 3.- Les colonnes des tables de caractères des groupes finis de quaternions, groupes cycliques $\mathbb{Z}/_{k+1}$, groupes dicycliques (d'ordre $4k-8$), groupes binaires du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre, sont des vecteurs propres des matrices de Cartan de type affine $\tilde{A}_k$, $\tilde{D}_k$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ et $\tilde{E}_8$ ([Mc Kay]).

6. Métamorphoses des caustiques

Il revient à Arnold d'avoir su exploiter la présence des groupes de Coxeter dans les contours apparents pour traiter de nouveaux problèmes de singularités lagrangiennes.

THÉORÈME 9 ([Arnold 13]).— *Soit* G *un groupe de Lie compact agissant linéairement dans* $\mathbb{C}^n$, *toute fonction* G*-invariante holomorphe, ayant en* O *un point critique non dégénéré de valeur critique* 0 , *se réduit à sa partie quadratique par un changement de variable* G*-invariant.*

COROLLAIRE (avec les notations du § 5).— *Soit* $\Delta(G) \subset \mathbb{C}^\mu$, *le discriminant d'un groupe de Coxeter* irréductible, *et soit* f *une fonction sur* $\mathbb{C}^\mu$, *holomorphe en* O , *telle que* $f(O) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial a_1}(O) \neq 0$; f *se réduit à* $f = a_1$ *par un difféomorphisme biholomorphe en* O *qui préserve* $\Delta(G)$.

[Arnold 13] démontre aussi une version analytique réelle de ces résultats. Comment en déduire les formes normales de l'évolution temporelle des fronts dans l'espace ? Regardons le "graphe du temps", projection de la variété de Hamilton-Jacobi (voir exemple 3 du § 2), c'est un front d'onde Δ dans l'espace-temps. Pour trouver la liste des métamorphoses génériques, il suffit de mettre la fonction "temps" sous forme normale en respectant Δ . Pour les singularités A , D , E on détermine aisément tous les cas génériques (voir [Arnold 13,4], [Zakalyukin 2]), (fig. 28).

Une idée semblable (cf. [Arnold 7,6,4]) permet de faire la liste des métamorphoses des caustiques dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (figure 29). Regardez la première colonne de la figure 29, cette caustique peut très bien se former par réfraction de la lumière dans notre espace ; Zakalyukin suggère que cela explique la fréquence des "soucoupes volantes".

Le corollaire du théorème 9 est le premier résultat d'une grande famille. Il mène à l'étude de la "convolution des invariants" pour les fonctions sur $\mathbb{C}^\mu/G$, et de la "convolution linéarisée" sur l'espace cotangent à l'origine du discriminant $\Delta(G)$ (voir [Arnold 13,10,4]). Une approche générale à l'aide des applications des périodes P_ω et des applications dérivées $\frac{\partial^k P_\omega}{\partial \lambda^k}$ est développée par [Varchenko-Guivental], et [K. Saito] (cf. [Arnold 4]), afin d'étudier des cas où f n'est plus simple. Pour l'étude des champs tangents à un discriminant, voir aussi [Lyashko 1].

7. Les draperies

Problème : une surface lisse X étant donnée dans l'espace euclidien E de dimension 3 , décrire les singularités de son contour apparent à partir d'un point O de E .

Soit O un point de $E' = E \setminus X$, notons π_O l'application de X sur le plan à l'infini H , obtenue par restriction de la projection de centre O (figure 30). Il s'agit de comprendre les classes d'équivalence des germes de projection π_O aux points de X , lorsque O décrit l'espace E' . Et cela pour un ensemble résiduel de surfaces X (dans la topologie C^∞). Nous disons que deux germes

$X_1 \subset E_1 \longrightarrow H_1$ et $X_2 \subset E_2 \longrightarrow H_2$ sont *équivalents* s'il existe des germes de difféomorphismes $X_1 \longrightarrow X_2$, $E_1 \longrightarrow E_2$, $H_1 \longrightarrow H_2$ qui font commuter le diagramme que vous imaginez.

Il est facile de montrer que si X est en position générale, toute droite de E ne rencontre X qu'en des points strictement isolés (au sens des idéaux de fonctions) et que chaque intersection a une multiplicité (jacobienne) inférieure ou égale à 5 (cf. [Arnold 10]). Soient O_o un point de E' et x_o un point de X , tels que la droite $\delta_o = O_o x_o$ coupe X avec multiplicité μ en x_o ; le théorème de préparation entraîne que la projection π_{O_o} en x_o est équivalente à la projection suivant l'axe des x dans $\mathbb{R}^3$, sur le plan Oyz d'une surface d'équation

$$x^{\mu} + a_1(y,z)x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-2}(y,z)x + a_{\mu-1}(y,z) = 0 \ .$$

Ainsi chaque projection s'interprète comme une application du plan Oyz dans l'espace $\mathbb{R}^{\mu-1}$ de coordonnées $a_1,\ldots,a_{\mu-1}$. Il suffit de considérer des applications polynomiales, et on peut alors passer dans le domaine complexe $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Les isomorphismes de $\mathbb{C}^{\mu-1}$ respectant la *queue d'aronde* $\Delta(A_{\mu-1})$ fournissent des équivalences de projections dans E .

D'après [Whitney], les seules classes de projections de codimension 0 sont données par les projections orthogonales sur Oyz des surfaces (figure 16),

$$z = x \ \text{(étale)} \ , \quad z = x^2 \ \text{(pli)} \ , \quad z = x^3 + xy \ \text{(fronce)} \ .$$

On a ainsi tous les points de vue sur une surface lisse générique d'un observateur fixe.

Maintenant si l'observateur se déplace sur un chemin (ou si la surface X se déplace sur un chemin), il verra en général trois autres situations qui sont de codimension 1 (figures 31, 32, 33),

$z = x^3 + xy^2$ (lèvre, ou "naissance d'une bosse")
$z = x^3 - xy^2$ (bec à bec)
$z = x^4 + xy$ (le "passage du chameau" ([Arnold 6])).

En codimension 2 apparaîssent quatre formes normales supplémentaires ([Arnold 10], [Gaffney], [Bruce 1]) (figure 34),

$z = x^3 + xy^3$ (la "flamme")
$z = x^4 + x^2y + xy^2$ (la "double fronce")
$z = x^5 + x^3y + xy$
$z = x^5 - x^3y + xy$.

Avec les dix surfaces que nous venons d'énumérer, nous avons donc tous les points de vue génériques d'un observateur sur un objet lisse très éloigné (lorsqu'on peut supposer que le centre O ne varie que dans le plan à l'infini de E).

[Platonova 2] et [Scherback 2], utilisant la classification des germes de surfaces génériques dans $\mathbb{R}^3$ de [Landis] et [Platonova 1], ont déterminé toutes les formes de codimension 3 (figure 14), ce qui clôt la liste des points de vue de tous les observateurs de l'espace sur un point d'une surface lisse générique. Il suffit d'ajouter les quatre cas suivants

$$z = x^3 + xy^4$$
$$z = x^3 - xy^4$$
$$z = x^4 + x^2y + xy^3$$
$$z = x^5 + xy \quad \text{(figure 35)} .$$

(voir les jolis dessins de Scherback dans [Arnold 4]).

Remarque.— Pour aboutir à cette classification, comme toujours en théorie des singularités, il faut encore compléter les idées géométriques par des calculs en quasi-homogène.

8. Singularités à bord

Soit A un germe en 0 d'hypersurface C^∞ (resp. analytique réelle ou complexe) dans une variété X de classe C^∞ (resp. analytique réelle ou complexe). Deux germes en 0 de fonctions numériques sur X sont *équivalents par rapport à* A s'il existe un germe de difféomorphisme de X respectant A (et les structures) qui les conjugue. V.I. Arnold (1978) a montré que la théorie du déploiement universel s'adapte parfaitement à cette notion d'équivalence (cf. [Arnold 3]). Si A est définie par l'annulation de la coordonnée x_1 sur X, il faudra associer à une fonction f l'idéal $\tilde{J}(f)$ engendré par $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}$ et par les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \geq 2$, et la multiplicité jacobienne μ de f sera la dimension d'un supplémentaire de $\tilde{J}$ dans l'algèbre des germes de fonctions C^∞ (resp. analytiques) en 0. Les singularités strictement isolées posséderont des modèles algébriques, et tous leurs déploiements miniversels (versels sur μ paramètres) seront isomorphes.

Une autre manière de voir l'équivalence par rapport à une hypersurface est l'étude des fonctions invariantes sous une action de $\mathbb{Z}/2$. En effet, soient X un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, A une hypersurface complexe lisse passant par 0, $\tilde{X}$ le revêtement double de X ramifié le long de A, et τ l'involution de $\tilde{X}$ qui échange les deux feuillets, deux fonctions f_1 et f_2 sur X sont équivalentes par rapport à A si et seulement si leurs relevées $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ à $\tilde{X}$ sont équivalentes par rapport à τ (c'est-à-dire s'il existe un biholomorphisme h de $\tilde{X}$ équivariant pour τ tel que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 \circ h$). Dans le cas où (X,A) complexifie un couple analytique réel $(X_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}})$, le revêtement $(\tilde{X}, 2A)$ complexifie le *double* de la *sous-variété à bord* $X^+_{\mathbb{R}}$ de $X_{\mathbb{R}}$ bordée par $A_{\mathbb{R}}$. D'où le nom *singularité à bord* (cf. [Arnold 3]). La théorie du déploiement équivariant de [Slodowy 3] (1978)

peut donc s'appliquer ici.

Soit $f : (X,A) \longrightarrow \mathbb{C}$ un germe analytique nul au point 0, et singulier en 0 avec une singularité isolée ; on note $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mu-1}$ des germes de fonctions analytiques sur X dont les images engendrent $\mathfrak{m}/\tilde{J}(f)$; l'application $F : X\times Y \longrightarrow Y\times\mathbb{C}$, définie par $F(x,y) = (y, f(x) + \Sigma y_i\varphi_i(x))$ est un déploiement miniversel restreint (par rapport à A) de f. Le *discriminant* $\Delta(f;A)$ est le fermé de $S = Y\times\mathbb{C}$ dont le complémentaire S' est formé par les points s pour lesquels la "fibre" Z_s est non singulière *et* transverse à A. L'ensemble "catastrophe" de (f,A) est la projection K de Δ sur Y.

D'après [Slodowy 3], si $\tilde{f}$ est le relèvement de f au revêtement $\tilde{X}$ de X ramifié sur A, le groupe $\mathbb{Z}/2$ agit naturellement sur un déploiement miniversel (restreint) $\tilde{F}$ de $\tilde{f}$, et $\Delta(f,A)$ est le quotient de $\Delta(\tilde{f})$.

[Duc et Dai 1] ont démontré que $\Delta(f,A)$ (resp. K) est le résultat d'une projection legendrienne (resp. lagrangienne) stable d'un *couple* de sous-variétés de Legendre (resp. Lagrange) de $J^1(Y)$ (resp. T^*Y), en "interaction" régulière. Soient L et L_1 deux legendriennes (resp. lagrangiennes) d'une variété de contact de dimension $2n+1$ (resp. symplectique de dimension $2n$). On dit qu'elles sont en *interaction régulière* (au sens de Bott et Kashiwara) le long de leur intersection ℓ, si ℓ est une sous-variété de dimension $n-1$ et si $T(\ell) = T(L)_{|\ell} \cap T(L_1)_{|\ell}$. Soit A une hypersurface de X, et soient Z le produit $X\times Y$ et Z_1 le produit $A\times Y$; on note J (resp. J_1) la sous-variété (involutive) de $J^1(Z)$ (resp. $J^1(Z_1)$) formée par les jets des fonctions constantes sur les fibres de $J^0(Z) \longrightarrow J^0(Y)$ (resp. $J^0(Z_1) \longrightarrow J^0(Y)$), et $\hat{J}_1$ l'image réciproque de J_1 par la "restriction" $J^1(Z) \longrightarrow J^1(Z_0)$. Une fonction numérique φ sur Z est *transverse* (au couple (X,A)) si la variété $\tilde{G}$ de ses jets d'ordre 1 est transverse à $J \cap \hat{J}_1$; dans ce cas φ et $\varphi_1 = \varphi_{|Z_1}$ sont les potentiels (transverses) générateurs de deux legendriennes (resp. deux lagrangiennes) L et L_1 de $J^1(Y)$ (resp. V et V_1 de T^*Y) (cf. § 3) qui se trouvent en interaction régulière. On dit que φ est le *potentiel* (générateur) des couples.

Les *lieux critiques, contours apparents, caustiques, isomorphismes, équivalences, équivalences morales, équivalences stables*, se définissent comme au § 3. La *stabilité* d'un couple au dessus de Y se définit comme au § 4. La *caustique* est constituée de trois parties : les ensembles critiques des projections lagrangiennes des deux composantes en interaction, et la projection de leur intersection.

THÉORÈME 10 ([Duc et Dai]).— *Un germe de couple lagrangien (resp. legendrien) en interaction régulière dans T^*Y (resp. $J^1(Y)$) est toujours engendré par un potentiel. Deux germes de projections lagrangiennes (resp. legendriennes) de couples (réguliers) sont isomorphes si et seulement si leurs potentiels sont stablement moralement équivalents (resp. stablement équivalents). Un germe de couple (régu-*

lier) lagrangien $T^*Y \supset (V,V_1) \longrightarrow Y$ *(resp. legendrien* $J^1(Y) \supset (L,L_1) \longrightarrow Y$ *) est stable si et seulement si son potentiel* $\varphi : (X,A) \times Y \longrightarrow (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ *donne lieu à un déploiement versel (resp. déploiement versel pour les niveaux),* $\hat{F} : X \times Y \times (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \longrightarrow Y \times (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$, $\hat{F}(x,y,\lambda) = (y,\lambda,\varphi(x,y) - \lambda)$, *de la singularité "à bord" source de* φ, $f = \varphi_{|X \times \{0\}}$.

Exemple.— X une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$, A une courbe lisse sur X, le faisceau des normales de X et celui de A (cf. exemple 1, § 2) forment un couple lagrangien en interaction régulière de $T^*\mathbb{R}^3$. Le potentiel est à nouveau le carré de la distance sur $X \times \mathbb{R}^3$; la caustique est celle qu'on observe à partir d'une source de lumière sur X, et d'un fil A encore plus brillant, que l'on enroule sur X.

La définition des projections *simples* des couples en interaction régulière est analogue à celle des singularités lagrangiennes et legendriennes simples (donnée au § 4). Les couples (réguliers) *simples* et *stables* sont ceux qu'on obtient à partir des déploiements versels des singularités à bord "simples".

THÉORÈME 11 ([Arnold 3]).— *Tous les germes de fonctions simples relativement à un bord sont stablement équivalents aux germes en* $x = y = 0$ *des fonctions suivantes sur* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{C}^2$*), avec le bord* $x = 0$, B_k, $k \geq 2$, $f(x,y) = \pm x^k \pm y^2$; C_k, $k \geq 3$, $f(x,y) = xy \pm y^k$; *et* F_4, $f(x,y) = \pm x^2 + y^3$.

THÉORÈME 12 ([Arnold 3] modulo [Duc et Dai]).— *Si* $\ell \leq 4$, *les projections simples et stables de couples sur* $\mathbb{R}^\ell$ *sont génériques (ce sont* B_2, B_3, B_4, C_3, C_4, F_4).

La démonstration du théorème 11 est un calcul en quasi-homogène (suites spectrales, cf. [Arnold 2,3,14]). [Matov] a mené à bout la classification des singularités à bord unimodales et bimodales. De même qu'Arnold avait su classer les singularités sans bord unimodales et bimodales (cf. [Arnold-Husein-Zade-Varchenko]).

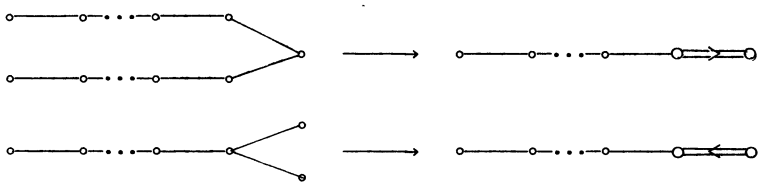
THÉORÈME 13 ([Arnold 3] et [Slodowy 1,2]) (On suppose la dimension de X impaire).— *Soient* $f : (A,X) \longrightarrow \mathbb{C}$ *un germe analytique complexe* simple relativement à A *de type* B_μ *ou* C_μ *(resp.* F_4 *),* $O \in Y \subset \mathbb{C}^{\mu-1}$ *la base d'un déploiement miniversel restreint de* f, *et* $\Delta \supset Y \times \mathbb{C}$ *le discriminant de* (f,A), *il existe un biholomorphisme de* $Y \times \mathbb{C}$ *sur un voisinage de* O *dans* $\mathbb{C}^\mu$ *qui transporte* Δ *sur le discriminant du groupe de Coxeter* B_μ *(ou* C_μ *) (resp.* F_4).

Remarque.— Les *caustiques* B, C, F sont les "contours" $K(B,C,F)$ des projections de $\Delta(B,C,F)$ suivant la direction de l'invariant a_μ de plus haut degré du groupe (cf. § 5).

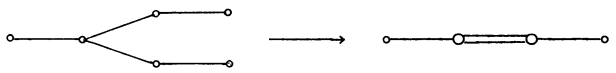
Exemple.— B_μ agit sur $\mathbb{C}^\mu$ par permutation des coordonnées $(z_1,\ldots,z_\mu)$ et changement de signe $z_k \longrightarrow -z_k$, $k = 1,\ldots,\mu$. Ses invariants sont les fonctions sy-

métriques élémentaires des z_k^2 . $\mathbb{C}^\mu/B_\mu$ s'identifie à l'espace des polynômes moniques de degré μ en une variable, et $\Delta(B_\mu)$ est constitué par l'image des miroirs $z_k = 0$, polynômes dont 0 est racine, et l'image des miroirs $z_i = \pm z_j$, polynômes ayant une racine double $(z_i^2 = z_j^2)$. Or le déploiement miniversel de $x^\mu + y^2$ est donné par $\hat{\varphi}(x,y,a) = x^\mu + y^2 + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1}x + a_\mu$. Son discriminant est exactement $\Delta(B_\mu)$.

Les cas B_μ et C_μ se distinguent si l'on tient compte des graphes de Dynkin associés à l'action de la monodromie sur le groupe d'homologie des cycles évanescents antiinvariants des revêtements doubles ramifiés $\tilde{Z}_s$ (cf. [Arnold 3]). Le graphe de B_μ (resp. C_μ) s'obtient comme quotient du graphe de $A_{2\mu-1}$ (resp. $D_{\mu+1}$),



Celui de F_4 est quotient de celui de E_6 ,



(voir [Slodowy 1,2]).

Remarque.— Le graphe de G_2 est un quotient de celui de D_4 . On le retrouve avec les singularités invariantes par $\mathfrak{S}_3$ (cf. [Slodowy 3]) (regarder les symétries de la figure 18).

La singularité B_μ (resp. C_μ) induit une singularité $A_{\mu-1}$ (resp. A_1) sur l'espace ambiant X et une singularité A_1 (resp. $A_{\mu-1}$) sur le bord A . La singularité F_4 induit A_2 sur X et A_2 sur A . O.P. Scherback (cf. [Arnold 4]) a découvert une dualité remarquable sur les types stables des singularités à bord : si $f(x,y)$ est un germe en 0 de fonction sur le couple $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1})$ (y est un système de coordonnées sur le $\mathbb{R}^{n-1}$ d'équation $x = 0$), la fonction $f^*(z,x,y) = zx + f(x,y)$ sur $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ ((x,y) coordonnées sur le $\mathbb{R}^n$ d'équation $z = 0$) a une singularité ambiante (resp. bord) stablement équivalentes à la singularité bord (resp. ambiante) de f . Ainsi $B_\mu = C_\mu^*$, $C_\mu = B_\mu^*$ et F_4 est autoduale (comme son polytope).

Dans le domaine réel, on voit la différence entre B_μ et C_μ sur les dessins si l'on se restreint à l'une des deux parties de X séparées par A (singularités à bord au sens propre).

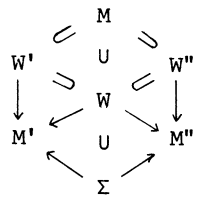
Exemples ([I.G. Scherback]).— X est une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$, dont le bord est la courbe lisse A, on regarde la caustique "jointe" de l'application normale de (X,A). La caustique K de source X (cf. exemple 1, § 3, et § 4) est le lieu des centres de courbures principales de la surface X (cf. [Hilbert et Cohn Vossen]) ; la caustique K_1 de source A est le lieu des axes de courbure (ou axes polaires) de la courbe gauche A ; l'intersection des fibrés normaux NX et NA se projette sur k, le lieu des normales à X le long de A ; $k \cup K \cup K_1$ forme la *caustique jointe* Φ de source (X,A) (ou ensemble focal de (X,A)). En un point général de k, Φ est une caustique de type B_2 (figure 36), en un point général de $k \cap K_1$, Φ est du type C_3 (figure 37), en un point général de $k \cap K$, Φ est du type B_3 (figure 38). On trouve B_4 (resp. C_4) en un point de $k \cap K$ (resp. $k \cap K_1$) où K (resp. K_1) est de type A_3 (figure 39 (resp. 40)). Enfin on trouve génériquement F_4 en un point de $k \cap K \cap K_1$ (figure 41).

9. L'obstacle, l'icosaèdre et la queue d'aronde ouverte

Considérons une sous-variété X de codimension 1 d'un espace euclidien Y de dimension n, et, sur X, une sous-variété Z. Nous nous proposons d'étudier le lieu des points de Y que la lumière peut atteindre à partir de Z au bout d'un temps donné, sans jamais traverser X (autrement qu'en la rasant). (Construction des *développantes généralisées* de X). Autrement dit : trouver les chemins les plus courts menant à Z dans Y en contournant X, et les mesurer. C'est le *problème de l'obstacle* de [Arnold 5] et [Platonova 3], c'est aussi le problème des *lignes géodésiques généralisées* de [Caratheodory] (cf. §§ 342 à 356).

La situation se laisse décrire précisément en géométrie de contact. Notons M la variété de contact de tous les éléments de contact sur l'espace-temps $Y \times \mathbb{R}$, et W' la sous-variété de M des éléments de lumière (i.e. tangents aux cônes de lumière) (les unités sont choisies pour que $c = 1$). Le quotient de W' par son feuilletage caractéristique ξ' est une variété de contact M' (qui s'identifie à $P^*(Y)$ par choix d'une section du genre espace). Nous noterons p' la projection de W' sur M'. Soit W'' la sous-variété de M, des éléments qui s'appuient sur les points de $X \times \mathbb{R}$, hormis les hyperplans tangents à $X \times \mathbb{R}$; notons ξ'' le feuilletage caractéristique de W'', M'' le quotient de W'' par ξ'', et p'' la projection de W'' sur M'' (M'' s'identifie naturellement à $P^*(X \times \mathbb{R})$, et p'' est l'opération de trace). La variété notée W sera l'intersection de W' et de W''. La restriction de p'' à W possède un pli ordinaire le long d'une sous-variété Σ ; l'image $\Sigma'' = p''(\Sigma)$ s'identifie à la variété des éléments de lumière sur $X \times \mathbb{R}$. Remarquons que Σ est aussi le lieu singulier de la restriction de p' à W. Nous noterons ξ le feuilletage caractéristique de Σ'' dans M''. Les lettres $(M, W', M', \Sigma, M'', W'')$ sont les sommets de l'*hexagone de contact* du

du problème d'obstacle X et W est son centre ([Arnold 5,15]).



A partir de $Z \subset X$, nous pouvons définir une variété de Hamilton-Jacobi $\ell" \subset \Sigma"$ relative à X (cf. § 2, ex. 3) ; c'est la réunion des orbites de ξ passant par les éléments de lumière de $X \times \mathbb{R}$ tangents à $Z \times \{0\}$. La variété $\ell"$ est une sous-variété legendrienne de $M"$. Les orbites de ξ contenues dans $\ell"$ relèvent les rayons de lumière émis par Z qui glissent sur X, leurs projections dans X forment la famille $\chi"$ des géodésiques de X normales à Z.

Soit $L"$ la variété legendrienne de M située dans $W"$ au-dessus de $\ell"$. La partie ℓ de $L"$ contenue dans W est une sous-variété de codimension 1 de $L"$: W' et $L"$ ont un contact quadratique le long de ℓ. La réunion L' des feuilles de ξ' passant par ℓ est "legendrienne" ([Carathéodory]), mais en général, ce n'est pas une sous-variété de M, elle a des *singularités* ([Arnold 5, 8, 9]). Ses singularités proviennent des points de W où la restriction de p' à W attrape une singularité plus compliquée qu'un pli. Génériquement (sur X) $p'|W$ possède des singularités de Morin Σ'_k, d'ordre k avec $k \leq n$ (cf. [Morin]). Les orbites de ξ' dans L' se projettent dans Y sur la famille χ' des droites tangentes aux lignes de $\chi"$; une singularité Σ'_k de $p'|W$ correspond à un contact d'ordre $k+1$ entre une droite de χ' et l'hypersurface X.

Les courbes de classe C^1 constituées de morceaux dans $\chi"$ et de morceaux dans χ' sont des *géodésiques de Y sous la contrainte d'éviter X*. L'ensemble L' est la *variété de Hamilton-Jacobi* du problème d'obstacle X (et de source Z) ; son image dans $Y \times \mathbb{R}$ est le "*graphe du temps*". L'ensemble Γ_τ, image par $W' \to P^*(Y)$ de la section de L' au temps τ s'appelle *variété réduite au temps τ* et sa projection dans Y est le *front d'onde* (au temps τ). Ces fronts sont les *développantes* de X (à partir de Z). La projection de L' sur T^*Y est le *faisceau des tangentes* T à la famille $\chi"$, les valeurs singulières de $T \to Y$ forment la *caustique* du problème d'obstacle. La projection ℓ' de L' dans la variété de contact M' est une legendrienne (éventuellement singulière), nous l'appellerons *variété de Huygens* du problème d'obstacle.

Regardons d'abord ce qui arrive à la famille R des variétés réduites dans P^*Y en un point où X et $\chi"$ ont un contact d'ordre $k+1$ générique. Notons R^o_s la section au temps s de $\ell"$, Z^o_s la projection de R^o_s dans X, R^t_s la section au temps $\tau = s+t$ de L' et Z^t_s la projection de R^t_s dans Y. Pour s

et t assez petits, chaque Z_s^t est une variété lisse de codimension 2 de Y, contenue dans une développante de X. La réunion des éléments de contact de Y tangents aux Z_s^t forme une sous-variété à bord Θ de P^*Y de dimension $n+1$, qui contient à la fois R et la variété $\tilde{X}$ des espaces tangents à X.

THÉORÈME 14 ([Arnold 3]).- *Soit* 0 *un point de* X *où l'arc* OP *de* χ' *issu de* 0 *a un contact d'ordre* $k+1$ *générique avec* X, *soit* $\tilde{0} \in \tilde{X} \subset P^*Y$ *l'espace tangent à* X *en* 0 ; *le germe de* $R \cup \tilde{X}$ *en* $\tilde{0}$ *dans* Θ *est isomorphe au produit par* $\mathbb{R}^{n-k}$ *de la partie réelle du discriminant de* C_{k+1}.

Indication.- Tout d'abord, on passe dans le domaine complexe, après s'être ramené à un modèle algébrique. Les droites pointées (par M) MQ voisines de OP coupent X en $k+1$ points $M_1,\ldots,M_{k+1}$; les fonctions symétriques des $k+1$ nombres complexes qui repèrent ces points par rapport à M définissent une submersion de Θ sur l'espace $\mathbb{C}^{k+1}$ des polynômes moniques de degré $k+1$, et $\tilde{X}$ s'en va sur les polynômes ayant une racine nulle, et R s'en va sur les polynômes ayant une racine multiple (cf. exemple après le théorème 13, § 8).

Le problème de l'obstacle le plus simple concerne une courbe X dans un plan euclidien Y, la famille χ'' se réduit à X et χ' est la famille des droites tangentes à X (ici $\Theta = P^*Y$). Près d'un point O où X est convexe, chaque développante se relève en une courbe lisse (une variété R_τ) dans P^*Y (du type (t,t^2,t^3)), et R est une surface qui a un contact quadratique le long de X avec $\tilde{X}$. Mais près d'un *point d'inflexion* ordinaire (type $y = x^3$), les relevées R_τ des développantes ne sont plus lisses, la variété de Huygens est une courbe (t^2,t^3,t^5) (en O dans $\mathbb{R}^3$), ce qui explique le *bec d'aigle* $(y^5 + x^2 = 0)$ (figure 6) des fronts voisins de O et la singularité $(y^5 + x^3 = 0)$ du front passant par le point d'inflexion (figure 42).

THÉORÈME 15 ([O.P. Scherback 1]).- *En un point d'inflexion ordinaire, le germe du graphe du temps est isomorphe au discriminant du groupe de l'icosaèdre* H_3 (*figure* 44).

La démonstration ne dit pas vraiment pourquoi : on part d'une développante A (du type $y^5 + x^2 = 0$) proche de O, les autres développantes de X sont ses parallèles ; Scherback constate que le "graphe du temps" au dessus d'un voisinage Y_0 de O est engendré par un potentiel φ sur $Y_0 \times A$, le carré de la distance (cf. § 3). Or [Lyashko 2] connait cette situation puisqu'il a su étendre la théorie des singularités à bord aux germes de fonctions sur les hypersurfaces à point singulier isolé ; il étudie les fonctions modulo changements de coordonnées qui laissent globalement invariante une hypersurface singulière A, et lorsque A est de type A_4, $y^5 + x^2 = 0$, on voit apparaître (entre autre) une singularité unimodale de multi-

plicité 3 dont le déploiement miniversel est

$$\psi = x + \varepsilon y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0 \qquad (\varepsilon \neq 0).$$

Son discriminant est analytiquement trivial le long de la strate μ constant, et une section transverse à cette strate est le discriminant $\Delta(H_3)$. [O.P. Scherback 1] montre que le potentiel φ s'obtient à partir de ψ en remplaçant ε par une fonction de $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ (cf. § 4), d'où etc...

En formules ([Lyashko 2]), le groupe H_3 agissant sur $\mathbb{C}^3$ possède un anneau d'invariants engendrés par trois polynômes en trois variables, a de degré 2, b de degré 6, et c de degré 10 ; et le discriminant $\Delta(H_3)$ a pour équation

$$c^3 = (65\,ba^2 + 32\,a^5)c^2 - (90\,b^3a + 795\,b^2a^4 + 1600\,ba^7)c + 27\,b^5 + 430\,b^4a^3 + 2275\,b^3a^6 + 4000\,b^2a^9 .$$

Remarque.— [Lyashko 2] démontre que les discriminants des groupes diédraux $I_2(k)$ surgissent des fonctions sur les hypersurfaces de type A_{k-1}, $xy = z^k$, avec les germes unimodaux de déploiement

$$x + z^2 + \varepsilon y + \lambda_1 z + \lambda_0 \qquad (\varepsilon \neq 0).$$

Venons-en aux singularités des variétés de Huygens ([Arnold 5,8,9,15], [Guivental 1,2]).

Appelons *triade de contact* (resp. *triade symplectique*) (Σ,V,ℓ) la donnée d'une hypersurface Σ d'une variété de contact M, transverse à la structure de contact F (resp. d'une variété symplectique M), et d'une sous-variété legendrienne (resp. lagrangienne) lisse V de M qui coupe Σ le long d'une variété lisse ℓ de codimension 1 dans V, avec un *contact quadratique* non dégénéré (on a $T(V)_{|\ell} \subset T(\Sigma)_{|\ell}$). La *variété engendrée* par la triade est la projection $\overline{\ell}$ de ℓ dans le quotient $\overline{M}$ de Σ par son feuilletage caractéristique.

Le problème d'obstacle (Y,X,Z) a produit la triade de contact (W',L',ℓ) dans $J^1(Y)$, la variété engendrée est la variété de Huygens. De même, en "oubliant le temps", on récupère une triade symplectique dans T^*Y.

Exemple ([Arnold 9]).— X est une surface plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et Z est une courbe tracée sur X, χ' est la famille des géodésiques orthogonales à Z ; génériquement il existe une courbe C de X où les directions de χ deviennent des directions asymptotiques, la variété de Huygens engendrée en un de ces points sera un cylindre sur un cusp. Génériquement, sur C il y aura des points isolés où la direction de χ' deviendra tangente à C (points biasymptotiques), alors le front sera un $\Delta(H_3)$ ([O.P. Scherback 1]), et la variété de Huygens engendrée sera une *queue d'aronde ouverte* dans $\mathbb{R}^5$ (figure 45), difféomorphe à la surface Σ^2 dans $\mathbb{R}^4$ formée par les polynômes $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui ont au moins une racine triple.

Disons qu'un germe en 0 de triade (Σ,V,ℓ) (symplectique dans $\mathbb{R}^{2n}$ ou de contact dans $\mathbb{R}^{2n+1}$) est *générique d'ordre* k si les directions caractéristiques de Σ le long de ℓ (au voisinage de 0) sont tangentes aux fibres d'une application de V dans $\mathbb{R}^{n-1}$ dont la restriction à ℓ possède une singularité de Morin Σ^1_k en 0 . (On a $k \leq n$).

THÉORÈME 16 ([Guivental 2], [Arnold 8]).— *Tous les germes de triades symplectiques (resp. de contact) génériques d'ordre* k , *dans* $\mathbb{R}^{2n}$ (*resp.* $\mathbb{R}^{2n+1}$), *sont isomorphes symplectiquement (resp. par transformation de contact) à la triade standard* $\tau_{k,n}$ *que voilà. En symplectique, avec les coordonnées de Darboux* $(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)$, V *est donnée par* $p = 0$, ℓ *par* $p = 0$ *et* $q_n = 0$, *et* H *par*

$$\frac{1}{2} q_k^2 + p_k q_{k-1} + \dots + p_2 q_1 + p_1 = 0 .$$

En contact, prendre les mêmes équations, avec les coordonnées de Darboux $(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n,z)$.

Remarque.— Si l'on cherche les invariants symplectiques de l'ensemble de la situation qui provient d'un problème d'obstacle, $W' \subset J^1(Y) \supset J^1_X(Y) \supset J^1(X) \supset \Sigma''$, on tombe vite sur des modules analytiques et C^∞ (voir [Melrose 1,2], [Arnold 5]).

Les triades standard sortent tout droit de la théorie des *invariants des formes binaires* (cf. [Schur et Grunsky], [Springer] et [Guivental 1]).

Notons S_m l'espace vectoriel des formes homogènes de degré m en 2 variables (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$f(a;x,y) = \sum_0^m \binom{m}{k} a_k x^{m-k} y^k$$

Le groupe SL_2 agit sur S_m ; si $g \in SL_2$, $f(a;x,y) \in S_m$, $(x',y') = g(x,y)$, l'image de f par g est $f(a^g;x,y)$ où $f(a^g;x',y') = f(a;x,y)$.

Un *invariant* de S_m est un polynôme P en $(a_0,\dots,a_m)$ tel que $P(a_0^g,\dots,a_m^g) = P(a_0,\dots,a_m)$, pour tout g dans SL_2 .

La *forme apolaire* (invariant linéo-linéaire) A sur S_m est la forme bilinéaire suivante :

$$A(f(a;x,y),f(a';x,y)) = \sum_0^m (-1)^k \binom{m}{k} a_k a'_{m-k} .$$

C'est une forme symplectique si m est impair et une forme symétrique inversible si m est pair. Elle est la seule forme invariante par l'action naturelle de SL_2 (à un multiple près).

Supposons $m = 2n+1$. Notons ε le champ d'Euler sur S_m , son flot transforme a_k en $t^m a_k$, le quotient M de S_m par ε possède une structure de contact F invariante par SL_2 ,

$$\Sigma(-1)^k \binom{m}{k} (a_k d(a_{m-k}) - a_{m-k} d(a_k)) = 0 .$$

Le flot (horocyclique) η (qui transforme x en $x+ty$, et qui ne bouge pas y) agit sur M en respectant F ; son équation :

$$\frac{da_k}{dt} = k a_{k-1} .$$

Notons $f'_x \in S_{m-1}$ la dérivée de f par rapport à x. Soit Σ l'hypersurface de M où η est tangent à F, son équation est

$$A(f'_x, f'_x) = 0 .$$

Exemples.— Si $m = 5$, $a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = 0$ (l'invariant de degré 2 de S_4), si $m = 7$, $a_0a_6 - 6a_1a_5 + 15\,a_2a_4 - 10\,a_3^2 = 0$ (l'invariant de degré 2 de S_6).

La sous-variété V dans S_m des multiples de x^{n+1}, est une legendrienne tangente à Σ, avec contact quadratique non dégénéré, le long de la sous-variété ℓ des multiples de x^{n+2}. La triade (Σ, V, ℓ) est la triade standard $\tau_{n,n}$.

ICONOGRAPHIE

Les figures 1 et 2 sortent du livre [Bernoulli], tab. LX, fig. 65 et tab. LXIX, fig. 130 ; les figures 3, 4 et 5 du livre [Huygens 2], p. 123 & 124, 119 & 121, 17 & 19. La figure 6 se trouve dans [L'Hospital], pl. 7, fig. 91, et la figure 7 dans [O.P. Scherback 1]. La figure 8 provient de L. de Vinci, Cod. Arundel, fol. 85, British Museum (voir aussi fol. 87 et verso). La figure 9 est la fig. 38, p. 35 de [Dürer]. La figure 10 est la fig. 39, p. 66 de [Weyl]. La figure 11 est composée de la fig. 31, p. 147 de [Dürer] et d'une illustration faite par L. de Vinci pour le traité de L. Pacioli, De divina proportione, Venise, 1509. La figure 12 reproduit un dessin de A. Dürer de 1506 (Gewandstudie, Vienne, Albertina), et la figure 13, une étude de L. de Vinci (British Museum). La figure 14 est composée d'une figure de [Arnold 4] et d'un bout de la fig. 59, p. 179 de [Dürer]. La figure 15 est celle de [L'Hospital], pl. 6, fig. 73. Les figures 16 et 17 viennent du livre [Arnold 7]. La figure 18 sort de [Thom 1]. La figure 19 est un mélange de [Arnold 7] et [Thom 1]. La figure 20 est tirée de [Coxeter-Moser], la figure 21 reproduit la planche du livre de Kepler, Mysterium cosmographicum, Tubingen, 1596. La figure 22 réunit les fig. 20, 22 et 24 de [Fejes-Toth]. La figure 23 est un tableau de [Coxeter-Moser]. Les figures 24 et 25 viennent de [Coxeter 2], (7.2.A,B,C et 8.2.A). La figure 26 est la page de garde de [Coxeter 2], c'est un dessin de Van Oss. La figure 27 est la fig. 22.3.b de [Coxeter 1], c'est un dessin de B.L. Chilton. La figure 28 vient de [Arnold 6], et la figure 29 de [Arnold 7]. La figure 30 est un croquis de L. de Vinci (perspective). Les figures 31 et 32 sont des figures du livre [Thom 1], et la figure 33 est une figure de [Arnold 6]. La figure 34 est extraite de [Bruce 1], la figure 35 de [Arnold 4] (dessin de Scherback). Les figures 36, 37, 38, 39, 40, 41 proviennent de [Arnold 7]. La figure 42 est constituée de la fig. 71, pl. 6 de [L'Hospital] et de la fig. 1 de [O.P. Scherback 1]. La figure 43 vient de [Arnold 4], la figure 44 de [O.P. Scherback 1], et la figure 45 de [Guivental 1].

fig. 1

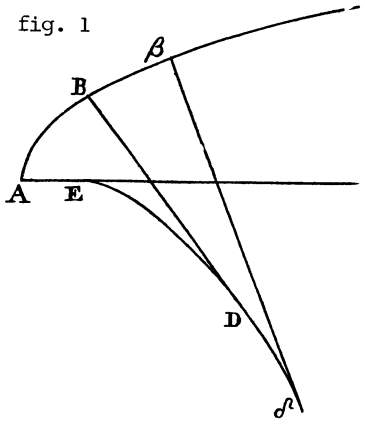
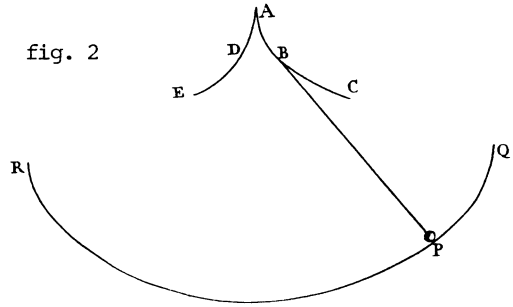


fig. 2



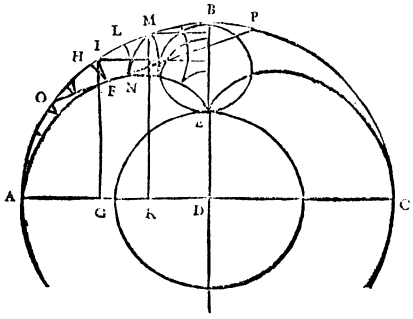


fig. 3

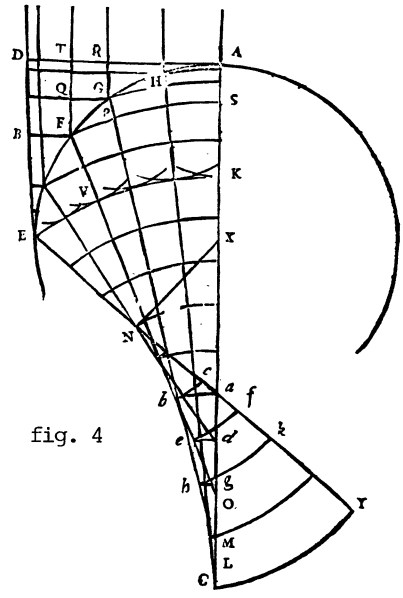


fig. 4

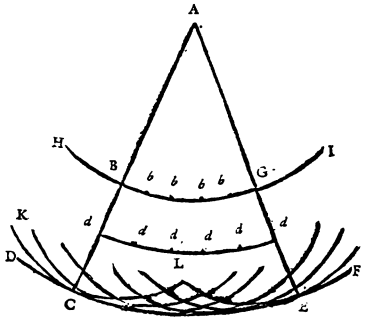


fig. 5

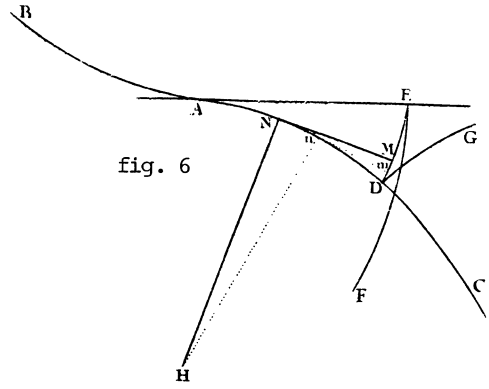


fig. 6

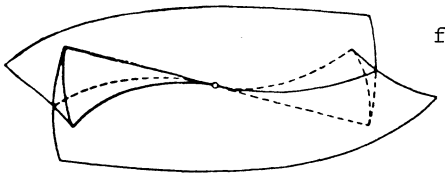


fig. 7

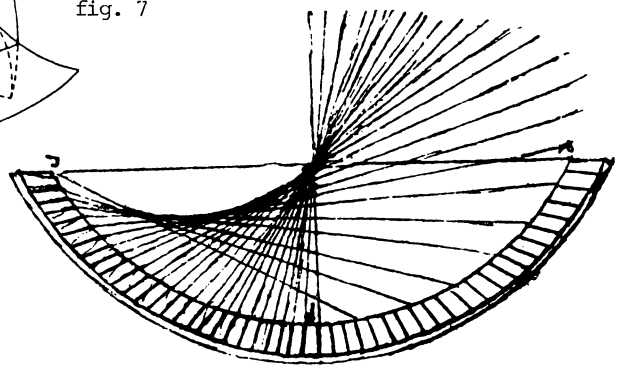


fig. 8

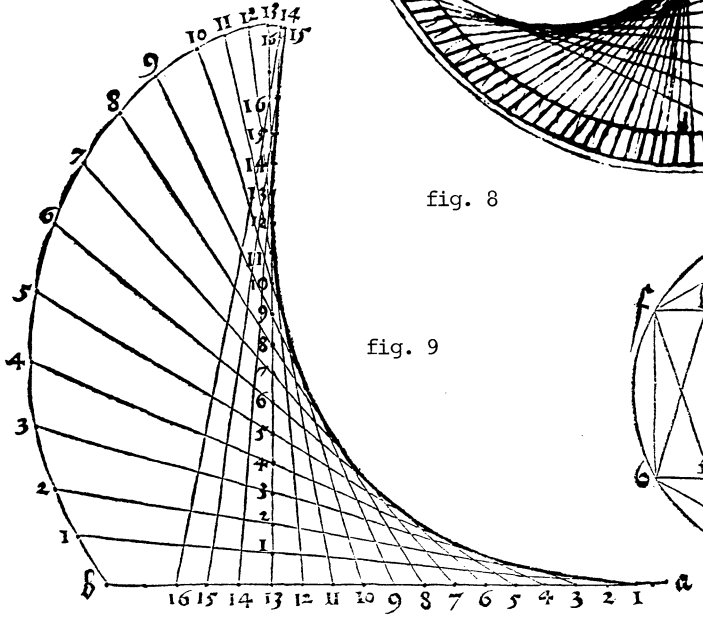


fig. 9

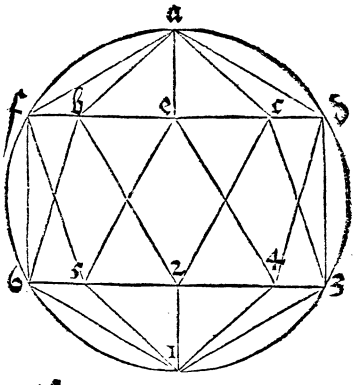
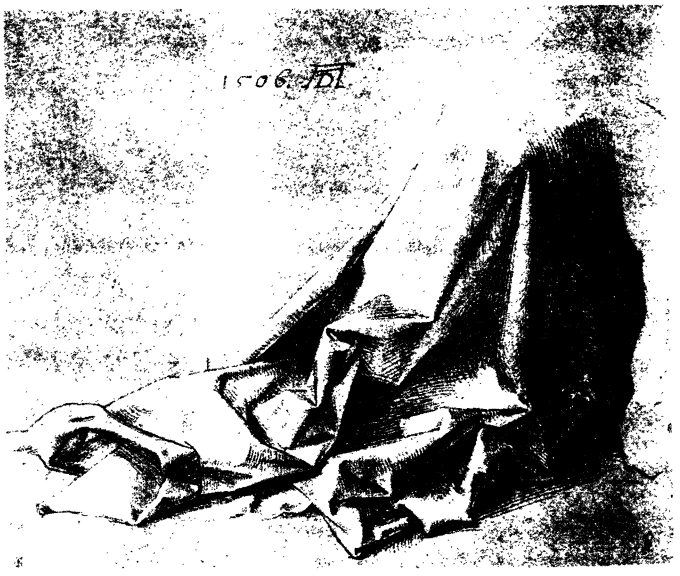


fig. 11



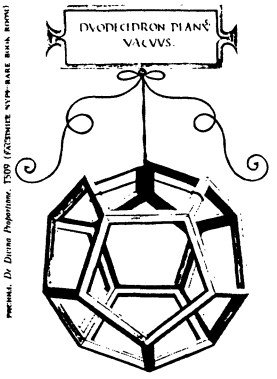


fig. 12

fig. 13

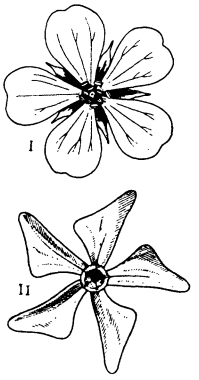


fig. 10

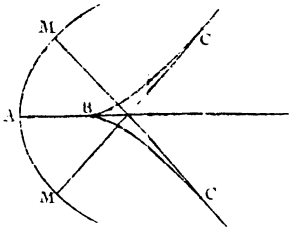


fig. 15

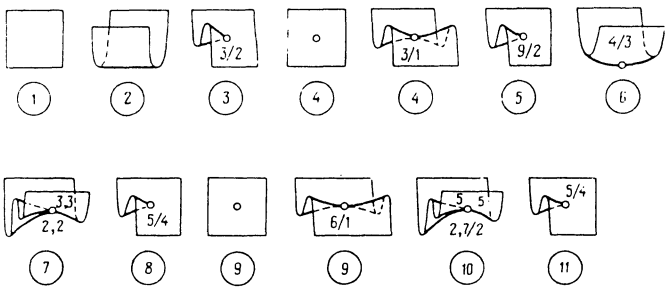


fig. 14

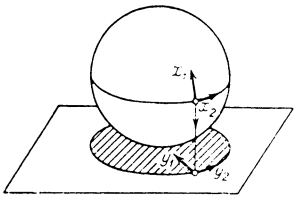
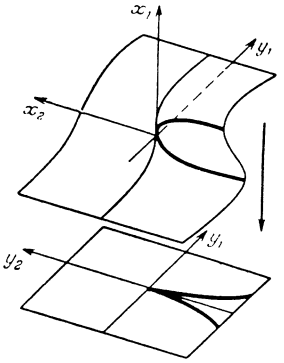


fig. 16



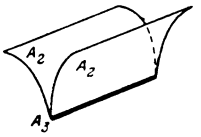


fig. 17

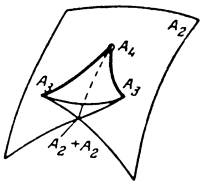
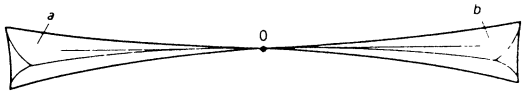


fig. 18



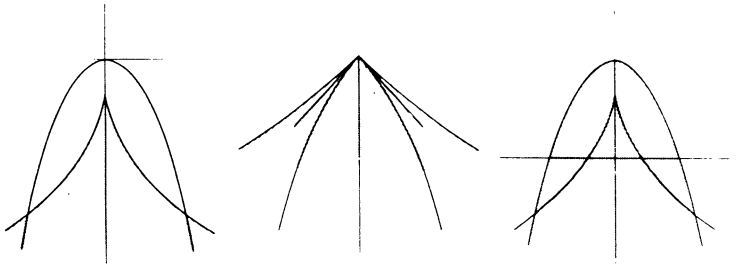
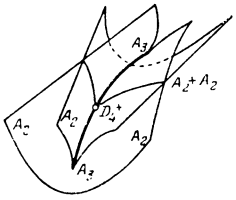


fig. 19



w>0 w=0 w<0

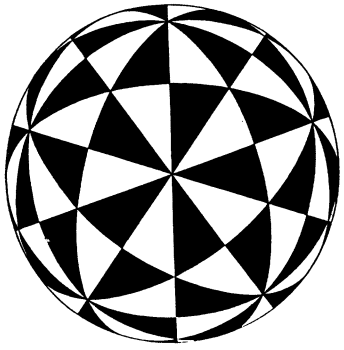


fig. 20

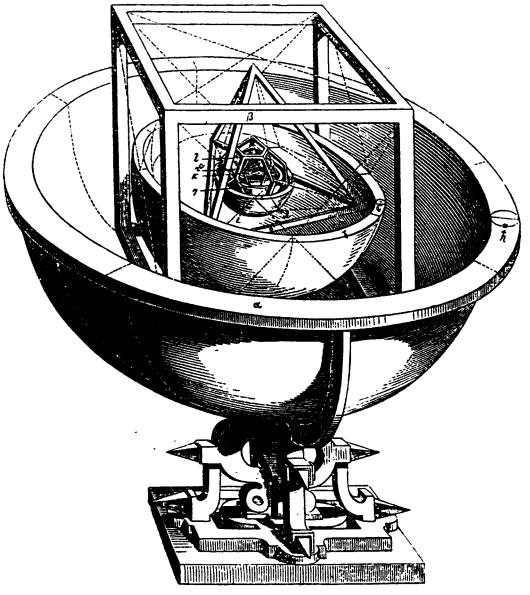
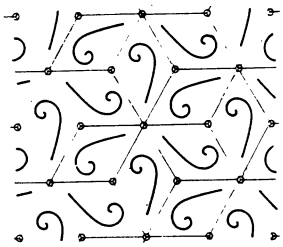
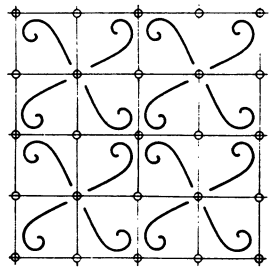


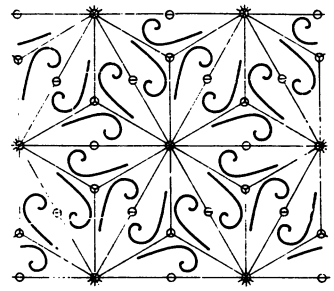
fig. 21



p3



p4



p6

fig. 22

Table *The irreducible finite groups of the form* $(R_i R_k)^{p_{ik}} = E$ $(p_{ii} = 1)$

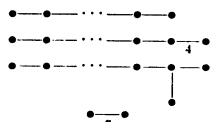
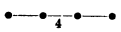
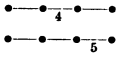
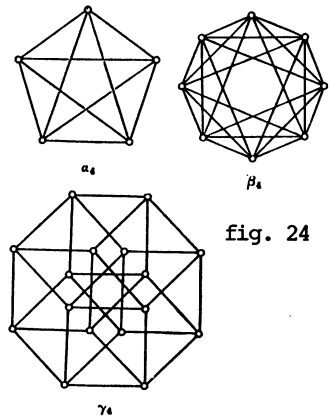
Graph	Number of generators (nodes)	Abbreviated symbol	Order	Order of Centre
	$n \geqq 1$	$[3^{n-1}]$	$(n+1)!$	1
	$n \geqq 2$	$[3^{n-2}, 4]$	$2^n n!$	2
	$n \geqq 4$	$[3^{n-3,1,1}]$	$2^{n-1} n!$	$(n, 2)$
	2	$[r]$	$2r$	$(r, 2)$
	3	[3, 5]	120	2
	4	[3, 4, 3]	1152	2
	4	[3, 3, 5]	14400	2
	6	$[3^{2,2,1}]$	51840 $= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	1
	7	$[3^{3,2,1}]$	2903040 $= 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	2
	8	$[3^{4,2,1}]$	696729600 $= 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	2

fig. 23



α_4 β_4 γ_4

fig. 24

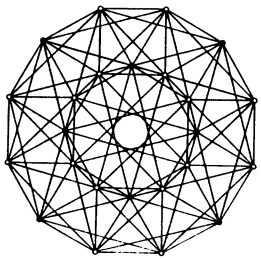


fig. 25

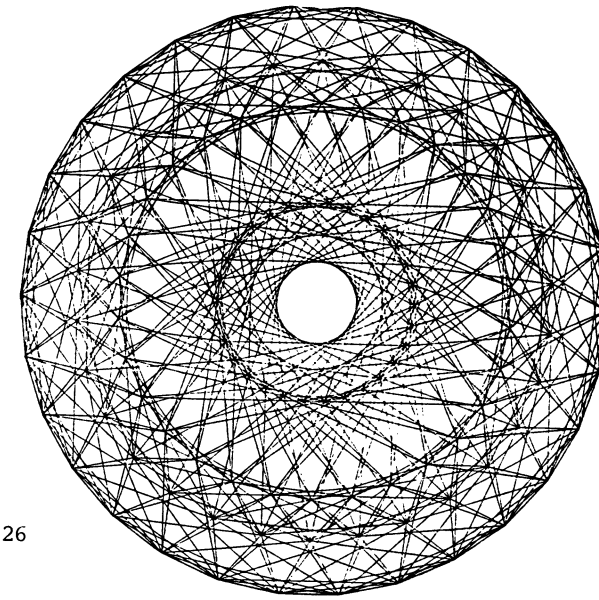


fig. 26

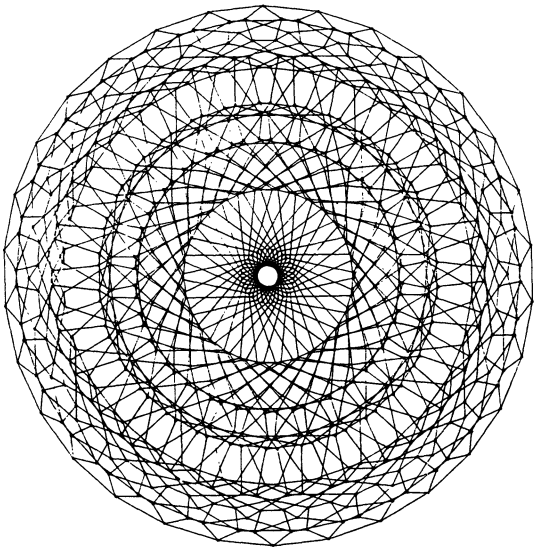
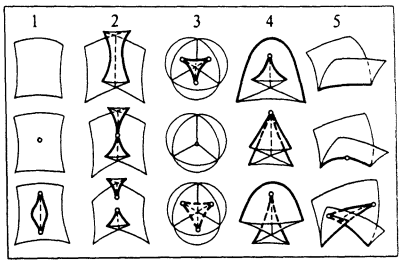


fig. 27

fig. 28



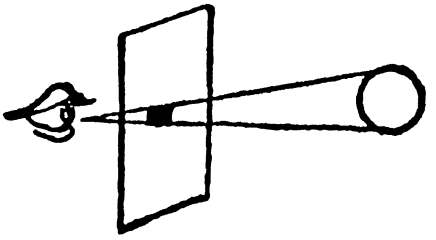
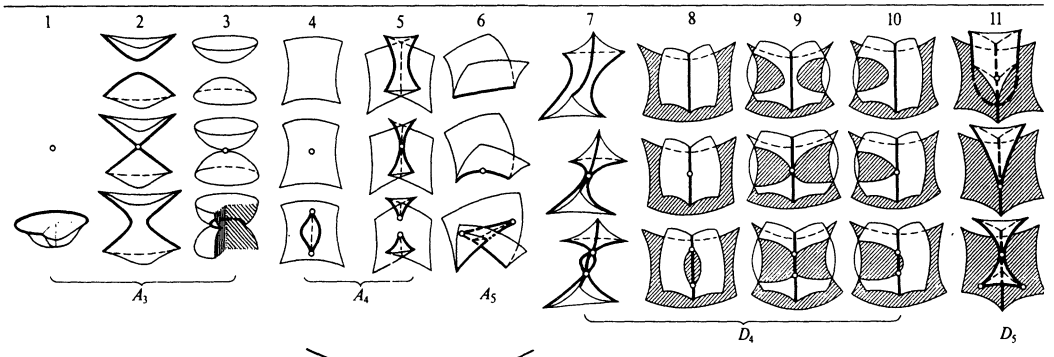


fig. 30

fig. 29



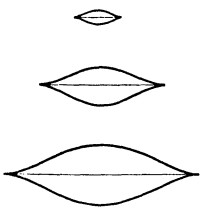


fig. 31

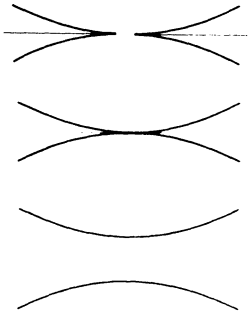


fig. 32

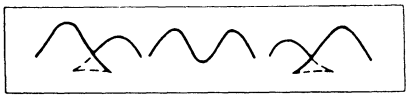


fig. 33

fig. 34

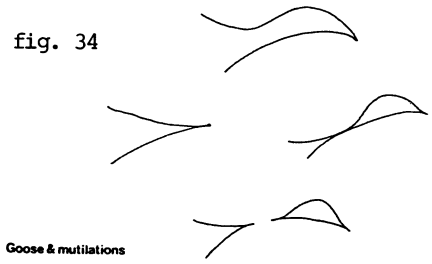


fig. 35

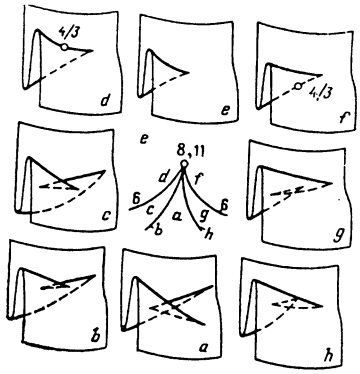
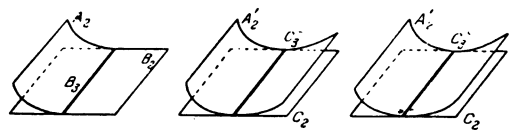
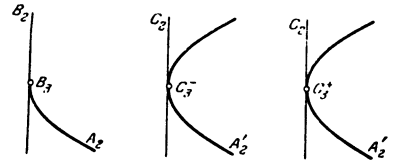
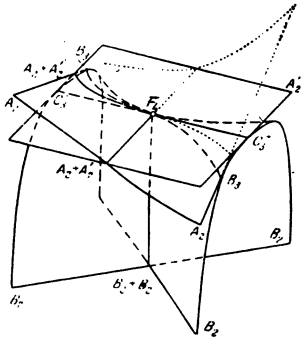


fig. 36, 37, 38







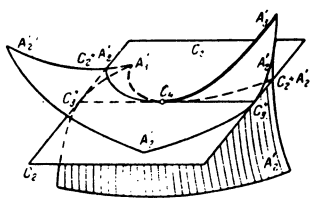


fig. 40

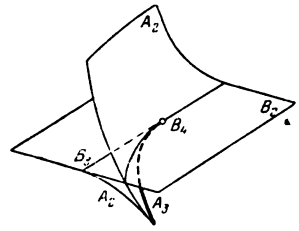


fig. 39

fig. 41

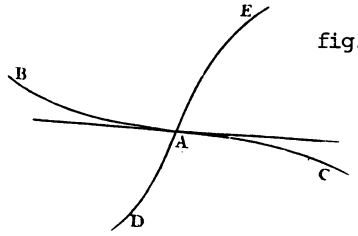
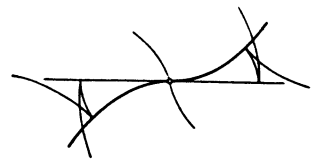


fig. 42



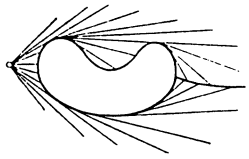


fig. 43

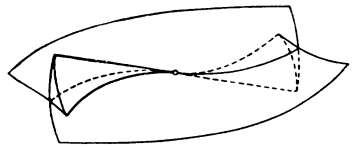


fig. 44

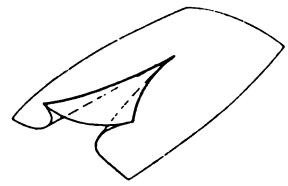


fig. 45

BIBLIOGRAPHIE

V.I. ARNOLD 1 - *Normal form for functions near degenerate critical points, the Weyl groups* A_k, D_k, E_k *and lagrangian singularities*, Funct. Anal. 27(1972), 254-272.

V.I. ARNOLD 2 - *Critical points of smooth functions and their normal forms*, Uspekhi Mat. Nauk 30(1975), 3-65. Russian Math. Surveys (n° 5), p. 1-75.

V.I. ARNOLD 3 - *Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups* B_k, C_k, F_4 *and singularities of evolutes*, Uspekhi Mat. Nauk 33(II) (1978), 91-107. Russian Math. Surveys (n° 5), p. 99-116.

V.I. ARNOLD 4 - *Singularities of systems of rays*, Uspekhi Mat. Nauk 36(1983).

V.I. ARNOLD 5 - *Singularities in variational calculus*, Itogi Nauki, Contemporary problems in mathematics 22(1983), 3-55 (en russe).

V.I. ARNOLD 6 - Catastrophe theory, Springer-Verlag, 1984.

V.I. ARNOLD 7 (avec A.N. VARCHENKO et S.M. HUSEIN-ZADE) - Singularities of maps, Nauka, Moscou, 1982 (en russe).

V.I. ARNOLD 8 - *Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle*, Ergodic theory and Dynamical systems 2(1982).

V.I. ARNOLD 9 - *Lagrangian manifolds with singularities, asymptotic rays, and the open swallowtail*, Funct. Anal. 15(1981), 235-246.

V.I. ARNOLD 10 - *Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups and singular projections of smooth surfaces*, Uspekhi Mat. Nauk 34(1979).

V.I. ARNOLD 11 - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, Moscou, 1974.

V.I. ARNOLD 12 - Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, MIR, Moscou, 1978.

V.I. ARNOLD 13 - *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*, Comm. on Pure and Appl. Math. 29(1976), 557-582.

V.I. ARNOLD 14 - *A spectral sequence for the reduction of function to normal forms*, Funct. Anal. 9(1975), 251-253.

V.I. ARNOLD 15 - *Singularities of ray-systems*, Comm. I.C.M. 1983, Varsovie.

M. ARTIN - *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. of Math. 88 (1966), 23-58.

J. BERNOULLI - Lectiones math. methodo integralium (transcrites par L'Hospital) , Paris, 1691.

N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981.

E. BRIESKORN 1 - *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Proc. I.C.M. Nice 2(1970), 279-284.

E. BRIESKORN 2 - *Über die Auflösung gewisser singularitäten von holomorphen Abbildungen*, Math. Annalen 166(1966), 76-102.

J.W. BRUCE 1 - *Seeing, the mathematical view-point*, Math. Intellig. 6(1984), 18-25.

J.W. BRUCE 2 - *Projections and reflections of generic surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Math. Scandinavia, 1984.

C. CARATHEODORY - *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster ordnung*, Teubner, Leipzig, u. Berlin, 1935.

A. CAYLEY 1 - *Memoirs on Quantics*, in Oeuvres complètes.

A. CAYLEY 2 - *On systems of rays*, Messenger of Math. 17(1888), 73-78.

A. CAYLEY 3 - *Memoirs on Caustics*, in Oeuvres complètes.

A. CHENCINER - *Singularités des fonctions différentiables*, Encycl. Universalis, 1984.

C. CHEVALLEY - *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. of Math. 77(1955), 778-782.

H.S.M. COXETER 1 - Introduction to Geometry, 2e édition, Wiley & Sonc, inc., 1969.

H.S.M. COXETER 2 - Regular polytopes, 2e édition, Dover, 1973.

H.S.M. COXETER and W.O.J. MOSER - Generators and relations for discrete groups, Ergebnisse 14, Springer-Verlag (4e édition), 1980.

M. DEMAZURE - *Classification des germes à point critique isolé et à nombre de modules 0 ou 1 (d'après V.I. Arnold)*, Sém. Bourbaki 1973-74, exp. 443, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 431(1975), 124-142.

N.H. DUC et N.Z. DAI - *Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples*, Note C.R.A.S., Paris, t. 291(1980), 113-116.

J.J. DUISTERMAAT 1 - *Oscillatory integrals, Lagrange immersions, and unfolding of singularities*, Comm. in Pure and Appl. Math. 27(1974), 207-281.

J.J. DUISTERMAAT 2 - *The light in the neighborhood of a caustic*, Sém. Bourbaki 1976-77, exp. 490, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 677(1978), 19-29.

A. DÜRER - *... Geometricarum libris...*, Paris, 1532.

P. DU VAL - *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 30(1934), 483-491.

L. FEJES-TOTH - *Reguläre Figuren*, Budapest, 1965.

T. GAFFNEY - *The structure of* TA(f), Proc. A.M.S. 401(1983), 409-427.

J. GUCKENHEIMER - *Catastrophes and PDE*, Ann. Inst. Fourier 23(1973), 31-59.

V. GUILLEMIN and S. STERNBERG - Geometric asymptotics, AMS Math. Surveys 14, 1977.

A.B. GUIVENTAL 1 - *Manifolds of polynomials having a root of fixed multiplicity, and the generalized Newton equation*, Funct. Anal. 16(1982), 10-14.

A.B. GUIVENTAL 2 - *Variétés lagrangiennes, singulières et* SL_2*-modules irréductibles*, Uspekhi Math. Nauk (1982), 109-110 (en russe).

A.B. GUIVENTAL and A.N. VARCHENKO - *Mapping of periods and intersection form*, Funct. Anal. 16(1982), 82-93.

W.R. HAMILTON - *"Theory of system of rays"*, Trans. R.I. Acad. 15(1828), 69-174.

D. HILBERT und S. COHN-VOSSEN - *Anschauliche Geometrie*, Berlin, Springer, 1932.

M. de L'HOSPITAL - "Analyse des infiniment petits", 2e édition, Paris, 1775.

L. HÖRMANDER - *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127(1971), 79-183.

C. HUYGENS 1 - De motu pendulorum, Paris, 1673, (réédition, Bruxelles, 1966).

C. HUYGENS 2 - Traité de la lumière, Leide, 1690 (réédition, Bruxelles, 1967).

J. KEPLER - Opera Omnia (édit. Ch. Frisch).

F. KLEIN - *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade*, Teubner, Leipzig, 1884.

L. LANDAU, E. LIFSCHITZ - Mécanique classique, MIR, 1966.

E.E. LANDIS - *Tangential singularities*, Funct. Anal. 15(1981), 103-114.

E.J.N. LOOIJENGA 1 - Isolated singular points on complete intersection, Cambridge LN 77, 1984.

E.J.N. LOOIJENGA 2 - *A period mapping for certain semi-universal deformations*, Comp. Math. 30(1974), 299-316.

E.J.N. LOOIJENGA 3 - *The discriminant of a real simple singularity*, Comp. Math. 37 (1978), 51-62.

O.V. LYASHKO 1 - *The geometry of bifurcation diagrams*, Itoki Nauki, Contemporary problems in Math. 22(1983), 94-129.

O.V. LYASHKO 2 - *Classification of critical points of functions on a manifold with singular boundary*, Funct. Anal. 17(1983), 187-303.

J. Mc KAY - *Cartan matrices, finite groups of quaternions, and kleinian singularities*, Proc. A.M.S. (1981), 153-154.

M. MALUS - *Traité d'optique*, Mémoires de l'Institut des Sciences ..., tome 2, Paris, 1811, 214-302. *Théorie de la double réfraction*, loc. cit., 303-508.

J. MARTINET - *Singularities of smooth functions and maps*, Cambridge Univ. Press 58 (1982).

J. MATHER - *Stability of C^∞ mappings I, II*, Ann. of Math. 87(1968), 89-104, et 89 (1969), 254-291.

V.I. MATOV - *Unimodal and bimodal germs of functions on a manifold with boundary*, Trudy Sem. Petrowsky 7(1981), 174-189.

R.B. MELROSE 1 - *Equivalence of glancing hypersurfaces*, Invent. Math. 37(1976), 165-191.

R.B. MELROSE 2 - *Equivalence of glancing hypersurfaces II*, Math. Annalen 255(1981), 159-198.

J. MILNOR 1 - *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies 61, Princeton, 1968.

J. MILNOR 2 - *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds* M(p,q,r), in "Knots, groups and 3-manifolds", Princeton (1975), 175-225.

B. MORIN - *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C.R.A.S. (Paris) (1965) 250 III, 5662-5665 & 6503-6506.

D. MUMFORD - *Curves and their jacobians* - Michigan Press, 1975.

O.A. PLATONOVA 1 - *Singularities of systems of rays near an obstruction*, VINITI (1981), 647-681.

O.A. PLATONOVA 2 - *Singularities of the disposition of a surface and a live*, Uspekhi Math. Nauk 36(1981).

O.A. PLATONOVA 3 - *Singularities in the problem of the quickest way round an obstacle*, Funct. Anal. 15(1981), 147-148.

I.R. PORTEOUS - *The normal singularities of a submanifold*, J. Diff. Geometry 5 (1971), 543-564.

K. SAITO - *Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 29(1982).

I.G. SCHERBACK - *Focal set of a surface with boundary, on caustics of groups generated by reflection* B_k, C_k *and* F_4, Funct. Anal. 18(1984), 84-85.

O.P. SCHERBACK 1 - *Singularities of families of evolvents in the neighborhood of an inflection point of the curve, and the group* H_3 *generated by reflections*, Funct. Anal. 17(1983), 301-302.

O.P. SCHERBACK 2 - *Projectively dual space curves and legendrian singularities*, Trudy Tbilisi 13-14(1982).

I. SCHUR und H. GRUNSKY - Vorlesungen über Invariantentheorie, Springer-Verlag, Grundlehren bd 143, 1968.

P. SLODOWY 1 - *Four lectures on simple groups and singularities*, Comm. Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht 11(1980).

P. SLODOWY 2 - *Simple singularities and simple algebraic groups*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 815(1980).

P. SLODOWY 3 - *Eine bewerkungen zur Entfaltung symmetrischen Funktionen*, Math. Zeitschrift 158(1978), 157-170.

T.A. SPRINGER - Invariant theory, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 585, 1977.

R. THOM 1 - Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, 1972.

R. THOM 2 - Modèles mathématiques de la morphogénèse, nouvelle édition, Bourgois, 1980.

R. THOM 3 - *Sur la théorie des enveloppes*, J. Math. Pures et Appl. 41(1962), 177-192.

G.N. TJURINA - *Resolution of singularities of plane deformation of double rational points*, Funct. Anal. 4(1970), 68-73.

E. von TSCHIRNHAUSEN - Actes de Leipsick, novembre 1682.

A.N. VARCHENKO - *Asymptotic mixed Hodge structures in the vanishing cohomology*, Izvetjia 45(1981), 540-591.

C.T.C. WALL - *Geometric properties of generic differentiable manifolds*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 597(1977), 707-774.

A. WEINSTEIN 1 - *Lectures on symplectic manifolds*, Conf. Board of the Math. Sci. AMS 29(1976).

A. WEINSTEIN 2 - *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Advances in Math. 6(1977), 329-346.

A. WEINSTEIN 3 - *Singularities of families of functions*, Bibl. Institut Manhein, 1971.

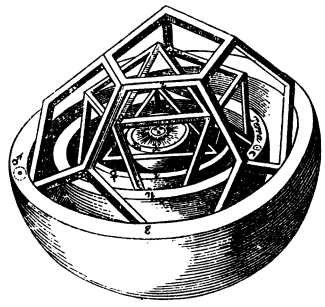
H. WEYL - Symmetry, Princeton Univ. Press, 1952.

H. WHITNEY - *On singularities of mappings of Euclidian spaces I. Mapping of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62(1955), 374-410.

I. ZAKALYUKIN 1 - *Lagrangian and legendrian singularities*, Funct. Anal. 10(1976), 23-31.

I. ZAKALYUKIN 2 - *Bifurcation of front, caustics depending on a parameter*, Itogi Nauki 22(1983), 53-93 (en russe).

C. ZEEMAN - Catastroph theory, Selected papers 1972-77, Addison Wesley, 1977.

Daniel BENNEQUIN

Département de Mathématiques
Université de Strasbourg
7 rue R. Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX