Astérisque

GÉRARD VIENNOT

Problèmes combinatoires posés par la physique statistique

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 626, p. 225-246

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__225_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983/84, n° 626 Février 1984

PROBLÈMES COMBINATOIRES POSÉS PAR LA PHYSIQUE STATISTIQUE

par Gérard VIENNOT

RESUME. - L'introduction d'une direction privilégiée dans un modèle de mécanique statistique change les exposants critiques. Ceci explique la vague d'intérêt récente chez les physiciens pour les *modèles dirigés*, en particulier depuis 1982 pour les *animaux dirigés*, (références [8] à [25]). Ceux-ci font l'objet principal de cet exposé.

Des résultats exacts en dimension d=2 (nombre d'animaux, largeur moyenne,...) ont été démontrés par Derrida, Hakim, Nadal et Vannimenus [17],[21], ainsi que par Dhar [12],[13] en dimension d=2 et 3 . Ce dernier montre l'équivalence avec le modèle de gaz des *hexagones durs* récemment résolu par Baxter [30],[1], chapitre 14.

D'autre part, l'orateur a montré dans [26],[27] et dans [28] avec Gouyou-Beauchamps, que les méthodes modernes (bijectives) de la combinatoire énumérative permettent de démontrer, pratiquement sans aucun calcul, les résultats exacts sur les animaux dirigés obtenus par des méthodes propres à la mécanique statistique.

Plusieurs questions restent ouvertes, en particulier sur l'apparition surprenante des célèbres identités de Rogers-Ramanujan dans le modèle des hexagones durs.

§ 1 - INTRODUCTION

Il s'agit de modèles pour expliquer les phénomènes de transition de phase (ébullition de l'eau, magnétisation des substances ferromagnétiques,...). On suppose donné un *réseau*, c'est-à-dire un graphe dont les sommets sont des éléments de $\mathbb{Z}^d$. Ce graphe est infini et possède suffisamment de "régularités". Dans cet exposé, nous considérerons les réseaux *carré*, *triangulaire* et *hexagonal* pour d=2 (voir respectivement figures 1,2 et 9), et les réseaux *cubique* et *cubique-centré* pour d=3 (voir § 8). Deux sommets joints par une arête sont dits *voisins*.

En chaque sommet i , une variable σ_i peut prendre aléatoirement un nombre fini q de valeurs. Par exemple $\sigma_i = \pm 1$ en terme de spins, ou encore $\sigma_i = 1$ ou 0 selon que le sommet i est "occupé" ou "vacant" (par un atome). Une fonction

fondamentale est la *fonction de partition*. Elle s'exprime à partir des énergies d'interactions.

L'interaction entre les sommets i et j est une fonction des variables σ_i et σ_j et de la température T. Eventuellement d'autres énergies sont à prendre en compte (champ magnétique extérieur,...). Par différenciation de la fonction de partition, on obtient les grandeurs physiques usuelles associées au système (énergie libre, densité, susceptibilité, chaleur spécifique,...).

Une méthodologie consiste à idéaliser suffisamment les énergies d'interactions afin de rendre possible le calcul exact de la fonction de partition. En général, on se restreint aux interactions entre plus proches voisins. Le modèle le plus connu est celui d'Ising. Depuis sa résolution par Onsager en 1944 (pour $d=2$ et champ magnétique extérieur nul), une littérature considérable existe sur les modèles résolubles. Le livre récent de Baxter [1] en présente une belle synthèse.

Bien que ces modèles ne soient qu'en dimension deux, l'intérêt est qu'ils présentent, comme pour les systèmes réels, une transition de phase. Pour une certaine température critique T_c, les grandeurs physiques présentent une singularité. Le comportement de la grandeur $F(T)$ au voisinage de T_c est mesuré par un *exposant critique* λ. Par exemple, lorsque $T \to T_c$, on peut avoir $F(T) \sim (T-T_c)^{-\lambda}$. La notation $A \sim B$ a le sens habituellement employé en physique, c'est-à-dire $\log A / \log B$ tend vers 1. Les physiciens attachent une grande importance au calcul des exposants critiques.

Soit D un domaine fini connexe, ayant N sommets, du réseau considéré. Soit $Z_D(T)$ la fonction de partition du système fini associé. Celle-ci est en fait un polynôme énumérant les q^N configurations possibles selon certains paramètres. Un exemple d'un tel polynôme est donné au § 8 avec le modèle des hexagones durs. Pour le modèle d'Ising, il s'agit de dénombrer les 2^N configurations $\sigma_1, \ldots, \sigma_N = \pm 1$, sur un rectangle fini du réseau carré, ayant un nombre donné de paires de sommets voisins i et j telles que $\sigma_i \sigma_j = -1$. La grandeur fondamentale à calculer est la limite de $Z_D^{1/N}$ lorsque le domaine D devient, dans un sens à préciser, infiniment grand. Cette limite $Z(T)$ est appelée la *limite thermodynamique* de la fonction de partition, ou encore fonction de partition réduite à un site.

Le rapport entre la combinatoire et la mécanique statistique n'est pas nouveau. Par exemple, des solutions combinatoires du modèle d'Ising existent depuis longtemps [5]. Certains modèles reviennent à calculer des objets familiers de la théorie des graphes (polynôme chromatique, polynôme de Tutte, voir [6]).

Ce qui est nouveau dans la résolution combinatoire du problème des animaux dirigés, est que l'on utilise la méthodologie de la combinatoire énumérative actuelle, à savoir les méthodes dites bijectives. Depuis (environ) les années 70, et sous l'impulsion de diverses écoles, notamment en France Schützenberger et aux Etats-Unis Rota, on assiste à un renouveau de la combinatoire nommée par les

Mathematical Reviews "classical combinatorial problems" dans la section 05 A.

Il ne s'agit plus seulement d'énumérer mais aussi (par exemple) d'interpréter des identités connues dans des domaines classiques des mathématiques, en construisant une bijection entre deux structures finies qu'il s'agit de découvrir. De nombreuses interactions ont lieu vers les applications (statistique, informatique,...) ainsi qu'avec d'autres branches des mathématiques (par exemple : fonctions symétriques, géométrie algébrique, fonctions spéciales et polynômes orthogonaux). Le lecteur se fera une idée plus précise en lisant l'article de Cartier [58] à ce même séminaire, ou encore [54].

Peu à peu, des idées générales se dégagent et des "modèles" combinatoires apparaissent, permettant d'interpréter toute une famille d'identités à la fois. La combinatoire sous-jacente aux animaux dirigés fait intervenir trois de ces modèles : le *monoïde de commutation* de Cartier, Foata [38] dans sa version modernisée (et en relief) des *empilements de pièces* de Dulucq, Viennot [40], le *composé partitionnel* de Foata, Schützenberger [43],[46] (ou les *espèces de structures* de Joyal [50]) relatif aux séries génératrices exponentielles, les *chemins de Motzkin valués* pour la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux et développements en fractions continuées de Flajolet [42] et Viennot [55].

§ 2 - ANIMAUX DIRIGES

Notons $\Pi = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'ensemble des sommets du réseau carré. Un *chemin* de Π est une suite $\omega = (s_0,\ldots,s_n)$ de sommets s_i de Π. Le chemin *va* de s_0 à s_n, sa *longueur* est n et (s_i,s_{i+1}) est un *pas élémentaire*. Un *chemin dirigé* est un chemin dont les pas élémentaires sont Nord ou Est, c'est-à-dire $s_i = (x,y)$ et respectivement $s_{i+1} = (x,y+1)$ ou $s_{i+1} = (x+1,y)$.

Un *animal dirigé* (sur le réseau carré) est une partie finie $A\subset\Pi$ comprenant un ensemble S non vide de points situés sur une droite perpendiculaire à la diagonale principale, et telle que pour tout $\alpha\in A$, il existe un chemin dirigé formé de sommets de l'animal et allant d'un point de S à α. L'ensemble S est évidemment unique et ses éléments sont appelés points sources. La direction Nord-Est est appelée par les physiciens *direction privilégiée* (voir figures 1,3,5).

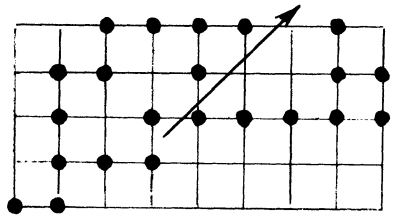

Fig.1 - Un animal dirigé ayant un seul point source.

La *largeur* (resp. *longueur*) de l'animal dirigé A est le minimum de $|b-a|$ pour les entiers a et b tels que A soit compris entre les droites d'équations $y = x+a$, $y = x+b$ (resp. $y = -x+a$, $y = -x+b$). Dans les dénombrements, les animaux sont définis à une translation près. Soit a_n le nombre d'animaux dirigés de taille (ou cardinal) $|A| = n$ et ayant un seul point source. En

supposant ces animaux équidistribués, soit ℓ_n (resp. L_n) la largeur (resp. longueur) moyenne. Pour $n \to \infty$, les physiciens s'attendent à des relations du type suivant :

$$(1)\ a_n \sim \mu^n n^{-\theta} \quad ; \quad (2)\ \ell_n \sim n^{\nu_\perp} \quad ; \quad (3)\ L_n \sim n^{\nu_{/\!/}} \quad .$$

Le problème est de calculer les exposants $\theta, \nu_\perp$ et $\nu_{/\!/}$ (et démontrer aussi leur existence !). Il ne s'agit pas à proprement parler d'un modèle thermodynamique, mais celui-ci se comporte tout à fait comme un tel système. La série génératrice $f(t) = \sum_{n\geq 1} a_n t^n$ joue le rôle d'une fonction thermodynamique avec un ou plusieurs points critiques réels. Le comportement de $f(t)$ au voisinage de l'un d'eux noté t_c (celui de plus petit module) permet (en général) de déduire (1), ainsi que les valeurs de θ et $\mu = 1/t_c$. Les exposants $\theta, \nu_\perp$ et $\nu_{/\!/}$ jouent le rôle d'exposants critiques. Ils sont reliés à certains exposants de modèles thermodynamiques. D'autre part, on verra au § 8 que $-f(-t)$ est exactement la densité d'un certain modèle de gaz de Baxter. Aussi les animaux dirigés constituent un modèle pour ce que l'on appelle les *polymères branchés* dans un solvant en mouvement. Ils sont reliés aux processus de Markov arborescents. Enfin, les animaux dirigés sont intimement liés au modèle de la *percolation dirigée* (voir [7]).

Remarquons que la percolation classique correspond aux *animaux* (non dirigés). Pour ces animaux, la notion de chemin dirigé est remplacée par celle de chemin pouvant avoir les quatre types de pas élémentaires Nord, Sud, Est, Ouest. Ils sont connus en combinatoire sous le nom de *polyominos* (chaque sommet est remplacé par un carré élémentaire du réseau dual). On est encore très loin d'avoir des formules exactes pour ces animaux isotropes.

L'introduction d'une direction privilégiée change la *classe d'universalité* du modèle (c'est-à-dire les exposants critiques). De plus, dans la percolation dirigée, comme pour les animaux dirigés, deux exposants critiques $\nu_\perp$ et $\nu_{/\!/}$ remplacent l'exposant ν des modèles non dirigés.

On peut aussi définir des animaux dirigés sur un réseau triangulaire. Ce réseau peut être considéré comme un réseau carré, auquel on a rajouté comme arêtes les diagonales des carrés élémentaires parallèles à la diagonale principale. Les chemins dirigés ont alors trois pas élémentaires possibles : Nord, Est, et le pas Nord-Est $s_i = (x,y)$, $s_{i+1} = (x+1,y+1)$. On pourrait aussi généraliser la notion d'animaux dirigés sur $\mathbb{Z}^d$. On se reportera au § 8 pour $d=3$. Les physiciens s'attendent à ce que les animaux dirigés sur réseau carré et triangulaire

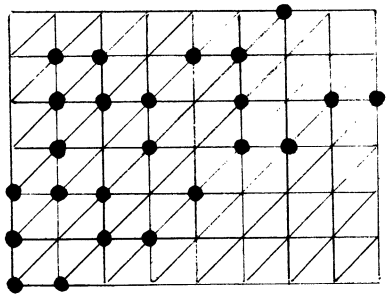

Fig.2 - Un animal sur réseau triangulaire.

aient les mêmes exposants critiques : c'est l'hypothèse d'universalité. La classe d'universalité dépend de la dimension. Par contre, le nombre μ de la formule (1), appelé *constante de connectivité* dépend du réseau particulier choisi.

§ 3 - MÉTHODES PHYSIQUES POUR LES ANIMAUX DIRIGÉS.

Nous résumons brièvement les différentes méthodes d'approche du calcul des exposants critiques des animaux dirigés utilisées par les physiciens en 1982. Celles-ci donnent un bon éventail des puissantes méthodes utilisées habituellement en physique statistique, comme celles découlant du *groupe de renormalisation*. Remarquons que les résultats sont plus ou moins approchés. Une formule exacte donnée pour un exposant critique n'implique pas forcément une preuve rigoureuse. Par exemple, pour le modèle de liens sur le réseau plan carré, la valeur 1/2 pour le seuil de percolation était acceptée par les physiciens dès 1963, alors que la preuve rigoureuse (par Kasten) ne date que de 1980. Pour les animaux dirigés, deux méthodes différentes donnaient $\nu_{/\!/} = 0{,}8185 \pm 0{,}0010$ (Nadal et al. [21]) et $\nu_{/\!/} = 0{,}800 \pm 0{,}001$ (Redner et Yang [24]), alors que l'on n'a pas encore de preuve rigoureuse de l'existence de $\nu_{/\!/}$ (depuis Redner et Yang ont amélioré cette valeur). Nous distinguerons donc "montrer" et "démontrer".

La théorie des champs permet d'obtenir pour les animaux dirigés une théorie de *champ moyen* valable au dessus de la *dimension critique supérieure* d_c, des *développements perturbatifs* des exposants critiques en $\varepsilon = d_c - d$ et des *lois d'échelles*. Pour $d \geq d_c$, les exposants critiques ne dépendent plus de d. Ainsi Day et Lubensky [11] donnent $d_c = 7$ ainsi que des développements en $\varepsilon = 7-d$, pour les animaux dirigés sans *boucles intérieures*, c'est-à-dire que deux chemins dirigés différents de l'animal ne peuvent arriver au même sommet. Ces animaux semblent être dans la même classe d'universalité que les animaux dirigés (quelconques). Il vient $\nu_\perp = 1/4+\varepsilon/36$, $\nu_{/\!/} = 1/2+\varepsilon/24$ et $\theta = 3/2-\varepsilon/12$.

Breuer et Janssen [9] et Cardy [10] ont montré l'équivalence du modèle des animaux dirigés en dimension d avec un modèle de Lee et Yang en dimension $d-1$. Ce modèle est un modèle d'Ising avec champ magnétique imaginaire, le temps est considéré comme la direction privilégiée. Il fait partie des modèles appelés *critiques dynamiques*. Cette équivalence donne la loi d'échelle $\theta = (d-1)\nu_\perp$ (voir aussi Family [15]) et montre que $\theta = \nu_\perp = 1/2$ en dimension deux. L'exposant critique dynamique z est relié par la relation $z = \nu_{/\!/} / \nu_\perp$. Sa détermination est réputée fort difficile, même en dimension 1. Remarquons qu'une équivalence analogue a été mise en évidence par Parisi et Sourlas [36] entre les animaux non dirigés en dimension d et le modèle de Lee et Yang de dimension $d-1$. Ceci montre que l'exposant critique $\nu_\perp$ des animaux dirigés en dimension $d \geq 2$ est le même que l'exposant ν des animaux non dirigés en dimension $d+1$.

L'approximation dite de *Flory* fut à l'origine proposée pour les *polymères*

linéaires (c'est-à-dire les chemins ne se recoupant pas avec eux-mêmes). Elle a été adaptée au cas directionnel par Lubensky, Vannimenus [19] et Redner, Coniglio [23]. On retrouve la dimension critique supérieure $d_c = 7$, et pour $d \geq d_c$ les exposants de champ moyen, à savoir $\nu_\perp = 1/4$ et $\nu_{/\!/} = 1/2$.

L'énumération des animaux sur un *arbre de Cayley* (pouvant être considéré comme la limite d'un réseau $\mathbb{Z}^d$ pour $d \to \infty$) redonne également les exposants de champ moyen, voir Nadal [20].

Remarquons que les animaux sur un arbre d'arité deux ne sont pas autre chose que les *arbres binaires* de la combinatoire. Leur nombre est le classique *nombre de Catalan* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, ayant pour série génératrice $\frac{1}{2t}[1-(1-4t)^{1/2}]$ et la forme asymptotique $C_n \sim 4^n n^{-3/2}$.

D'autres méthodes sont d'ordre numérique. En connaissant les premiers termes des séries génératrices, une méthode *d'approximants de Padé* permet de donner des estimations des exposants critiques, voir Stanley et al. [25], Redner, Yang [24], Dhar et al. [14]. Les énumérations directes ont conduit Dhar, Phani et Barma à conjecturer de remarquables formules exactes pour le nombre d'animaux dirigés sur réseau carré et triangulaire (dimension deux).

§ 4 - ANIMAUX SUR UN RUBAN BORNÉ. (D'après Derrida, Hakim, Nadal, Vannimenus [17], [20], [21]).

Une méthode classiquement employée pour la résolution exacte des modèles solubles est celle des *matrices de transfert* (voir par exemple Baxter [1]). Celle-ci est particulièrement bien adaptée pour le dénombrement des animaux bornés sur un *ruban* de largeur k, comme indiqué sur la figure 3. L'animal est compris entre les bords (lignes en zig-zag) notés L_o et L_{k-1} sur cette figure. En coupant l'animal par les droites D_m d'équation $y = -x+m$, on obtient une configuration C_m de points. Il y a 2^k configurations possibles. On définit une matrice $T_k(x)$ dite de transfert, dont les lignes et colonnes sont indexées par ces 2^k configurations. Le terme (C,C') est $x^{|C|}$ si C et C' sont deux tranches consécutives C_m et C_{m+1} d'un même animal dirigé, ce terme est nul dans le cas contraire. On a noté par $|C|$ le nombre de sommets "occupés" de la configuration. En identifiant les bords L_o et L_{k-1}, on pourrait aussi définir les animaux sur un *ruban circulaire* et une matrice de transfert $\overline{T}_k(x)$.

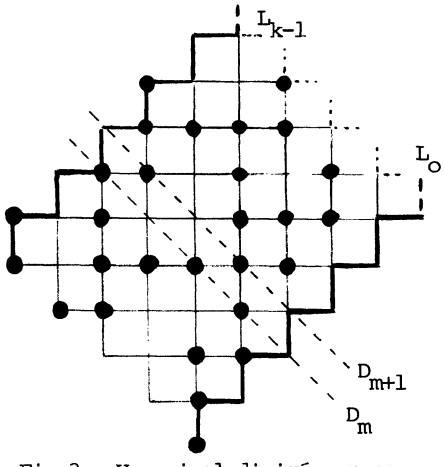

Fig.3 - Un animal dirigé sur un ruban borné.

Notons $a_n^k(C)$ (resp. $\bar{a}_n^k(C)$) le nombre d'animaux dirigés de taille n, de source C, bornés dans un ruban (resp. ruban circulaire) de largeur k. La série génératrice $\sum_{n\geq 0} \bar{a}_n^k(C)\, t^n$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur est le déterminant $\det(I_k - \bar{T}_k(x))$, en notant I_k la $2^k \times 2^k$ matrice unité. On a la forme asymptotique

$$\bar{a}_n^k(C) \sim (\bar{\mu}_k)^n\, \bar{a}(C) \quad . \tag{4}$$

Le calcul de $\bar{\mu}_k$ (comme celui de l'analogue μ_k), revient à un calcul de plus grande valeur propre. Nadal et al. [21] démontrent le résultat remarquable

$$\bar{\mu}_k = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2k} \quad , \tag{5}$$

ce qui implique $\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_k = 3$. Ils donnent aussi une formule explicite pour $\bar{a}(C)$, qui est aussi vecteur propre de la matrice de transfert pour la valeur propre $\lambda_k(x) = 1$.

Les méthodes de *renormalisation phénoménologique* leur permettent de donner des estimations précises de $\nu_\perp$ et $\nu_{/\!/}$ et de conjecturer $\nu_{/\!/} = 9/11$.

Pour une source circulaire, notons N_i le nombre de *trous* de largeur i, c'est-à-dire le nombre de séquences de i sites consécutifs "vacants" encadrés par deux sites "occupés" de la source.

PROPOSITION 1.- (Hakim, Nadal) *En notant* $\alpha_p = (2p+1)\frac{\pi}{2k}$, *on a*

$$\bar{a}_n^k(C) = \frac{1}{k} \sum_p (-1)^p \sin\alpha_p \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\sin[(i+\frac{1}{2})\alpha_p]}{\sin\frac{\alpha_p}{2}} \right)^{N_i} (1+2\cos\alpha_p)^{n-1} \quad . \tag{6}$$

Cette formule conjecturée par Nadal et al. [21] est démontrée par Hakim et Nadal [17] en considérant la matrice de transfert comme un opérateur agissant sur un espace de spins et en s'inspirant de techniques standard sur les systèmes intégrables. Ils donnent également une formule analogue, un peu plus compliquée, pour $a_n^k(C)$ (bords libres).

En faisant tendre k vers l'infini, on peut alors déduire de la proposition 1 les remarquables formules exactes suivantes

$$a_n = \sum_{0\leq i\leq n} \binom{n-1}{i} \binom{i}{[i/2]} \quad , \tag{7}$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+t}{1-3t}\right)^{1/2} - 1 \right] \quad , \tag{8}$$

d'où l'on déduit la forme asymptotique (1) avec $\mu=3$ et $\theta=1/2$. La formule (7) avait été devinée par Dhar et al. [14]. Avec l'analogue de la proposition 1 pour les bords libres, Nadal [20] démontre $\nu_\perp = 1/2$.

On trouvera au § 8 une autre preuve de (8) par Dhar [12], utilisant un modèle de gaz de Baxter. La formule exacte (6) permet d'engendrer par ordinateur des

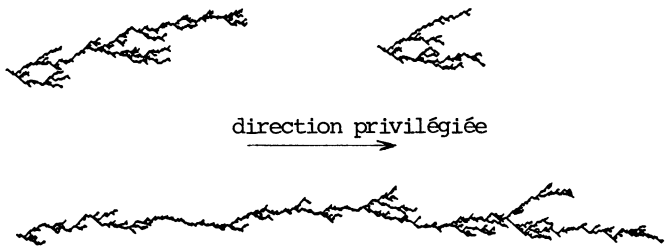

Fig.4- Animaux dirigés aléatoires de taille 500,1000,2000 (d'après Nadal, Derrida, Vannimenus).

animaux aléatoires ayant plusieurs milliers de points. Chaque animal de taille n est engendré avec la même probabilité $1/a_n$. La figure 4 rend bien compte du fait que l'interdiction de boucles dans les animaux dirigés ne changerait pas la classe d'universabilité.

§ 5 - BIJECTION ENTRE LES ANIMAUX DIRIGÉS DE DIMENSION DEUX (SUR RESEAU CARRÉ) ET CERTAINS CHEMINS DE DIMENSION UN (d'après Gouyou-Beauchamps et l'orateur [28]).

Soit F_n l'ensemble des chemins $\omega = (s_o = 0, \ldots, s_n)$ sur $\mathbb{Z}$ ayant des pas élémentaires vérifiant $|s_{i+1} - s_i| \leq 1$. Il y a en somme trois types de pas. Notons F_n^+ les chemins restreints à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $s_i \geq 0$.

Un calcul immédiat montre que la série génératrice des nombres $|F_{n-1}^+|$ est celle donnée par (8). Une bijection élémentaire montrerait aussi que $|F_{n-1}^+|$ est donnée par (7). Le problème revient donc à trouver une bijection entre F_{n-1}^+ et l'ensemble A_n des animaux dirigés sur réseau carré ayant un seul point source. Une telle bijection φ est construite dans [28].

Une source sans trous est dite *compacte* (voir figure 5). En fait, nous construisons une bijection plus générale ψ entre F_{n-1} et les animaux dirigés de taille n ayant une source compacte.

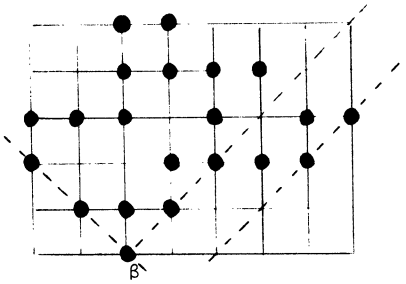

Fig.5 - Un animal dirigé à source compacte avec $s(A) = 3$, $l_{inf}(A) = 2$.

Notations. Soit A un animal dirigé (quelconque). Le nombre de ses points sources est noté $s(A)$. Soit β le point source d'ordonnée minimum. Soit b l'entier tel que β soit sur la droite d'équation $y = x+b$. La *demi-largeur inférieure* de l'animal A, notée $\ell_{inf}(A)$ est le minimum de $b-a$ pris parmi les entiers a tels que l'animal soit au-dessus de la droite d'équation $y = x+a$. Pour un chemin $\omega = (s_o, \ldots, s_n)$ de F_n,

notons $m(\omega)$ le minimum des entiers s_i pour $0 \le i \le n$ et soit $d(\omega) = s_n - m(\omega)$.

PROPOSITION 2 - (Gouyou-Beauchamps, Viennot). *Il existe une bijection ψ entre l'ensemble des chemins F_n et l'ensemble des animaux dirigés sur réseau carré, à source compacte, de taille $n+1$, vérifiant la relation suivante*

$$(9) \qquad m(\omega) = \ell_{inf}(\psi(\omega)) \quad \text{et} \quad 1+d(\omega) = s(\psi(\omega)) \quad \text{pour} \quad \omega \in F_n .$$

En particulier les animaux ayant un seul point source correspondent aux chemins de F_n tels que $s_n = m(\omega)$. Par renversement du temps, ces chemins sont en bijection avec F_n^+. On déduit ainsi la bijection φ annoncée. Pour tout chemin $\omega = (s_o, \ldots, s_n)$ de F_n^+, la demi-largeur inférieure des animaux $A = \varphi(\omega)$ est égale à s_n. Il est alors aisé de déduire (analytiquement ou bijectivement) la formule suivante conjecturée par Dhar [12].

COROLLAIRE 3. $$\ell_n = \frac{2.3^{n-1}}{a_n} - 2 .$$

De la relation (1) avec $\mu=3$, $\theta=\frac{1}{2}$, on déduit $\nu_\perp = \frac{1}{2}$. Notons $c_{n,p}$ le nombre d'animaux dirigés de taille n ayant une source compacte de cardinal p. On déduit aussi de la proposition 2 une autre conjecture de Dhar, démontrée aussi par Hakim et Nadal à partir de la relation (6), à savoir

$$(10) \qquad c_{n+1,p} = c_{n,p-1} + c_{n,p} + c_{n,p+1} .$$

Remarquons que $a_n = c_{n,1}$ est aussi le nombre d'animaux dirigés à source compacte, de taille n et ayant une demi-largeur inférieure nulle.

La formule la plus intriguante est probablement celle donnée par le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.- *Le nombre d'animaux dirigés à source compacte sur réseau carré de taille $n+1$ est 3^n.*

Je ne connais aucun moyen simple de le démontrer. La bijection ψ est obtenue en combinant trois opérateurs U,V,W agissant sur les animaux dirigés à source compacte. Ces opérateurs rajoutent un point à l'animal A. L'opérateur U ajoute un point source, V laisse invariant $s(A)$ et W diminue d'une unité ce nombre, sauf si $s(A)=1$, auquel cas $s(W(A))=1$. L'opérateur V est le plus délicat à définir.

Certaines propriétés des animaux sur ruban ont une traduction simple en terme de chemins. Par exemple, le fait d'être sur un ruban revient à dire que le chemin ω est restreint à un segment borné de $\mathbb{Z}$. En remarquant qu'un animal dirigé (général) peut être obtenu en enlevant les points sources d'un animal à source compacte, on pourrait envisager de redémontrer l'expression de Hakim, Nadal pour $a_n^k(C)$. Ceci serait assez délicat avec la seule bijection ψ. Il vaut mieux utiliser les

§ 7 et 8. Ceux-ci donnent la véritable structure combinatoire sous-jacente aux animaux dirigés.

§ 6 - EMPILEMENTS.

L'orateur a montré dans [26] que la bijection ψ pouvait être obtenue en composant trois bijections. Chacune de ces trois étapes utilise des outils introduits par ailleurs pour d'autres problèmes variés de combinatoire.

Soient X et P deux ensembles et π une application de P dans l'ensemble des parties de X. Un *empilement étiqueté* (sur X avec pièces dans P) est un ensemble (partiellement) ordonné $(E,\preccurlyeq)$ muni d'une application $\theta : E \to P$ vérifiant les deux conditions suivantes

(i) pour tout $x\in X$, $\{\alpha\in E , x\in\pi(\theta(\alpha))\}$ est une chaîne de E,

(ii) pour tout $\alpha,\beta\in E$, $\alpha\preccurlyeq\beta$, il existe une chaîne $\alpha = \alpha_1\preccurlyeq\alpha_2 \ldots\preccurlyeq\alpha_k = \beta$ telle que $\pi(\theta(\alpha_i))\bigcap\pi(\theta(\alpha_{i+1}))\neq\emptyset$ pour $1\leq i\leq k-1$.

L'ensemble X est la *base*, P l'ensemble des *pièces*. La relation " $\alpha\preccurlyeq\beta$ " est dite " α est *en-dessous* de β ". Cette définition formalise la notion intuitive d'empilements de pièces comme celui formé par des dominos sur un échiquier dessiné sur la figure 6.

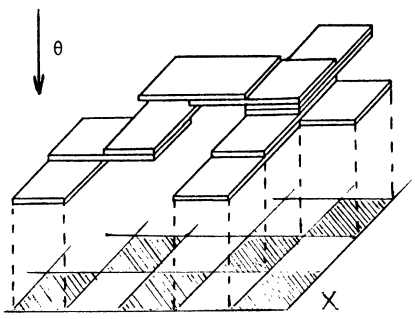

Fig.6 - Un empilement de pièces

Dans cette figure $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, les pièces sont les intérieurs des réunions de deux carrés élémentaires à coordonnées entières. L'application π est l'indentité, θ associe à tout domino de l'empilement sa "position" projetée sur l'échiquier. En général les pièces seront des parties de X et π est alors l'identité. Nous avons introduit π dans la définition générale car nous aurons besoin d'empiler des parties d'un ensemble X ayant une structure combinatoire (cycles ou chemins). En général X et P seront infinis. L'ensemble E sera toujours fini.

On définirait facilement la notion d'isomorphisme entre deux empilements ayant les mêmes triplets (X,P,π). On appelle *empilement* sur X avec pièces dans P (ou type d'empilement) un empilement étiqueté sur X avec pièces dans P défini à un isomorphisme près. Pour une définition plus rigoureuse, on se référera aux *"espèces de structures"* de Joyal [50]. Les empilements étiquetés forment une espèce. Les empilements sont les *types* de cette espèce. Par abus de language, nous dirons que les éléments d'un empilement sont des pièces.

Dans les problèmes de dénombrement on utilise les séries ordinaires pour les empilements, et les séries exponentielles pour les empilements étiquetés. Pour ces

derniers on supposera toujours que E est un segment $\{1,\ldots,n\}$.

Première étape : Animaux dirigés → empilements. Prenons $X = \mathbb{Z}$. Appelons *domino* une paire $(i,i+1)$ pour $i\in\mathbb{Z}$. Prenons pour P l'ensemble de ces dominos et pour π l'identité de X. Comme indiqué sur la figure 7, un animal dirigé sur réseau triangulaire devient un empilement de dominos sur $\mathbb{Z}$. La direction priviliégiée est le Nord. Chaque point de l'animal est remplacé par un domino.

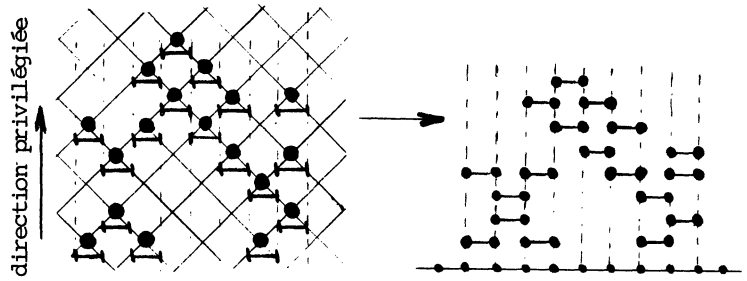

Fig.7 - La correspondance animaux dirigés → empilements.

LEMME 5 - *Cette correspondance entre animaux dirigés et empilements de dominos sur $\mathbb{Z}$ est bijective.*

Aux points sources correspondent les pièces minimales (rien en dessous). En particulier, aux animaux dirigés n'ayant qu'un seul point source correspondent les *pyramides*, c'est-à-dire les empilements n'ayant qu'une seule pièce minimale.

Un empilement E est dit *strict* lorsque la condition suivante est vérifiée

(11) $$\alpha,\beta\in E\ ,\ \alpha\prec\beta\ ,\ \pi(\theta(\alpha)) = \pi(\theta(\beta)) \Rightarrow \exists\,\gamma\in E\ ,\ \alpha\prec\gamma\prec\beta\ .$$

Dans la bijection du lemme 5, aux animaux sur réseau carré correspondent les empilements stricts (de dominos sur $\mathbb{Z}$).

Deuxième étape : Empilements → chemins. Ici la base X est quelconque. Soient u et v deux éléments de X. Les pièces sont maintenant de deux sortes : les *cycles* (ou permutations circulaires $\gamma : \Gamma\to\Gamma$ sur une partie $\Gamma\subseteq X$) et les *chemins* $\omega = (s_o = u,\ldots,s_n = v)$ allant de u à v et ne se recoupant pas avec eux-mêmes. On définit $\pi(\gamma)=\Gamma$ et $\pi(\omega) = \{s_o,\ldots,s_n\}$.

LEMME 6 - *Il existe une bijection entre les chemins ω de X allant de u à v et les pyramides E sur X dont les pièces sont des cycles, sauf la pièce minimale qui est un chemin (allant de u à v et ne se recoupant pas avec lui-même). De plus, pour tous sommets x et y de X, le nombre de pas élémentaires (x,y) de ω est égal au nombre de pas élémentaires (x,y) du chemin de la pyramide, augmenté du nombre de cycles γ de la pyramide tels que $y=\gamma(x)$.*

En particulier pour $X=\mathbb{Z}$, un chemin allant de 0 à v appartient à F_n (défini au § 5) si et seulement si la pyramide associée est du type suivant : le chemin formant la pièce minimale est la séquence $(0,1,2,\ldots,v)$ si $v\geq 0$ (resp.

$(0,-1,-2,\ldots,v)$ si $v<0$) ; les cycles sont de longueur un ou deux, ces derniers étant formés de deux points consécutifs. Ces cycles sont identifiés respectivement aux pièces appelées *monomino* $\{i\}$ et dominos $\{i,i+1\}$. Si le *pas stationnaire* $s_{i+1} = s_i$ est interdit pour le chemin ω, les empilements ne sont formés que de dominos.

En combinant ces remarques avec les lemmes 5 et 6, on déduit que le nombre b_n d'animaux de taille n, sur réseau triangulaire et ayant un seul point source est

$$b_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} . \tag{12}$$

Cette formule avait été conjecturée par Dhar et al. [14], puis obtenue par Dhar [12] en utilisant un modèle de gaz de Baxter (voir § 8). Asymptotiquement, $b_n \sim 4^n\, n^{-1/2}$ et l'hypothèse d'universalité est bien vérifiée.

Troisième étape : Empilements → Empilements stricts. C'est une bijection assez technique transformant un empilement strict de dominos sur $\mathbb{N}$ en un empilement de monominos et dominos sur les entiers positifs pairs (voir figure 8). Cette bijection est inspirée d'une autre, beaucoup plus simple, provenant du modèle combinatoire pour les polynômes orthogonaux généraux de [55] et évoqué au § 7.

En combinant les trois étapes ci-dessus, on retrouve alors très exactement la construction de $\psi(\omega)$ du § 5 dans le cas où $\omega \in F_n^+$ (c'est-à-dire $\ell_{inf}(\psi(\omega)) = 0$). Très peu reste alors à faire pour définir $\psi(\omega)$ dans le cas général.

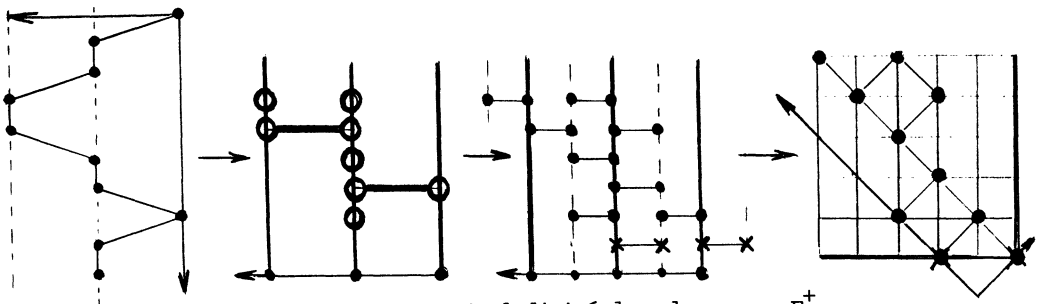

Fig.8 - La correspondance chemin → animal dirigé, dans le cas $\omega \in F_n^+$.

Empilements et monoïdes de commutation de Cartier et Foata.

Cartier et Foata ont introduit en [38] les *monoïdes de commutation*, en liaison avec le célèbre "master theorem" de MacMahon et les propriétés de réarrangements de suites. Foata [44], [45] a montré que cet outil fournissait un modèle combinatoire pour les preuves bijectives de théorèmes classiques d'algèbre matricielle (inversion de matrice, identité de Jacobi, ...). Dans le cas des chemins et cycles (lemme 6) Dulucq et l'orateur [40] ont introduit les empilements afin de simplifier et d'unifier ces considérations bijectives. Ce formalisme s'applique aussi à d'autres

domaines combinatoires (polynômes orthogonaux [55] et polynômes de couplage d'un graphe [39]).

Les monoïdes de commutation sont définis comme suit. Soit $Mo(P)$ (noté aussi P^*) le *monoïde libre* engendré par P. Soit C une partie de $P\times P$. Le monoïde de commutation engendré par P et C est le monoïde quotient de $Mo(P)$ par la congruence engendrée par les relations de commutation $\alpha\beta\equiv\beta\alpha$ pour $(\alpha,\beta)\in C$. Pour toute application $\pi: P\to X$ on associe l'ensemble C des paires (α,β) telles que $\pi(\alpha)\cap\pi(\beta)=\emptyset$. Chaque élément du monoïde de commutation associé est en bijection avec un empilement sur X de pièces dans P. Chaque mot de longueur n d'une même classe d'équivalence est en bijection avec un empilement étiqueté $(E=\{1,..,n\},\preccurlyeq)$ tel que $i<j$ dès que la pièce i est au-dessous de j. Le lemme 6 est simplement une version déguisée d'un théorème de Cartier, Foata [38].

§ 7 - INVERSION

Dans ce paragraphe, on suppose que la base X et l'ensemble P des pièces des empilements sont finis. Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire et v une application $P\to\mathbb{K}$ appelée *valuation*. En pratique $\mathbb{K}$ est l'anneau des entiers ou l'anneau des polynômes commutatifs à plusieurs variables et à coefficients entiers. La *valuation d'un empilement* $(E,\ ,\theta)$ est le produit $\prod_{\alpha\in E} v(\theta(\alpha))$. Un empilement est dit *trivial* lorsque les éléments de E sont deux à deux incomparables. Ceci revient à dire que les ensembles $\pi(\theta(\alpha))$ sont deux à deux disjoints. Notons $D(x)$ le polynôme défini par la relation

$$D(x) = \sum_E (-1)^{|E|}\, v(E)\, x^{|E|}, \tag{13}$$

où la sommation est parmi les empilements triviaux sur X avec pièces dans P.

LEMME 7 - *La série génératrice des empilements valués sur X avec pièces dans P est*

$$\sum_E v(E)\, x^{|E|} = \frac{1}{D(x)}\,. \tag{14}$$

Ce lemme est une réécriture du théorème 2.4 de [38] donnant la fonction de Möbius des monoïdes de commutation. La notion de fonction de Möbius d'un ensemble (partiellement) ordonné, généralisant celle bien connue sur les entiers, a été popularisée par Rota [52]. Elle joue un grand rôle en combinatoire.

L'avantage de la version présentée ici est de pouvoir énoncer un lemme plus fort sur la série génératrice des empilements dont les pièces minimales sont fixées à l'avance. Celle-ci prend la forme suivante

$$\sum_F v(F)\, x^{|F|} = \frac{N(x)}{D(x)}\,, \tag{15}$$

où $N(x)$ est un certain polynôme de $\mathbb{K}[x]$.

L'idée de la preuve est la suivante. Soit $N(x)=\sum_{(E,F)} (-1)^{|E|} v(E)v(F)x^{|E|+|F|}$,

avec E empilement trivial, F empilement ayant les contraintes demandées. Par "transport" d'une pièce maximale d'un empilement à l'autre, on définit une involution groupant deux par deux les termes de même valuation et de signes opposés. Il reste un nombre fini de termes donnant le numérateur $N(x)$. Ceux-ci correspondent aux paires (E,F) pour lesquelles ce "transport" n'est plus possible.

On applique la relation (15) aux empilements de dominos sur un segment $X=\{1,\ldots,k\}$. La valuation d'un domino est prise égale à 1. Notons $U_k(x)$ le polynôme de Tchebycheff de deuxième espèce. Il est défini par $\sin(k+1)\xi=\sin\xi\ U_k(\cos\xi)$. Le polynôme $D(x)$ défini par (13) est alors le polynôme réciproque $F_k^*(x)$ du polynôme orthogonal $F_k(x) = U_k(x/2)$. Une simple application des lemmes 5 et 7 montre que la série génératrice des animaux dirigés bornés sur un ruban de largeur k dans un réseau triangulaire est $1/F_k^*(x)$. Si les points sources sont imposés, on est alors dans le cas de la relation (15). Le numérateur $N(x)$ est un produit de polynômes $F_i^*(x)$ dont les indices i correspondent aux largeurs des trous de la source. Lorsque la base X est un cycle C_k ayant k sommets, on a les animaux sur ruban circulaire, et il suffit de remplacer le polynôme $U_k(x)$ par le polynôme de Tchebycheff de première espèce $T_k(x)$ défini par $\cos k\,\xi = T_k(\cos\xi)$.

A nouveau, le cas des animaux bornés dans un ruban sur réseau carré est obtenu en combinant (15) avec la troisième étape du § 6. L'apparition des monominos dans les empilements revient à remplacer x par x-1 . Il ne reste plus beaucoup de calculs pour retrouver la proposition 1 et son analogue à bords libres.

Modèle combinatoire pour les polynômes orthogonaux.

Les considérations précédentes font partie du modèle combinatoire pour les polynômes orthogonaux généraux de Flajolet [42] et Viennot [55]. Ce modèle est en terme de chemins valués dits de Motzkin. Nous rappelons l'idée principale, traduite en terme d'empilements. Soit $v(\{i\})=b_i$ et $v(\{i-1,i\})=\lambda_i$ les valuations respectives des monominos et dominos de $\mathbb{N}$. Les polynômes $D_k(x)$ définis par (13) avec $X=\{0,\ldots,k-1\}$ sont les réciproques des polynômes $P_k(x)$ définis par la récurrence linéaire

$$P_{k+1}(x) = (x-b_k)\,P_k(x) - \lambda_k\,P_{k-1}(x)\ ,\ P_o=1\ ,\ P_1=x-b_1\ . \tag{16}$$

Une bijection (en fait la même que celle prouvant (15)) montre que ces polynômes sont orthogonaux pour la suite de moments $M_n=\sum_P v(P)$, où la sommation est parmi les pyramides sur $\mathbb{N}$, formées de n monominos ou dominos et dont la pièce minimale contient 0 . La série génératrice de ces pyramides admet un développement en fractions continuées du type Jacobi-Stieltjes. Borner les empilements sur un segment $\{0,\ldots,k-1\}$ revient à prendre les réduites de ces fractions continuées. Celles-ci se mettent sous la forme (15). Le cas des polynômes de Tchebycheff ci-dessus revient à prendre $b_k= 0$, $\lambda_k= 1$. Pour les animaux sur réseau carré on a

$b_k = 1$, $\lambda_k = 1$. On retrouve alors la suite de polynômes orthogonaux considérée par Nadal et al. [21] dans leur preuve de la relation (5) et du calcul du vecteur propre $\bar{a}(C)$. Les moments correspondants deviennent des nombres d'empilements (ici les nombres dits de Catalan et de Motzkin). Signalons que la bijection de la troisième étape du § 6 est inspirée d'une bijection (beaucoup plus simple) expliquant les propriétés dites de *contraction* dans les fractions continuées.

Autres remarques : La relation (15) apparaît aussi dans bien d'autres problèmes combinatoires. Si les pièces sont des cycles valués à partir des éléments d'une matrice A , $D(x) = \det(I-A)$ et le lemme 7 est une forme déguisée du "master theorem" de Mac Mahon [51], tandis que la relation (15) devient la formule classique d'inversion de la matrice (I-A) .

Si les pièces sont des dominos (valués par 1) sur un graphe fini (paire de deux sommets voisins), alors le polynôme D(x) défini par (13) est appelé *polynôme de couplage* du graphe. Le calcul de ce polynôme pour un réseau planaire (du moins sa "limite thermodynamique") est un célèbre problème ouvert de mécanique statistique. Le calcul du coefficient de plus haut degré (nombre de couplages parfaits) est équivalent à la résolution du modèle d'Ising (d=2 , champ magnétique extérieur nul). Ces polynômes de couplages ont des zéros réels. Une preuve (presque entièrement) bijective est donnée par de Sainte-Catherine [39] en combinant (15), le lemme 6 et une idée de Godsil [48].

§ 8 - ANIMAUX DIRIGÉS EN DIMENSION 3 ET MODELES DES HEXAGONES DURS.

Soit D une partie connexe finie du réseau triangulaire. Notons $h(n,D)$ le nombre de façons de choisir n sommets deux à deux non reliés par une arête (voir figure 9). La fonction de partition du modèle dit des *hexagones durs* est

$$Z_D(t) = \sum_{n \geq 0} h(n,D)\, t^n \,. \tag{17}$$

Rappelons que la limite thermodynamique lorsque D devient grand (dans un sens à préciser) et

$$Z(t) = \lim_{"D \to \infty"} (Z_D(t))^{1/|D|} \,. \tag{18}$$

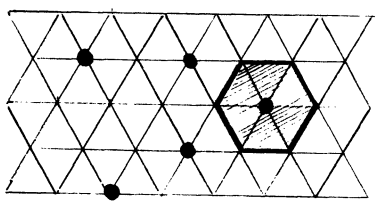

Fig.9 - Une configuration de points contribuant à $h(n,D)$.

En supposant l'existence de cette limite, Baxter a récemment résolu ce modèle [30],[1] chapitre 14, et Baxter Pearce [33]. Dans les deux premières références, il suppose de plus certaines propriétés d'analycité de la fonction $\log Z(t)$. Le modèle possède

une transition de phase pour $t_c = \frac{1}{2}(11+5\sqrt{5}) \simeq 11{,}09$.

Notons $RR_I(q)$ et $RR_{II}(q)$ la valeur commune des deux membres des identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(1-q)\dots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}, \tag{19}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)\dots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} . \tag{20}$$

Pour $0<t<t_c$, la fonction $Z(t)$ est obtenue en éliminant q entre les deux équations suivantes

$$t = -q\left[\frac{R_{II}(q)}{R_I(q)}\right]^5 , \tag{21}$$

$$Z = \prod_{n\geq 0} \frac{(1-q^{6n+2})(1-q^{6n+3})^2(1-q^{6n+4})(1-q^{5n+1})^2(1-q^{5n+4})^2(1-q^{5n})^2}{(1-q^{6n+1})(1-q^{6n+5})(1-q^{6n})^2(1-q^{5n+2})^3(1-q^{5n+3})^3} . \tag{22}$$

La résolution est basée sur la méthode des matrices de transfert "par quadrant". Baxter introduit un modèle plus général avec deux paramètres L et M sur un réseau carré avec interactions diagonales. La variable t, considérée comme une variable formelle dans les séries génératrices ci-dessous, est ici un nombre réel positif appelé *activité* (ou fugacité) du gaz. Baxter détermine alors des relations entre les paramètres L, M et t pour que les matrices de transfert commutent. Une relation biquadratique est obtenue entre e^L et e^M, permettant une paramétrisation avec des fonctions elliptiques thêta. Le modèle initial des hexagones durs correspond au cas limite du régime I de Baxter, soit $L=0$, $M \to -\infty$.

Dhar [12] a montré que la série génératrice des animaux dirigés (carrés ou triangulaires, d=2) pouvait se ramener, par changement de variables, au modèle des hexagones généralisés ci-dessus. Les paramètres ne vérifient pas la relation qui rendrait le modèle soluble, mais Baxter [32] démontre qu'il s'agit alors d'un prolongement pour des valeurs non physiques de l'activité ($t<0$) d'un modèle résolu par Verhagen [37] (modèle d'Ising avec champ magnétique sur réseau triangulaire avec certaines relations entre paramètres). Dhar en déduit la série génératrice (8) et celle correspondant à (12).

Dans un autre article [13], Dhar considère la série génératrice $g(t)$ des animaux dirigés sur $\mathbb{Z}^3$ (avec quatre pas diagonaux autorisés pour les chemins dirigés dans la direction (1,1,1)). Il prouve avec des méthodes probabilistes (modèle de "croissance de cristaux") que $g(t)$ est liée à la *densité* du gaz $\rho(t) = t\frac{d}{dt}\log Z(t)$ du modèle hexagonal de Baxter par la relation

$$f(t) = -\rho(-t) . \tag{23}$$

Une démonstration purement combinatoire de cette relation est donnée par

l'orateur en [27]. En effet, le polynôme (17) est du type (13). Les pièces sont formées par les six sommets des hexagones élémentaires du réseau hexagonal (voir figure 10).

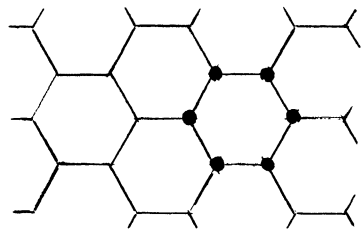

Fig.10 - Une pièce pour les empilements d'hexagones.

Le lemme 7 interprète $Z^{-1}(t)$ comme empilement d'hexagones. On passe aux séries exponentielles avec les empilements étiquetés. On peut alors appliquer la technique du *composé partitionnel* de Foata, Schützenberger [43],[46] (ou sa version modernisée par Joyal [50]) pour interpréter $\log Z^{-1}(t)$ comme série génératrice de certaines pyramides étiquetées. On peut alors bien comprendre le passage à la limite (15). Il s'agit des "effets de bords" dans les pyramides bornés dans un "tube" de section D. Ensuite appliquer l'opérateur $t\frac{d}{dt}$ revient à "supprimer" les étiquettes des pyramides. En revenant aux séries ordinaires, $-\rho(-t)$ est ainsi la série génératrice des pyramides d'hexagones. De manière analogue à la dimension deux, ces pyramides sont en bijection avec les animaux dirigés sur réseau cubique avec pas diagonaux.

Dhar déduit de (23) et de la solution de Baxter, le comportement asymptotique du nombre d'animaux. Il correspond à un point critique non physique du système $t_{NP} = -1/t_c$. On déduit $\mu = \frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})$ et $\theta = 5/6$. Remarquons que $\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5}) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^5$ provient de la fraction continuée ($q=1$) de Rogers-Ramanujan

$$\frac{R_{II}(q)}{R_I(q)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{\ddots}}} \qquad (23)$$

Remarque : Une preuve bijective fort simple de cette célèbre identité peut être faite avec les empilements de dominos sur $\mathbb{N}$ en prenant pour valuation $v(\{i-1,i\}) = -q^i$. En fait $R_I(q)$ et $R_{II}(q)$ sont des cas particuliers des polynômes $D(x)$ et $N(x)$ apparaissant dans (15).

On pourrait aussi considérer avec Dhar les animaux dirigés sur le réseau dit "*cubique centré*" et montrer combinatoirement l'équivalence avec le modèle dit des *carrés durs*. Ce modèle est aussi le cas limite du modèle de Baxter à deux paramètres, correspondant à $L=M=0$. Pour ces valeurs le modèle n'est pas résolu. Les pyramides correspondantes sont certaines pyramides de carrés.

Enfin remarquons que le modèle des hexagones durs (resp. carrés durs) revient à un *modèle de Potts* $q=2$ (resp. $q=3$). D'autre part, Andrews et Baxter [29] viennent d'étendre la résolution du modèle hexagonal avec paramètres dans le cas où les variables $\sigma_i = 0$ ou 1 attachée à chaque sommet du réseau triangulaire peuvent

prendre p valeurs différentes. Des analogues multilinéaires des identités du type Rogers-Ramanujan sont démontrées. Une équivalence avec certains *modèles de vertex* est démontrée.

§ 9 - DERNIÈRES REMARQUES.

Il serait fort intéressant d'avoir une preuve combinatoire directe du fait que la série génératrice des pyramides d'hexagones est donnée par les relations (21), (22), (23), et de comprendre ce qui fait la différence avec les dénombrements de pyramides de carrés.

Le calcul de la densité et du *"paramètre d'ordre"* pour les différents régimes du modèle hexagonal (avec paramètres) fait apparaître, outre les identités de Rogers-Ramanujan, douze autres identités du même type. Six sont nouvelles. Elles avaient été devinées par Baxter et sont démontrées par Andrews [57]. Le fait surprenant est qu'elles sortent de la classification usuelle des fonctions hypergéométriques. Il serait particulièrement intéressant de comprendre pourquoi les identités du type Rogers-Ramanujan interviennent sans cesse dans la résolution du modèle hexagonal (voir Baxter [31]).

Les identités de Rogers-Ramanujan peuvent être interprétées en terme de *partitions d'entiers*, que l'on représente habituellement par un certain animal dirigé appelé *diagramme de Ferrers*, (voir Andrews [56]). La recherche d'une preuve bijective a fait couler beaucoup d'encre chez les combinatoristes, voir Garsia, Milne [47]. Ces identités ont une interprétation en termes *d'algèbres de Kac-Moody* (voir l'exposé de Mac_Donald à ce même séminaire [59]). Ces algèbres semblent aussi avoir un rôle à jouer dans la compréhension de la résolubilité d'un modèle. Des idées générales sont avancées (*relation triangle-étoile, relation d'inverse*). On verra par exemple Baxter [1] ou Jaekel, Maillard [34], [35].

Des produits infinis en $(1-q^i)$ apparaissent dans beaucoup de modèles résolubles. La fameuse fonction Δ apparaît dans le modèle dit des *boucles planaires*. Bien qu'une étude combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi soit commencée (Dumont [41], Flajolet [42], Viennot [53]), celle des fonctions thêta et formes modulaires reste à faire. Les modèles résolubles de la mécanique statistique constituent peut-être un bon point de départ pour cette étude.

Enfin les physiciens s'intéressent aux *animaux dirigés croissants* (modèle d'agrégation dirigée, voir par exemple Nadal et al. [22]). Ce sont des animaux dirigés étiquetés par les entiers $1,2,\ldots,n$, de façon que les étiquettes aillent en croissant le long des chemins dirigés. Les célèbres *tableaux de Young* [58] correspondant aux animaux *"diagramme de Ferrers"* en sont un cas particulier. Trois types de forme d'animaux dirigés conduisent à des formules appelées en combinatoire *formules d'équerre*. Ce sont les seuls types de telles formules connues actuellement : tableaux de Young, tableaux de Young tronqués, arbres (binaires) croissants corres-

pondant aux animaux sans boucles. Y a-t-il d'autres formes donnant d'autres formules d'équerre ? Les tableaux de Young sont associés aux représentations du groupe symétrique. Quelle structure algébrique joue un rôle analogue pour les animaux dirigés croissants ?

Remerciements - Je remercie M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J.P. Nadal et J. Vannimenus, pour de passionnantes discussions sur la mécanique statistique. Je remercie aussi D. Foata et J.L. Verdier pour plusieurs remarques, ainsi que A. Douady qui m'a fait connaître J. Vannimenus, ce dernier m'ayant fait connaître les animaux dirigés.

BIBLIOGRAPHIE

A. *Ouvrages généraux et articles de synthèse.*

Une revue des modèles solubles connus actuellement est :

[1] R. BAXTER, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, New-York, 1982.

Des livres de base sur la mécanique statistique sont :

[2] D. RUELLE, *Statistical mechanics, rigorous results*, Benjamin, New-York, 1969,

[3] C. DOMB et M.S. GREEN, eds, *Phase transition and critical phenomena*, Academic Press, New-York, 1974.

Pour les méthodes combinatoires en physique statistique, une solution combinatoire du modèle d'Ising et une formulation dans le langage des graphes, voir respectivement

[4] J.K. PERCUS, *Combinatorial methods*, Applied mathematical sciences, vol. 4, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1971,

[5] P.W. KASTELEYN, *Graph theory and crystal physics*, in "Graph theory and theoretical physics", F. Harary ed., Academic Press, New-York, 1967, 43-110,

[6] F.Y. WU, *Graph theory in statistical physics*, in "Studies in foundations and combinatorics", Advances in Math. supplementary studies, vol. 1, 1978.

Pour une revue très récente des problèmes de percolation, percolation dirigée et animaux voir (avec les articles de synthèse cités)

[7] M. SAHIMI, *Critical exponents and thresholds for percolation and conduction*, in "The mathematics and physics of disordered media", Lecture Notes in Maths n° 1035, Springer-Verlag, New-York/Berlin (1983), 314-346.

B. *Articles sur les animaux dirigés.*

[8] N. BREUER, *Corrections to scaling for directed branched polymers (lattice animals)*, preprint (1983), soumis à Z. Physik B.

[9] N. BREUER et H.K. JANSSEN, *Critical behaviour of directed branched polymers and the dynamics at the Yang-Lee edge singularity*, Z. Physik B, 48 (1982) 347-350.

[10] J.L. CARDY, *Directed lattice animals and the Lee-Yang edge singularity*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L593-L595.

[11] A.R. DAY et T.C. LUBENSKY, ε *expansion for directed animals*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 285-L 290.

[12] D. DHAR, *Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's Hard-Square Lattice-Gas model*, Phys. Rev. Lett., 49 (1982), 959-962.

[13] D. DHAR, *Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in 3 dimensions*, Phys. Rev. Lett., 59 (1983), 853-856.

[14] D. DHAR, M.K. PHANI et M. BARMA, *Enumeration of directed site animals on two-dimensional lattices*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 279-L 284.

[15] F. FAMILY, *Relation between size and shape of isotropic and directed percolation clusters and lattice animals*,J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 583-L 592.

[16] J.E. GREEN et M.A. MOORE, *Application of directed lattice animal theory to river networks*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 597-L 599.

[17] V. HAKIM et J.P. NADAL, *Exact results for 2 D directed animals on a strip of finite width*, J. Phys. A : Math. Gen., 16 (1983), L 213-L 218.

[18] H. HERRMANN, F. FAMILY et H.E. STANLEY, *Position-space renormalisation group for directed branched polymers*, J. Phys. A : Math. Gen., 16 (1983), L 375-L 379.

[19] T.C. LUBENSKY et J. VANNIMENUS, *Flory approximation for directed branched polymers and directed percolation*, J. Physique, 43 (1982), L 377-L 381.

[20] J.P. NADAL, *Etude de systèmes dirigés en physique statistique*, Thèse 3ème cycle, Univ. d'Orsay, 1983.

[21] J.P. NADAL, B. DERRIDA et J. VANNIMENUS, *Directed lattice animals in 2 dimensions : numerical and exact results*, J. Physique, 43 (1982), 1561.

[22] J.P. NADAL, B. DERRIDA et J. VANNIMENUS, *Directed Diffusion-controlled Aggregation versus directed animals*, Preprint (1983).

[23] S. REDNER et A. CONIGLIO, *Flory theory for directed lattice animals and directed percolation*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982, L 273 - L 278.

[24] S. REDNER et Z.R. YANG, *Size and shape of directed lattice animals*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 177 - L 187.

[25] H.E. STANLEY , S. REDNER et Z.R. YANG, *Site and bond directed branched polymers for arbitrary dimensionality : evidence supporting a relation with the Lee-Yang edge arbitrary*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), L 569 - L 573.

[26] G. VIENNOT, *Combinatorial solution of the 2D directed lattice animals problem with heaps of dominos*, en préparation.

[27] G. VIENNOT, *Directed animals and combinatorial interpretation of the density of a gaz*, destiné à Advances in Applied Maths.

[28] G. VIENNOT et D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *The number of directed animals*, destiné à Advances in Maths.

C. *Autres articles cités de mécanique statistique.*

[29] G.E. ANDREWS, R.J. BAXTER et P.J. FORRESTERS, *Eight vertex SOAS model and generalized Rogers-Ramanujan type identities*, preprint (1984).

[30] R.J. BAXTER, *Hard hexagons : exact solution*, J. Phys. A : Math. Gen. 13 (1980) L 61 - L 70.

[31] R.J. BAXTER, *Rogers-Ramanujan identities in the hard hexagon model*, J. Stat. Physics, 26 (1981), 427-452.

[32] R.J. BAXTER, *Lettre à Dhar*, citée dans [12].

[33] R.J. BAXTER et P.A. PEARCE, *Hard hexagones : interfacial tension and correlation length*, J. Phys. A : Math. Gen., 15 (1982), 897-910.

[34] M.T. JAEKEL et J.M. MAILLARD, *Modèles solubles en mécanique statistique*, Proc. R.C.P. 25, vol.29, Publ. IRMA, Strasbourg (1982), 93.

[35] J.M. MAILLARD, *Equations fonctionnelles en mécanique statistique*, Note CEA-N-2332, (1983).

[36] G. PARISI et N. SOURLAS, Phys. Rev. Lett. 14 (1981), 871.

[37] A.M.W. VERHAGEN, J. Stat. Phys., 15 (1976), 219.

D. *Articles combinatoires cités.*

[38] P. CARTIER et D. FOATA, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Lecture Notes in Maths. n°85, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1969.

[39] M. de SAINTE CATHERINE, *Couplage et Pfaffien en combinatoire et physique*, Thèse 3ème cycle, Université de Bordeaux I, 1983.

[40] S. DULUCQ et G. VIENNOT, *The Cartier-Foata commutation monoid revisited with heaps of pieces*, manuscrit, 1983.

[41] D. DUMONT, *Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi*, Advances in Maths., 41 (1981), 1-39.

[42] P. FLAJOLET, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math., 32 (1980), 125-161.

[43] D. FOATA, *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*, Presses de l'Univ. de Montréal, (1974).

[44] D. FOATA, *A non-commutative version of the matrix inversion formula*, Advances in Maths., 31 (1979), 330-349.

[45] D. FOATA, *A combinatorial proof of Jacobi's identity*, Annals of Discrete Maths. 6 (1980), 125-135.

[46] D. FOATA, M.P. SCHÜTZENBERGER, *Théorie géométrique des polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Maths. n°138, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1970).

[47] A. GARSIA, S. MILNE, *A Rogers-Ramanujan bijection*, J. Combinatorial Th., A, 31 (1981), 289-339.

[48] C.D. GODSIL, *Matchings and walks in graphs*, J. Graphs Th., 5 (1981), 285-291.

[49] S.N. JONI et G.C. ROTA, *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Studies in Applied Maths., 61 (1979), 93-139.

[50] A. JOYAL, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Maths., 42, (1981), 1-82.

[51] P.A. MACMAHON, *Combinatory Analysis*, Cambridge Univ. Press, London, 1915. Réimpression Chelsea, New-York, (1960).

[52] G.C. ROTA, *On the foundations of combinatorial theory, I. Theory of Möbius functions*, Z. Wahrsch. Band 2, Heft 4, (1964), 340-368.

[53] G. VIENNOT, *Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi*, J. Combinatorial Th. A, 29 (1980), 121-133.

[54] G. VIENNOT, *Théorie combinatoire des nombres d'Euler et Genocchi*, Séminaire Théorie des Nombres 1981/82, Publication Université de Bordeaux I, 94 p.

[55] G. VIENNOT, *Théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Notes de séminaire de l'Univ. du Québec à Montréal, (1983), 165 p.

E. *Autres articles ou ouvrages cités.*

[56] G.E. ANDREWS, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Maths. and its applications, G.C. Rota ed., vol.2, Addison-Wesley, Reading, (1976).

[57] G.E. ANDREWS, *The hard-hexagon model and Rogers-Ramanujan identities*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 78, (1981), 5290-5292.

[58] P. CARTIER, *La théorie classique et moderne des fonctions symétriques*, Séminaire Bourbaki, exposé n°597, Astérisque n°105-106, (1983), 1-23.

[59] I.G. MACDONALD, *Affine Lie algebras and modular forms*, Séminaire Bourbaki, exposé n°577, Lecture Notes in Maths. n°901, Springer-Verlag, Berlin/New-York, (1981), 258-275.

Gérard VIENNOT
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX (FRANCE)