Astérisque

FRANÇOIS LAUDENBACH

Les 2-sphères de $\mathbb{R}^3$ vues par A. Hatcher et la conjecture de Smale $Diff(S^3) \sim 0(4)$

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. n° 629, p. 279-293

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__279_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983-84, n° 629 Juin 1984

LES 2-SPHÈRES DE $\mathbb{R}^3$ VUES PAR A. HATCHER ET LA CONJECTURE DE SMALE $\mathrm{Diff}(S^3) \sim O(4)$

par François LAUDENBACH

§ 1. INTRODUCTION

1.1. Depuis C. Ehresmann [Eh] (voir aussi le livre de N. Steenrod [St]), on sait que le problème de la réduction des fibrés principaux, dont la base est triangulée, se ramène à des questions d'homotopie. Par exemple si K est un groupe et H un sous-groupe, et si $H \sim K$, alors tout K-fibré est un H-fibré. Le symbole $\sim$ veut dire que l'inclusion est une *équivalence d'homotopie faible*, c'est-à-dire qu'elle induit un isomorphisme des groupes d'homotopie.

Dans cet ordre d'idées, il est naturel de se demander si un fibré en sphères S^n est le fibré en sphères unité d'un fibré vectoriel riemannien ; autrement dit, a-t-on $O(n+1) \sim \mathrm{Homéo}(S^n)$? Autre question : $O(n+1) \sim \mathrm{Diff}(S^n)$?

Avant d'aller plus loin, réglons la question de savoir ce qu'il en est de notre $\sim$ par rapport à la notion plus usuelle d'équivalence d'homotopie. Un théorème de J.H.C. Whitehead répond que les deux notions sont les mêmes pour les "CW-complexes" [LW, p. 125]. D'autre part, un espace ANR (Absolute Neighborhood Retract) a le type d'homotopie d'un CW-complexe [LW, p. 135] ; enfin les groupes de difféomorphismes de variétés compactes sont ANR [Pa 2].

1.2. Sur les questions mentionnées plus haut, voici des éléments de réponse. D'une part J. Cerf [Ce 1] pour $n \leq 3$, et Cerf-Morlet-Siebenmann [KS, p. 241], pour $n \geq 5$, établissent l'équivalence : $O(n+1) \sim \mathrm{Homéo}(S^n) \Leftrightarrow O(n+1) \sim \mathrm{Diff}(S^n)$. D'autre part, l'existence de sphères exotiques (Milnor) [Mi 1] [KM], avec le théorème du h-cobordisme de Smale [Mi 2], implique une réponse en général négative.

D'autre part $O(5) \not\sim \mathrm{Homéo}(S^4)$. En effet M. Freedman [Fr] montre qu'il existe une Spin-variété topologique V^4, de signature 8. D'après Kirby-Siebenmann [KS, Annex C], $V \times \mathbb{R}$ a un fibré tangent non lissable ; à cause de la section, il a un fibré en sphères, qui donc ne vient pas d'un fibré linéaire.

Les idées pour $O(3) \sim \mathrm{Homéo}(S^2)$ remontent sans doute à H. Kneser [Kn]. Dans [Sm 1], S. Smale prouve directement que l'inclusion $O(3) \subset \mathrm{Diff}(S^2)$ est une équivalence d'homotopie.

Dans [Fe], J. Feldbau, élève de C. Ehresmann, propose une preuve, en fait incorrecte de $O(n+1) \sim \mathrm{Homéo}(S^n)$ pour tout n. Enfin, S. Smale en 1958 écrit une démonstration de

$O(4) \sim \mathrm{Diff}(S^3)$. Jouant le rôle de "referee", A. Shapiro y découvre une faute. Depuis lors, l'assertion prend le nom de "conjecture de Smale" (voir [Sm 2]). L'honneur revient à A. Hatcher de la transformer en théorème [Ha 4]. Pour les applications de ce résultat je renvoie à l'appendice de [Ha 4] ou au texte du congrès d'Helsinki 1978 [Ha 3].

1.3. Formes équivalentes de la conjecture de Smale

(A) $\mathrm{Diff}(D^3 \text{ mod. } \partial D^3)$ est contractile. Ceci est un outil essentiel pour l'étude du type d'homotopie de l'espace des difféomorphismes d'une variété de dimension 3 (voir par exemple [HL]).

(B) L'espace S des 2-sphères lisses de $\mathbb{R}^3$ est contractile ou : *Toute famille* Σ_t , $t \in S^k$, *de sphères plongées dans* $\mathbb{R}^3$ *se prolonge en une famille* Σ_t , $t \in D^{k+1}$.

L'équivalence de ces énoncés avec la conjecture de Smale résulte de théorèmes de fibration dus indépendamment à J. Cerf [Ce 2] et R. Palais [Pa 1]. Ici nous utiliserons l'énoncé (B).

1.4. Les théorèmes de J. Alexander et J. Cerf

Dans [MB], Morse-Baïda prouvent la conjecture de Schönflies (lisse), à savoir que toute 2-sphère plongée dans $\mathbb{R}^3$ borde une boule, c'est-à-dire que S est connexe ; la version PL, très antérieure, est due à Alexander [Al]. Dans [Ce 3], Cerf démontre que S est simplement connexe, ce qui équivaut à $\pi_0(O(4)) = \pi_0(\mathrm{Diff}(S^3))$. Il s'agit d'un travail difficile (connu sous le nom de son corollaire $\Gamma_4 = 0$) où l'on peut humer les difficultés de la conjecture de Smale. La première version de [Ce 3] est publiée dans le Séminaire H. Cartan 1962-63.

La démonstration fait jouer, comme chez Alexander, un rôle privilégié au feuilletage de $\mathbb{R}^3$ par les plans horizontaux (z = const.), la complexité d'une sphère S étant mesurée par l'agencement des points critiques de la fonction hauteur sur S . Une des idées de Hatcher est d'utiliser, en plus, la structure verticale et en particulier de regarder le contour apparent de S .

Je signale que depuis longtemps H. Rosenberg pose le problème suivant : prouver la conjecture de Schönflies uniquement à l'aide du feuilletage vertical de $\mathbb{R}^3$. Ce serait une étape pour prouver que, dans une 3-variété possédant un champ de vecteurs dont toutes les orbites sont denses, toute 2-sphère plongée borde une boule.

1.5. Mon but est de présenter les trois idées essentielles de Hatcher, à l'intérieur d'un plan pour une démonstration de la conjecture de Smale, peut-être légèrement simplifiée (?).

1) *Partition de l'unité.* Il s'agit d'une technique pour traiter avec paramètres des problèmes "bien résolus" sans paramètres. Elle a été introduite par Hatcher dans [Ha 1] (voir aussi [Ha 2] et [HL]).

2) *Contour.* Etant donné une sphère Σ dans $\mathbb{R}^3$ et $\overline{\Sigma}$ la boule qu'elle borde, le contour $C(\overline{\Sigma})$ est le quotient de $\overline{\Sigma}$ par la relation qui identifie deux points s'ils sont joints par un segment vertical contenu dans $\overline{\Sigma}$. On a une projection $\pi : C(\overline{\Sigma}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ = plan horizontal ; la fontière de l'image est le contour apparent usuel. En général la structure de $C(\overline{\Sigma})$ est compliquée (contractile mais pas "collapsible"). Pour les sphères dites primitives, elle est simple : structure de langues.

3) Une idée technique de *compatibilité*, après subdivision, des structures de langues des différentes sphères primitives "constituant" une sphère générale (convenablement normalisée).

Je remercie Jean Cerf à qui je dois les quelques points d'histoire de cette introduction.

§ 2. NORMALISATION, PARTITION DE L'UNITÉ ET CHIRURGIE

2.1. Une surface orientée S dans $\mathbb{R}^3$ est dite *élémentaire* si elle vérifie les conditions suivantes :

1) Chaque courbe du bord est dans un plan horizontal, S étant verticale au voisinage de la courbe respective.

2) L'intersection de S et d'une verticale est connexe.

3) Désignant par S^+ (resp. S^-) l'adhérence de l'ensemble des points où la normale positive pointe vers le haut (resp. le bas), S^+ et S^- sont isolés l'un de l'autre.

Pour une famille S_t, les conditions ci-dessus sont exigées uniformément en t.

2.2. Proposition de normalisation.— *Etant donné une famille de sphères* Σ_t, $t \in S^k$, *il existe un recouvrement de* S^k *par les intérieurs de boules* B_i, *il existe des plans horizontaux* P_{ij}, *tous distincts, et une déformation de la famille* Σ_t *jusqu'à une famille* Σ'_t, *tels que :*

1) *Pour tout* $t \in B_i$ *et tout* j, *la partie de* Σ'_t *comprise entre* P_{ij} *et* P_{ij+1} *est une surface élémentaire.*

2) Σ'_t *est la réunion des parties ci-dessus.*

Démonstration.— Soit $t \in S^k$; U est formé des points de Σ_t où la normale fait un angle $< \pi/4$ avec la verticale non orientée. Il existe un difféomorphisme f_t de $\mathbb{R}^3$ préservant les niveaux tel que $f_t(\Sigma_t - U)$ soit vertical et que nulle part ailleurs le plan tangent ne soit vertical. Comme les composantes

de $f_t(U)$ sont distantes d'au moins $\delta > 0$, un découpage par des plans horizontaux $P_j(t)$, à distance successive $\leq \delta/2$, produit des surfaces vérifiant 2) et 3) de 2.1. Un nouveau redressement au voisinage des courbes $f_t(\Sigma_t) \cap P_j(t)$ fournit Σ'_t et son découpage en surfaces élémentaires. En insérant un argument d'ouverture et de compacité, on obtient la normalisation globale. □

Observer que l'on peut raffiner la triangulation, tout en gardant la même famille Σ'_t, mais en remplaçant chaque P_{ij} par un nombre convenable de plans voisins. Pour la suite, on revient à la notation Σ_t, la famille étant normalisée.

2.3. Fonction de Hatcher

Soient C_t l'ensemble des courbes $\Sigma_t \cap P_{ij}$ et $C = \bigcup_t C_t$. L'ensemble C a une topologie naturelle : on peut suivre continûment c_t, composante de $\Sigma_t \cap P_{ij}$, tant que $t \in B_i$. Il y a un ordre partiel : $c_t > c'_t$ si c_t et c'_t sont dans le même P_{ij} et si c_t entoure c'_t.

PROPOSITION.– *Après un raffinement convenable du recouvrement* (ce qui modifie C). *il existe une fonction (de Hatcher)* $\lambda : \pi_o(C) \longrightarrow]0,1[$ *injective monotone décroissante* : $c_t > c'_t \Rightarrow \lambda(c_t) < \lambda(c'_t)$.

La proposition est immédiate au voisinage d'un t. Donc par compacité, on l'obtient globalement à condition de négliger l'injectivité de λ et le fait que, pour $i \neq i'$, on exige $P_{ij} \neq P_{i'j'}$. Après coup, on récupère ces conditions par approximation.

2.4. Partition de l'unité. On choisit $\varepsilon > 0$, tel que, pour $c_t \neq c'_t$, on ait $|\lambda(c_t) - \lambda(c'_t)| > 2\varepsilon$, et $\delta > 0$ tel que deux P_{ij} distincts soient distants d'au moins 2δ et que Σ_t soit vertical dans le δ-voisinage de P_{ij}.

Soient $\Gamma_i = \{(t,u) \in B_i \times]0,1[\mid u = \lambda(c_t)\}$ et $\tilde{E}_i$ le ε-épaississement de Γ_i. On se donne une troncature : pour chaque i, T_i est un anneau ($\cong S^{k-1} \times [0,1]$), plongé dans $S^k \times [0,1]$, transverse aux verticales $t = \text{const.}$, joignant $\partial B_i \times \{1\}$ à $\partial B'_i \times \{0\}$ où les B'_i, contenus dans int B_i, recouvrent S^k. Chaque $\tilde{E}_i \cap T_i$ est une réunion de sous-anneaux dont les projections sur S^k sont notées $Z_{i\ell}$. On pose $E_i =$ "$\tilde{E}_i$ tronqué", réunion des bandes hachurées sur la figure (2.1).

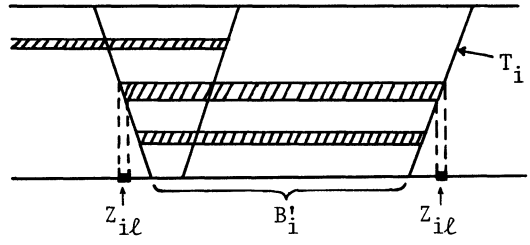


Figure (2.1)

On peut dire que $E = \bigcup E_i$ joue le rôle d'une partition de l'unité car ∂E induit une partition de $t \times [0,1]$ variant continûment avec t .

Soit X_i la projection sur S^k de $\Gamma_i \cap T_i$; $X_i = \bigcup X_{i\ell}$ où $X_{i\ell}$ est l'âme de $Z_{i\ell} = X_{i\ell} \times [-1,+1]$; la coordonnée transverse $t_{i\ell}$ croît dans le sens qui va de B_i' à B_i .

Noter que, pour i fixé, les $Z_{i\ell}$ sont deux à deux disjoints. On prendra un recouvrement $\{B_i\}$ tel que chaque t appartienne au plus à $k+1$ boules. On peut choisir la troncature de façon que l'ensemble des t appartenant à exactement q $Z_{i\ell}$, $1 \leq q \leq k$, soit une union disjointe de *cubes* ayant pour âme une composante de l'intersection de q $X_{i\ell}$, avec les $t_{i\ell}$ respectifs comme coordonnées transverses, et qu'aucun t n'appartienne à $(k+1)$ $Z_{i\ell}$.

2.5. Chirurgie. Pour chaque t fixé, on construit les objets Σ_{tu} de la façon suivante. Les valeurs $\lambda(c_t)$ s'ordonnent en $u^1 = \lambda(c_t^1) > u^2 = \lambda(c_t^2) > \ldots$. Soit $\Delta(c_t)$ le disque horizontal bordé par c_t . Pour $u > u^1$, $\Sigma_{tu} = \Sigma_t$. Pour $u = u^1$, $\Sigma_{tu} = \Sigma_t \cup \Delta(c_t^1)$ (apparition d'un disque de chirurgie). Si $[u_1, u_1 - \varepsilon]$, on exécute la chirurgie : $\Delta(c_t^1)$ est remplacé par deux disques Δ^+ , Δ^- qui s'écartent progressivement, l'un vers le haut, l'autre vers le bas, jusqu'à une distance de $\Delta(c_t^1)$ égale à $\lambda(c_t) \times \delta$; en même temps on retire l'anneau vertical entre $\partial\Delta^+$ et $\partial\Delta^-$. Dans le cas général, on exécute seulement la partie de ce mouvement permise par la troncature et on ne fait rien jusqu'à $u = u^2$. Etc. Observer que, si par exemple $c_t^2 > c_t^1$, la première chirurgie a dégagé la place pour faire la seconde (figure (2.2)).

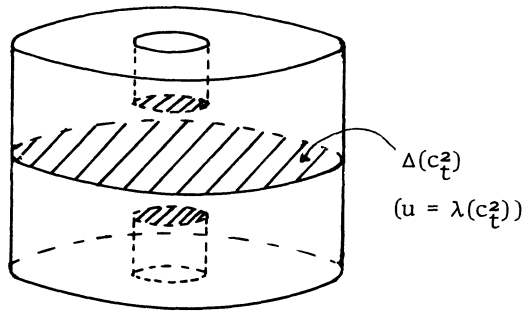


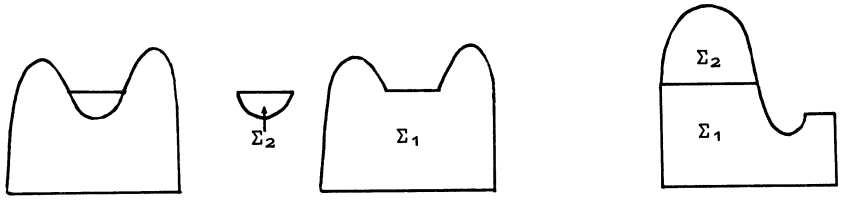
Figure (2.2)

2.6. Il y a une façon unique de décrire Σ_{tu} comme union de sphères disjointes ou ayant deux à deux un disque horizontal en commun. Chacune d'elles est un *facteur* et ses disques horizontaux sont des *faces*.

Une sphère réunion d'une surface élémentaire et de disques horizontaux est dite *primitive*. Vu la normalisation chaque composante de Σ_{to} est une sphère primitive, à laquelle sont collés quelques disques de chirurgie.

Si Δ est une face commune à deux facteurs Σ_1 et Σ_2 , on dit que Δ est une face "somme" ou "différence" selon que $\overline{\Sigma}_1$ et $\overline{\Sigma}_2$ partent de part et d'autre

de Δ ou du même côté (figure (2.3)). Pour une différence on a $\overline{\Sigma}_1 \supset \overline{\Sigma}_2$; pour une somme $\overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2 = \Delta$



différence somme

Figure (2.3)

§ 3. CONTOURS DE SPHÈRES PRIMITIVES

3.1. Soient n fonctions C^1 , $f_1,\ldots,f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles au bord. On suppose : $f_i(x) = f_j(x) \Rightarrow f_i'(x) = f_j'(x)$. La figure formée de leurs graphes sera appelée un *bloc de bigones* (pour faire plaisir à Thurston) ; les régions du complémentaire peuvent être en nombre infini. Pour $n = 2$, l'adhérence de la réunion des composantes bornées s'appelle une *langue*. Un système de bigones est une union finie de blocs disjoints.

3.2. Une *structure de langues* $\mathcal{L}$ est une surface branchée L , ayant partout un plan tangent, donnée avec une projection $\pi : L \to \mathbb{R}^2$, un *disque initial* D_o et une collection finie de langues $T_1,\ldots,T_n$ sur L avec les conditions suivantes :

1) L est réunion de disques lisses $D_1,\ldots,D_n$ avec D_o , sur chacun desquels π est un plongement.

2) $D_i \cap (\bigcup_{j<i} D_j)$ est un sous-disque lisse d_i de D_i tel que $\partial d_i \cap \partial D_i$ contienne au moins un arc.

3) $T_i = \mathrm{adh}(D_i - d_i)$; $\mathrm{int}\, T_i \cap \mathrm{int}\, T_j = \emptyset$ et $D_o \cap \mathrm{int}\, T_i = \emptyset$. Le côté d'attachement de T_i est $T_i \cap d_i$; son côté libre est $\mathrm{adh}(\partial T_i - \partial d_i)$.

4) Tout point du côté d'attachement, qui n'est pas point de branchement, appartient au côté libre d'une autre langue ou à ∂D_o .

On sait *subdiviser* une structure de langues : sur chaque ancienne langue de T (resp. D_o), on dessine un bloc de bigones contenant ∂T (resp. un arc de ∂D_o). La surface L étant fixée, on peut passer d'une structure de langues à une autre par une suite de subdivisions ou "désubdivisions".

3.3. THÉORÈME [Ha 4, p. 571-575].— *Si* Σ *est une sphère primitive, le coutour* $C(\overline{\Sigma})$ *a une structure de langues.*

Les définitions ci-dessus et le théorème s'étendent aux familles. La figure (3.1) présente une sphère primitive et son contour.

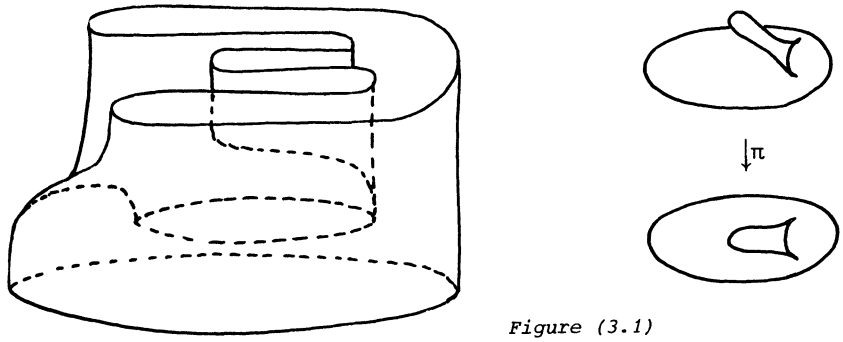


Figure (3.1)

3.4. *Remarques.*— 1) L'ordre d'attachement des langues ne fait pas partie de la structure. Mais pour une famille, localement dans l'espace des paramètres, on peut prescrire un ordre.

2) En raffinant le recouvrement $\{B_i\}$, la procédure 2.5 crée de nouvelles chirurgies. Mais les nouveaux facteurs de Σ_{to} sont essentiellement les mêmes que les anciens avec, en plus, quelques facteurs *standard*, c'est-à-dire dont le contour est une disque.

3.5. Soient Σ une sphère primitive et $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ une collection de disques de chirurgie dans des plans horizontaux distincts, avec $\text{int}\,\Delta_i \cap \Sigma = \emptyset$; on a $\Sigma \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ comme union de facteurs $\Sigma_o,\ldots,\Sigma_n$ avec Δ_k face de Σ_k pour $k \geq 1$. On suppose que Σ_o est *large* c'est-à-dire que $\pi(\Sigma_o)$ rencontre le contour apparent de Σ suivant au moins un arc.

Théorème de compatibilité [Ha 4, prop. 5.2 + § 9].— *Il existe des structures de langues* $\mathcal{L}$ *(resp.* $\mathcal{L}_i$ *) sur* $C(\overline{\Sigma})$ *(resp.* $C(\overline{\Sigma}_i)$ *) vérifiant les conditions suivantes, où* $\{T_j\}$ *est l'ensemble de toutes les langues :*

1) *Pour* $k \geq 1$, $C(\Delta_k)$ *est le disque initial de* $\mathcal{L}_k$. *Le disque initial* D_o *de* $\mathcal{L}_o$ *est disque initial de* $\mathcal{L}$.

2) *La réunion des* $\pi(\partial T_j)$ *est un système de bigones.*

3) *Pour* $j \neq j'$, $\text{int}\,\pi(T_j)$ *et* $\text{int}\,\pi(T_{j'})$ *sont disjoints ou emboîtés.*

En présence d'un paramètre l'énoncé est le même à ceci près que le facteur initial $\Sigma_o(t)$ ne peut pas en général être suivi continûment. On change de facteur initial le long d'une sous-variété V dans l'espace des paramètres ; d'un côté $\Sigma_o(t) = \Sigma'(t)$ et de l'autre $\Sigma_o(t) = \Sigma''(t)$. On vérifie que $\Sigma'(t)$ et $\Sigma''(t)$ ont une face somme $\Delta(t)$ en commun. Si pour $t \in V$, on prend $C(\Delta(t))$ comme objet initial de $\mathcal{L}$, le théorème de compatibilité est valide en présence d'un paramètre.

3.6. Avant d'aller plus loin, énonçons un des faits essentiels : *une famille de sphères primitives est homotope à zéro dans l'espace de toutes les sphères*. Ceci va être établi au § 4 grâce à la structure simple du contour. En quelque sorte le problème devient 2-dimensionnel et admet une solution grâce au "petit théorème de Smale" [Sm 1] : "Diff(D^2 mod. ∂D^2) est contractile". Finalement le théorème en dimension 3 apparaît comme une conséquence de celui en dimension 2 . Où vient donc se briser une éventuelle récurrence ? Précisément sur le théorème 3.3.

§ 4. ÉCRASEMENTS

4.1. La notion de plongement d'une surface avec structure de langues dans une autre est claire : les langues du but induisent les langues de la source. A partir de là, pour une famille de surfaces L_s , $s \in [0,1]$, avec structures de langues $\mathcal{L}_s$, les conditions suivantes ont un sens :

1) Pour $s > s'$, $L_s \subset L_{s'}$ et $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{s'} \cap L_s$.
2) L_1 est un disque.

Une telle déformation est un *écrasement* de $\mathcal{L}_o$ (partiel si 2) n'est pas vérifié).

4.2. PROPOSITION ("petit théorème de Smale" adapté).— *L'espace des écrasements d'une structure de langues a le type d'homotopie d'un point.*

D'autre part, on établit sans peine le principe de relèvement suivant ([Ha 4, lemma 6.1]) :

4.3. PROPOSITION.— *Si* Σ *est une 2-sphère dont le contour admet une structure de langues, alors, pour tout écrasement* $C(\overline{\Sigma})_s$, *il existe une famille* Σ_s *avec* $\Sigma_o = \Sigma$ *et telle que :*

1) $C(\overline{\Sigma}_s) = C(\overline{\Sigma})_s$
2) *(monotonie) Pour* $s > s'$, $\overline{\Sigma}_s \subset \overline{\Sigma}_{s'}$.

De plus, l'écrasement étant donné, l'ensemble des chemins $\{\Sigma_s\}$ *est contractile.*

4.4. L'ensemble des sphères standard (contour = disque) est évidemment contractile.

Les proposition 4.2 et 4.3 associent à Σ , pour une structure de langues fixée $\mathcal{L}$ sur $C(\overline{\Sigma})$, un ensemble contractile $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L})$ de chemins monotones (comme le 2) de 4.3) reliant Σ à une sphère standard. Comme on peut mettre un paramètre t dans les propositions ci-dessus, on obtient 3.6.

4.5. Si $\mathcal{L}'$ est une subdivision de $\mathcal{L}$ on a $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L}') \subset \mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L})$, comme rétracté par déformation puisque chaque terme est contractile. Plus généralement d'après 3.2 on sait passer de $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L}_1)$ à $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L}_2)$.

4.6. Soit Δ une face de Σ ; $\Delta' = \mathrm{adh}(\Sigma - \Delta)$. On suppose que $C(\Delta)$ est disque initial de la structure $\mathcal{L}$. Alors un écrasement de $C(\overline{\Sigma})$ sur Δ se relève en un chemin de disques Δ_s , à bord fixe joignant Δ' à Δ tel que le chemin $\{\Sigma_s = \Delta_s \cup \Delta\}$ soit monotone. Cet ensemble de chemins $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L},\Delta)$ s'injecte dans $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L})$ par $\Delta_s \mapsto \Sigma_s$, comme rétracté par déformation.

4.7. Compatibilité pour la somme

Soient Σ une sphère primitive et Δ un disque de chirurgie du type "somme" : $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_0 \cup \overline{\Sigma}_1$. On a des applications naturelles $C(\overline{\Sigma}_i) \longrightarrow C(\overline{\Sigma})$. La numérotation et les structures de langues choisies $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ sont celles du théorème de compatibilité 3.5. L'écrasement de $C(\overline{\Sigma}_1)$ sur $C(\Delta)$ donne un écrasement partiel de $C(\overline{\Sigma})$ qui se relève en un chemin monotone reliant Σ et Σ_0 . Donc :

PROPOSITION.— *A tout chemin* $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma_1,\mathcal{L}_1,\Delta)$ *est associé continûment une déformation de* $\mathcal{C}(\Sigma_0,\mathcal{L}_0)$ *jusqu'à un rétracté par déformation de* $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L})$.

4.8. Compatibilité pour la différence

Ici $\overline{\Sigma}_0$ contient $\overline{\Sigma}_1$ et $\overline{\Sigma} = \mathrm{adh}(\overline{\Sigma}_0 - \overline{\Sigma}_1)$. L'écrasement de $C(\overline{\Sigma}_1)$ n'a pas l'effet d'écraser $C(\overline{\Sigma})$, mais au cours du mouvement, deux feuillets de $C(\overline{\Sigma})$ se collent l'un à l'autre. Si l'on n'y prend garde, $C(\overline{\Sigma})$ n'a plus de structures de langues [Ha 4, § 7]. Pour une subdivision convenable $\mathcal{L}_1'$ de $\mathcal{L}_1$, on démontre ce qui suit [Ha 4, § 10-11] : soit $\Delta' = \mathrm{adh}(\Sigma_1 - \Delta)$; soit $\{\Delta'(s)\} \in C(\Sigma_1,\mathcal{L}_1',\Delta)$. Notons $\Sigma(s) = (\Sigma - \Delta') \cup \Delta'(s)$. Alors $C(\overline{\Sigma}(s))$ possède une structure de langues.

Donc, quitte à subdiviser les structures, on a :

PROPOSITION.— *A tout chemin* $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma_1,\mathcal{L}_1,\Delta)$ *est associé continûment une déformation de* $\mathcal{C}(\Sigma,\mathcal{L})$ *jusqu'à un rétracté par déformation de* $\mathcal{C}(\Sigma_0,\mathcal{L}_0)$.

En présence d'un paramètre, $\mathcal{L}_1'$ ne peut en général être suivi par continuité. On a un ensemble de bifurcation où $\mathcal{L}_1'$ doit être sur-subdivisée.

§ 5. COMMENT RENDRE CONTINUE LA FAMILLE Σ_{t_0}

La continuité dont il s'agit est au sens de la métrique C^1 de Hausdorff : si Δ est la face de Σ_{t_0} existant pour $t \in X_{i\ell}$, il se dédouble en deux disques voisins lorsque la coordonnée transverse $t_{i\ell}$ devient < 0 (processus continu) tandis qu'il disparaît pour $t_{i\ell} > 0$ (discontinuité).

5.1. Ordre sur les faces. Un facteur initial étant choisi sur une composante de Σ_{t_0} il existe un ordre partiel naturel entre ses faces $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$: $\Delta_j > \Delta_i$ si tout chemin de Σ_{t_0} allant de Δ_j au facteur initial coupe Δ_i .

5.2. Considérons l'un des cubes C, décrit en 2.4, dont l'âme X est réduite à un point t_o, commun à k $X_{i\ell}$. On choisit un facteur initial Σ_{in} d'une composante Σ de Σ_{t_oo} ; les faces sont notées $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$ avec $\Delta_j > \Delta_i \Rightarrow j > i$. Les coordonnées transverses de C, $t_1,\ldots,t_k$, et les autres facteurs $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_k$ leur correspondent.

On choisit pour Σ_{in} un chemin monotone de sphères $\Sigma_{in}(s)$ dans $\mathcal{C}(\Sigma_{in},-)$; pour Σ_i un chemin monotone de disques $\Delta_i(s)$ dans $\mathcal{C}(\Sigma_i,-,\Delta_i)$, avec $\Delta_i(0) = \Delta_i$. Les structures de langues à mettre à la place — doivent satisfaire le principe de compatibilité. On définit alors $\Sigma(0,\ldots,0,t_k)$, $t_k \geq 0$, comme étant obtenu à partir de Σ en remplaçant Δ_k par $\Delta_k(t_k)$. Le facteur correspondant $\Sigma_k(0,\ldots,0,t_k)$ est muni du chemin $\Delta_k(s)$ obtenu en tronquant le précédent à la valeur t_k. Si Σ_i est l'autre facteur ayant Δ_k pour face, $\Sigma_i(0,\ldots,0,t_k)$ se trouve équipé d'un chemin de disques (ou de sphères si $\Sigma_i = \Sigma_{in}$) par application du principe de compatibilité (proposition 4.7 pour une somme ou proposition 4.8 pour une différence). Les autres facteurs sont inchangés.

On construit $\Sigma(0,\ldots,0,t_{k-1},t_k)$ à partir de $\Sigma(0,\ldots,0,t_k)$ en faisant la même construction avec le facteur $\Sigma_{k-1}(0,\ldots,0,t_k)$. La figure (5.1) donne un exemple avec $k = 2$; noter que les facteurs restent des sphères plongées mais que deux facteurs peuvent se rencontrer ailleurs que le long d'une face.

Figure (5.1)

La construction ci-dessus ne dépend pas de la numérotation des faces tant qu'elle respecte l'ordre. D'autre part elle s'étend au cas où certaines coordonnées sont négatives : Σ est disconnectée mais la numérotation des faces respecte l'ordre sur chacun des morceaux ; de plus si la chirurgie a lieu le long de Δ_i, Σ_i devient facteur initial de sa composante avec comme chemin de sphères $\Delta_i(s) = \Delta_i(s) \cup \Delta$.

5.3. Considérons maintenant un cube C' dont l'âme X' est un segment ; pour $t \in X'$, soit Σ_t une composante de Σ_{to}, suivie continûment. Pour $t \in \partial X'$, t appartient à un cube C, du type étudié en 5.2 et Σ_t est une composante de $\Sigma(0,\ldots,\pm1,0\ldots)$. En particulier pour $t \in \partial X'$, $\Sigma_{in,t}$ est donnée.

Faisons l'hypothèse, fausse en général, que $\Sigma_{in,t}$ peut être suivi continûment pour tout $t \in X'$.

On peut alors, comme en 5.2, fixer la numérotation des faces $\Delta_{1,t},\ldots,\Delta_{k-1,t}$

et des coordonnées transverses $t_1,\ldots,t_{k-1}$ de C' . On veut construire $\Sigma_t(t_1,\ldots,t_{k-1})$ par le même procédé qu'en 5.2 en faisant des choix continus en t de chemins monotones de sphères et de disques. Mais pour $t \in \partial X'$, $\Sigma_t(t_1,\ldots,t_{k-1})$ est déjà construit ; d'après les propositions de compatibilité, cela veut dire que les choix ci-dessus ont déjà été faits pour $t \in \partial X'$. Pourquoi n'y a-t-il pas d'obstruction à prolonger ces choix à X' ? Pour la raison qu'en vertu de tous les résultats énoncés au § 4, *chaque choix est fait dans un ensemble contractile*. Pour ne pas surcharger nous avons caché certaines fibrations (de Serre) et le fait que la construction visée revient à prolonger à l'arête X' une section d'un fibré à fibre contractile.

On procède pour les autres cubes de la même façon, par récurrence sur la dimension de l'âme. Il ne reste qu'à traiter les changements de facteurs initiaux pour achever la fabrication d'une approximation continue de Σ_{to} .

5.4. Reprenons les notations de 3.5 pour discuter le changement de facteur initial. Le disque somme Δ_t , face commune à Σ'_t et Σ''_t existe pour $t \in X$; de plus, pour $t \in X \cap V$, Δ_t est objet initial, V étant une sous-variété de codimension 1 . Soient x , v les coordonnées transverses respectivement à X et V . La figure (5.2) schématise la construction faite au voisinage de $X \cap V$. Le

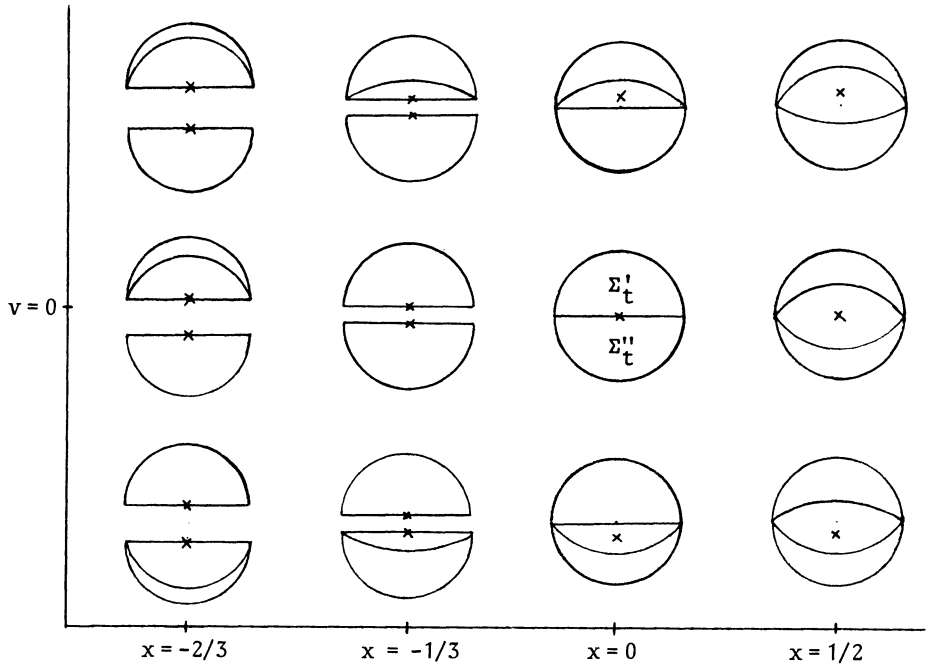


Figure (5.2)

point marqué indique ce qui est pris comme objet initial.

On ne perd pas de généralité à supposer que Δ_t est disque initial de Σ'_t et Σ''_t, pour tout $t \in \{x = 0, -1 \leq v \leq 1\}$. Donc on a des chemins monotones de disques $\{\Delta'_t(s)\}$ (resp. $\Delta''_t(s)$) remplissant $\overline{\Sigma}'_t$ (resp. $\overline{\Sigma}''_t$). Les disques utilisés sur le schéma pour limiter le facteur auxiliaire Σ_{aux} sont pris dans ces familles. De plus Σ_{aux} est naturellement équipé d'un chemin monotone de sphères.

Remarquer que la construction ci-dessus n'interagit avec aucune autre : le changement de facteur initial ne peut faire intervenir à la fois deux disques-sommes distincts.

5.5. Conclusion. Nous avons construit Σ^c_{to}, approximation continue de Σ_{to}, et coïncidant avec Σ_{to} hors des sous-variétés $Z_{i\ell}$.

Bien que les faces ne soient plus toujours des disques horizontaux, la notion de facteur reste claire. On a, pour chaque composante de Σ^c_{to}, un facteur initial muni d'un chemin monotone de sphères le reliant à une sphère standard. Dès lors chaque autre facteur a une face préférée (un chemin de Σ^c_{to} joignant ce facteur au facteur initial de sa composante passe par cette face) et est rempli d'un chemin monotone de disques aboutissant à cette face préférée. La notion de continuité pour de telles données est évidente sauf lorsqu'un facteur dégénère. Dans ce dernier cas le chemin monotone du facteur respectif est obtenu par troncature d'un chemin qui existe sur tout un voisinage de l'espace des paramètres et qui d'ailleurs a servi à construire la dégénérescence du-dit facteur.

§ 6. DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE SMALE

6.1. On se propose de construire une approximation continue Σ^c_{tu} de Σ_{tu}, prolongeant la famille Σ^c_{to} construite au § 5 et telle que $\Sigma^c_{t1} = \Sigma_{t1} = \Sigma_t$. De plus, chaque facteur de Σ^c_{tu} sera muni d'un chemin monotone de sphères ou de disques, continûment en (t,u) au sens précisé en 5.5. En particulier Σ_t sera donné avec un chemin $\Sigma_t(s)$ joignant Σ_t à une sphère standard ; ainsi la conjecture de Smale sera démontrée.

6.2. Soit u^o le plus bas niveau de la fonction de Hatcher. On pose $\Sigma^c_{tu} = \Sigma^c_{to}$ pour $u \in [0, u^o - \varepsilon]$. Dans la suite nous allons construire Σ^c_{tu} pour $u \in [u^o - \varepsilon, u^o + \varepsilon]$; la fin de la construction consiste alors à procéder de même avec les valeurs successives de la fonction de Hatcher.

Notons Δ^o_t le disque de chirurgie tel que $u^o = \lambda(\partial\Delta^o_t)$. Notons aussi $\Gamma^o = \{(t,u^o) \mid u^o = \lambda(\partial\Delta^o_t)\}$ où t est limité par la troncature, $\tilde{E}^o$ son épaississement "conique" (composante d'un certain E_i du § 2.4), $\tilde{Z}^o$ le bord oblique de $\tilde{E}^o$, Z^o la projection de $\tilde{Z}^o$ dans S^k, t^o sa coordonnée transversale et X^o l'âme de Z^o qui est aussi la projection de $\partial\Gamma^o$. Enfin B^o est la boule de S^k bordée par X^o du côté $t^o < 0$.

Pour $t \in B^o$, lorsque u croît de $u^o - \varepsilon$ à u^o, deux composantes Σ'_{tu} et Σ''_{tu} de Σ_{tu} viennent se coller le long de Δ^o_t par leurs faces respectives Δ'_{tu} et Δ''_{tu}. On note $F(\Delta'_{tu})$ le facteur de Σ'_{tu} contenant Δ'_{tu} : de même pour $F(\Delta''_{tu})$. Enfin Δ'_{tu} et Δ''_{tu} sont aussi faces de Σ^c_{tu}.

6.3. Comme nous quittons le domaine des sphères primitives, la notion de facteur initial n'a plus à se référer à une propriété du contour. En revanche on prend pour *facteur initial* un *facteur maximal* parmi les facteurs de la même composante (maximal = non inclus dans la boule bordée par un autre facteur) ; les facteurs larges de Σ_{to} avaient cette propriété. Evidemment, le changement de facteur initial ne peut se faire qu'à travers un disque somme, qui joue alors le rôle d'objet initial. Dès qu'un objet initial est choisi pour une composante de Σ_{tu}, chaque facteur non initial est muni d'une face préférée (comme en 5.5).

Pour $u = u^o - \varepsilon$ et $t \in B^o$, si un facteur de Σ'_{tu} entoure Σ''_{tu}, alors $F(\Delta''_{tu})$ est maximal parmi les facteurs de Σ''_{tu} et Δ'_{tu} n'est pas la face préférée de $F(\Delta'_{tu})$. Cette configuration sera dite du type (D') ; en renversant les rôles de Σ' et Σ'' on obtient (D''). On pose (D) = (D') ou (D'') et (S) = non(D). On peut sauter du type (D) au type (S) ; mais on démontre facilement qu'on ne peut sauter de (D') à (D'').

Les symboles (D) et (S) font penser à "différence" et à "somme" mais Σ_{tu} peut être dans la configuration (D) et que Δ^o_t soit un disque "somme" (voir figure (6.1)).

6.4. Pour $u = u_o - \varepsilon$, chaque composante de Σ^c_{tu} est munie d'un objet initial (facteur ou disque horizontal). On fait l'hypothèse suivante pour tout $t \in B^o$:

(*) Si Σ_{tu} est dans la configuration (D'), Δ''_{tu} est objet initial de $\Sigma^{c,}_{tu}$; hypothèse analogue dans (D''). Si Σ_{tu} est dans la configuration (S), Δ'_{tu} est objet initial de $\Sigma^{c,}_{tu}$ ou (non exclusif) Δ''_{tu} est objet initial de $\Sigma^{c,,}_{tu}$.

Si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, il est facile de modifier la famille Σ^c_{tu}, $t \in S^k$, $u \in]0,u^o - \varepsilon]$ pour amener l'objet initial à l'endroit voulu. Cela se fait par des opérations du type décrit en 5.4 : le nouveau Σ^c_{tu} diffère de l'ancien par la présence de quelques facteurs auxiliaires pour $u \in]0,u^o - \varepsilon[$.

6.5. Construction de Σ^c_{tu} pour $u \in [u^o - \varepsilon, u^o + \varepsilon]$ sous l'hypothèse (*). Commençons par prendre $t \in B^o$. Disons que la configuration est du type (D'). De $u^o - \varepsilon$ à u^o, deux faces viennent se coller ; d'ailleurs, si $t \in B^o \cap Z^o$, ce mouvement est stationnaire tant que u n'est pas dans $\tilde{E}^o$. Dans $\Sigma^c_{tu^o}$, le facteur F''_{tu^o}, désigné sur la figure (6.1), admet Δ^o_t comme face et est rempli d'un chemin monotone de disques. Ce chemin est utilisé pour créer la dégénérescence de ce facteur sur l'intervalle $[u^o, u^o + \varepsilon]$. Pour $u > u^o$, le facteur

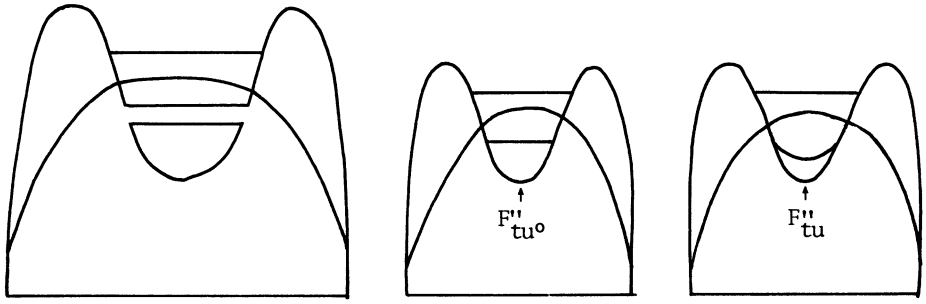


Figure (6.1)

F''_{tu} est rempli du même chemin de disques, convenablement tronqué.

Quant aux facteurs adjacents, ils sont déformés par extension d'isotopie, ainsi que les chemins monotones dont ils sont équipés. La construction est analogue pour le type (S) .

Si $t \in Z^o - B^o$, pour $u = u^o - \varepsilon$ le facteur F''_{tu} est déjà partiellement dégénéré ; $t = (x,t^o)$, $x \in X^o$, $t^o > 0$ et la dégénérescence est donnée par un chemin de disques remplissant $F''_{t'u}$ où $t' = (x,0)$. Le même chemin de disques sert alors à achever la dégénérescence lorsque u croît de $u^o - \varepsilon$ à $u^o + \varepsilon$, le mouvement étant stationnaire tant que u n'est pas dans $\tilde{E}^o$, en particulier pour $u < u^o$. Ainsi Σ^c_{tu} est constant en u , si $t \in \partial(Z^o - B^o)$. Pour $t \notin Z^o \cup B^o$, on prend aussi Σ^c_{tu} constant en u . Ceci achève la construction de Σ^c_{tu} pour $u = u^o + \varepsilon$, avec les mêmes propriétés que Σ^c_{to} (voir 5.5).

Remarque.— Pour $u = u_o + \varepsilon$, on ne peut construire Σ^c_{tu} à partir de Σ_{tu} en utilisant les contours de ses facteurs, puisque ceux-ci ne sont pas primitifs. En revanche on peut le faire à l'aide de Σ^c_{tu} pour $u = u_o - \varepsilon$.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] J. ALEXANDER - *On the subdivision of 3-space by a polyedron*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 10(1924), 6-8.

[Ce 1] J. CERF - *Invariants de paires d'espaces, Applications à la topologie différentielle*, CIME, Roma Ist. Mat. del Univ. (1962), polycopié.

[Ce 2] J. CERF - *Topologie de certains espaces de plongements*, Bull. Soc. Math. France 89(1961), 227-380.

[Ce 3] J. CERF - *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 53, 1968.

[Eh] C. EHRESMANN - *Espaces fibrés de structures comparables*, C.R. Acad. Sc. Paris 214(1942), 144-147. (Rapport de A. Weil dans [MF 7841].)

[Fe] J. FELDBAU (sous le nom de J. LABOUREUR) - *Propriétés topologiques du groupe des automorphismes de la sphère* S^n, Bull. Soc. Math. France 71 (1943), 206-211.

[Fr] M. FREEDMAN - *The topology of four dimensional manifolds*, J. of Diff. Geom. 17(1982), 357-453.

[Ha 1] A. HATCHER - *Homeomorphisms of sufficiently large* P^2*-irreducible 3-manifolds*, Topology 15(1976), 343-347.

[Ha 2] A. HATCHER - *On the diffeomorphism group of* $S^1 \times S^2$, Proc. AMS 83(1981), 427-430.

[Ha 3] A. HATCHER - *Linearization in 3-dimensional topology*, Proc. ICM Helsinki (1978), 463-468.

[Ha 4] A. HATCHER - *A proof of the Smale conjecture*, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$, Annals of Math. 117(1983), 553-607.

[HL] H. HENDRIKS, F. LAUDENBACH - *Difféomorphismes des sommes connexes en dimension trois*, prépubl. Orsay, 1982, à paraître dans Topology.

[KM] M. KERVAIRE, J. MILNOR - *Groups of homotopy spheres* I, Ann. of Math. 77 (1963), 504-537.

[Kn] H. KNESER - *Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen*, Math. Z. 25(1926), 362-372.

[KS] R. KIRBY, L. SIEBENMANN - *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Annals of Math. 88, Princeton Univ. Press, 1977.

[LW] A. LUNDELL, S. WEINGRAM - *The topology of CW-complexes*, Von Nostrand, 1969.

[MB] M. MORSE, E. BAIADA - *Homotopy and homology related to the Schoenflies problem*, Ann. of Math. 58(1953), 142-165.

[Mi 1] J. MILNOR - *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399-405.

[Mi 2] J. MILNOR - *Lectures on the* h*-cobordism theorem*, Princeton Math. Notes, 1965.

[Pa 1] R. PALAIS - *Local triviality of the restriction map for embeddings*, Comment. Math. Helv. 34(1960), 305-312.

[Pa 2] R. PALAIS - *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5(1966), 1-16.

[Sm 1] S. SMALE - *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. AMS 10(1959), 621-626.

[Sm 2] S. SMALE - *Rapport sur J. Cerf, Groupes d'automorphismes...*, p. 845 in Reviews of papers in algebraic and differential topology..., ed. by Steenrod, AMS, 1968.

[St] N. STEENROD - *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.

François LAUDENBACH
Université de Paris-Sud
Dépt. de Mathématiques, Bâtiment 425
F-91405 ORSAY