Astérisque

H. BLAINE LAWSON JR.

Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 624, p. 197-211

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__197_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983/84, n° 624 Février 1984

SURFACES MINIMALES ET LA CONSTRUCTION DE CALABI-PENROSE

par H. Blaine LAWSON, Jr.

§ 1. Il y a longtemps que la théorie des surfaces minimales joue un rôle important en géométrie et en analyse. Récemment, elle est même devenue un outil important pour d'autres sujets (la topologie et la relativité générale, par exemple). Les sous-variétés minimales compactes de la sphère présentent un intérêt particulier parce que les cônes construits sur elles dans l'espace euclidien sont exactement les espaces tangents aux points singuliers des variétés minimales généralisées, qu'on définit maintenant.

Soit $\overline{M}$ une variété riemannienne de dimension $\overline{n}$, et considérons un sous-ensemble $T \subset \overline{M}$ qui est une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension n et de classe C^1 dans $\overline{M}$. Supposons que la mesure de Hausdorff de T en dimension n soit localement finie. Alors, T est un *sous-ensemble minimal* de dimension n si pour chaque champ de vecteurs V à support compact dans $\overline{M}$, on a

$$\frac{d}{dt} H^n[\varphi_t(K \cap T)]\big|_{t=0} = 0$$

où $K = \mathrm{supp}(V)$, φ_t = le flot de V, et H^n = la mesure de Hausdorff de dimension n. Nous rappelons un résultat classique.

PROPOSITION 1.1 (Federer [F]).— *Tout sous-ensemble analytique complexe d'une variété kählérienne est un sous-ensemble minimal.*

On est donc bien fourni en exemples ! Nous pouvons passer maintenant aux sous-ensembles paramétrés.

Soit M une variété de dimension n et soit $f : M \to \overline{M}$ une application propre de classe C^1. Alors f est une *application minimale* si son image $f(M)$ est un sous-ensemble minimal (de dimension n). Quand $f : M \to \overline{M}$ est une immersion, on peut considérer le fibré induit $f^*(T\overline{M})$ muni de la connexion $\overline{\nabla}$ induite de la connexion riemannienne de $\overline{M}$. On a la décomposition orthogonale $f^*(T\overline{M}) = TM \oplus NM$, où TM est le fibré tangent à M, et on peut définir la *seconde forme fondamentale* de l'immersion f par

$$B_{V,W} = (\overline{\nabla}_V W)^N$$

où V, W sont des champs de vecteurs tangents à M. Puisque $\overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V = [V,W]$, on trouve que $B_{V,W} = B_{W,V}$ et B est simplement une section du fibré

$\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, NM)$. La trace de B est un champ de vecteurs normaux $H \equiv \mathrm{trace}(B)$ qui s'appelle la *courbure moyenne* de f . Un calcul classique montre que l'immersion f est minimale si et seulement si $H \equiv 0$ (voir $[L_2]$).

En dimension 1 , les immersions minimales et isométriques (i.e., paramétrées par la longueur d'arc) sont les géodésiques. En dimension 2 , les immersions minimales sont exactement les immersions qui sont harmoniques pour la structure conforme induite (voir $[EL_1]$). Un peu plus généralement, soit $f : \Sigma \to \overline{M}$ une application harmonique d'une surface de Riemann telle que, en chaque point, df soit conforme ou bien égale à zéro. Alors f est encore minimale et ses points singuliers (ceux où df s'annule) sont isolés. Une telle immersion s'appelle une *immersion minimale ramifiée*. On note que, si $\overline{M}$ est de classe C^ω , alors f est aussi de classe C^ω . Nous avons le fait intéressant suivant (cf. $[EL_1]$).

PROPOSITION 1.2.– *Soit* Σ *une surface de Riemann de genre zéro. Alors une application* $f : \Sigma \to \overline{M}$ *harmonique et non-constante* ($\overline{M}$ *est ici n'importe quelle variété riemannienne) est automatiquement une immersion minimale ramifiée.*

Ce n'est pas vrai pour les autres surfaces de Riemann.

C'est un problème classique de construire, ou au moins de démontrer, l'existence de sous-variétés minimales compactes dans une variété riemannienne $\overline{M}$ donnée et aussi, de comprendre un peu la totalité de tous ces objets situés dans $\overline{M}$. Comme nous venons de le dire, le cas $\overline{M} = S^n(1)$ est fondamental. De plus il semble qu'en ce moment les physiciens s'y intéressent aussi beaucoup grâce à la proposition 1.2.

§ 2. Il convient d'établir ici un lemme simple mais important pour tout ce qui suivra. Soient X , Y deux variétés riemanniennes telles que $\dim X \geq \dim Y$, et soit $\pi : X \to Y$ une submersion. Considérons le champ de plans horizontaux H , c'est-à-dire les plans normaux aux fibres de π . On dit que π est une *submersion riemannienne* si, en chaque point $x \in X$, l'espace H_x est projeté isométriquement sur $T_{\pi(x)}Y$ par $d\pi$. On dit qu'une immersion $f : M \to X$ est *horizontale* pour π si elle est partout tangente à H .

Lemme 2.1.– *Soit* $f : M \to X$ *une immersion horizontale pour une submersion riemannienne* $\pi : X \to Y$. *Si* f *est minimale, alors* $\pi \circ f$ *est aussi minimale.*

C'est intuitivement évident. A partir de formules de O'Neill [O'N] par exemple, on trouve que la projection de la seconde forme fondamentale de f est exactement celle de $\pi \circ f$ et, en particulier, la courbure moyenne de f se projette en celle de $\pi \circ f$. Notons ici que :

2.2. les immersions f et $\pi \circ f$ sont isométriques ;

2.3. si $\dim M = 2$, le lemme 2.1 est vérifié aussi pour les immersions minimales ramifiées.

Par 2.1, on peut trouver les immersions minimales en Y en cherchant les immersions minimales et horizontales dans X. On a l'impression d'avoir fait quelques pas en arrière. Pourtant, grâce à 1.1, on trouve le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.4.— *Soit X une variété kählérienne et $\pi : X \to Y$ une submersion riemannienne. Alors chaque sous-variété holomorphe et horizontale dans X devient, par π, une sous-variété minimale dans Y.*

Dans ce cas-là, l'équation des surfaces minimales (qui est du deuxième ordre) devient du premier ordre dans le domaine analytique complexe.

§ 3. La construction de Calabi. En dimension 2, la structure d'une immersion minimale ramifiée en un point singulier est assez bien comprise ([O], [G]). En dimension 3, pourtant, les choses sont plus compliquées. Pour commencer, il faut étudier les cônes tangents qui sont les cônes dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (de sommet l'origine) construits sur les surfaces minimales dans la sphère unité $S^n(1) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Ils seront triviaux topologiquement si les surfaces sont homéomorphes à S^2. En utilisant une idée de H. Hopf [H], F. Almgren a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1 ([A]).— *Toute immersion minimale ramifiée $f : S^2 \to S^3(1)$ est totalement géodésique (i.e. un équateur).*

Par contre, en dimension plus grande, il y en a beaucoup. Par exemple, soit $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ une base orthonormale du k-ième espace propre E_k du laplacien sur $S^2(1)$ en prenant sur E_k un produit scalaire qui est O_3-invariant. Autrement dit, $\{\psi_0,\dots,\psi_n\}$ est une base L^2-orthonormée de l'espace des fonctions harmoniques sphériques de degré k. Alors l'application $\Psi_k : S^2 \to S^n(1)$ donnée par $\Psi_k(x) = c_k(\psi_0(x),\dots,\psi_n(x))$ est, pour une constante c_k bien choisie, une immersion minimale.

Dans un de ses travaux importants, E. Calabi a trouvé une astuce qui permet presque de classifier toutes les immersions minimales ramifiées de S^2 dans $S^n(1)$. Il a donné une construction dont on comprend seulement aujourd'hui le lien avec celle introduite par Penrose en relativité générale (voir [AHS], par exemple). Récemment sa construction a été utilisée et généralisée à d'autres situations par beaucoup de mathématiciens et de physiciens. Pour la comprendre il faut revoir un peu de géométrie classique.

Considérons l'espace euclidien $\mathbf{R}^{2m+1}$ muni de son produit scalaire "$\cdot$", et prenons la complexification $\mathbb{C}^{2m+1} = \mathbf{R}^{2m+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathbf{R}^{2m+1} \oplus i\mathbf{R}^{2m+1}$ et l'extension *bilinéaire complexe* de "$\cdot$". On dit qu'un sous-espace complexe $V \subset \mathbb{C}^{2m+1}$ est *isotrope* si $v \cdot w = 0$ pour tous les vecteurs $v,w \in V$. Notons I_m la variété de tous les sous-espaces isotropes de dimension m dans $\mathbb{C}^{2m+1}$. L'action naturelle du groupe SO_{2m+1} sur I_m est transitive et nous avons alors le difféomorphisme

$$I_m \cong SO_{2m+1}/U_m \,. \tag{3.2}$$

Nous savons que I_m est une variété kählérienne homogène (et même symétrique) et qu'elle admet un plongement holomorphe invariant dans un espace projectif. Grâce à l'inclusion $U_m \subset SO_{2m} \subset SO_{2m+1}$, on a une submersion riemannienne

(3.3) $$\pi : I_m \longrightarrow S^{2m}(1)$$

dont la fibre est l'espace SO_{2m}/U_m. De ceci on déduit que I_m n'est rien d'autre que le fibré au-dessus de $S^{2m}(1)$ dont la fibre, au-dessus du point x, est l'ensemble de toutes les structures presque-complexes, orthogonales et compatibles avec l'orientation sur $T_xS^{2m}(1)$. De ce point de vue là, on trouve qu'en un point $J \in I_m$ au-dessus de $x \in S^{2m}(1)$ la structure presque complexe donnée sur l'espace horizontal H_J est tautologiquement J elle-même (grâce à l'identification $d\pi : H_J \xrightarrow{\approx} T_xS^{2m}(1)$). Remarquons que, dans le cas $m = 2$, on retrouve la "fibration de Penrose" :

(3.4) $$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow S^4(1) .$$

Pour démontrer 3.2, on procède de la manière suivante. Fixons $V \in I_m$ et choisissons une base $(Z_1,\ldots,Z_m)$ pour V qui soit orthonormale pour le produit scalaire hermitien $\langle v,w\rangle \equiv v\cdot\bar{w}$. En écrivant $Z_k = X_k + iY_k$ où $X_k, Y_k \in \mathbb{R}^{2m+1}$, on voit que, grâce à l'isotropie de V, $(X_1,Y_1,\ldots,X_m,Y_m)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2m+1}$. L'isomorphisme 3.2 est alors clair. De plus on peut observer qu'avec une orientation donnée sur $\mathbb{R}^{2m+1}$, il y a un vecteur unitaire $Z \in \mathbb{R}^{2m+1}$ bien déterminé tel que $\{X_1,\ldots,Y_m,Z\}$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^{2m+1}$. On a une décomposition $\langle .,.\rangle$-orthogonale

(3.5) $$\mathbb{C}^{2m+1} = V \oplus \bar{V} \oplus \mathbb{C}\cdot Z ,$$

et la submersion π aurait pû être définie par

(3.6) $$\pi(V) = Z .$$

Or selon 1.1 et 2.4, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.7 (E. Calabi [C_1], [C_2]).— *Soit $C \subset I_m$ une courbe algébrique qui est horizontale pour la submersion π. Soit $p : \tilde{C} \to C$ la normalisation de C. Alors l'application $\pi \circ p : \tilde{C} \longrightarrow S^{2m}(1)$ est une immersion minimale, conforme et ramifiée (exactement aux points singuliers de p).*

Le fait étonnant est que pour les courbes rationnelles, il y a une réciproque.

THÉORÈME 3.8 (E. Calabi [C_1], [C_2]).— *Soit Σ une surface de Riemann de genre zéro et soit $f : \Sigma \longrightarrow S^n(1)$ une immersion minimale ramifiée qui est linéairement pleine (i.e. $f(\Sigma)$ n'est pas contenue dans un sous-espace linéaire strict de $\mathbb{R}^{n+1}$). Alors,*

(1) *n est pair, par exemple $n = 2m$, et*

(2) *il existe une application $F : \Sigma \to I_m$ qui est holomorphe et horizontale telle que $f = \pi \circ F$.*

Démonstration.— Soit $z = x + iy$ une coordonnée locale holomorphe sur Σ, et posons $D \equiv \partial/\partial z \equiv \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$. Considérons f une application $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle

que $\|f\|^2 = f\cdot f \equiv 1$. Elle est analytique réelle. La métrique induite par f est

$$ds^2 = 2\lambda|dz|^2$$

où $\lambda = Df\cdot\bar{D}f \geq 0$ n'a que des zéros isolés. L'équation des surfaces minimales dans le cas présent est

(3.9) $$D\bar{D}f = -\lambda f \ .$$

Evidemment on a

$$f\cdot f \equiv 1 \quad \text{et} \quad f\cdot Df \equiv 0 \ .$$

La conformité de f est équivalente à l'équation $Df\cdot Df \equiv 0$, donc on a

$$Df\cdot Df \equiv 0 \quad \text{et} \quad Df\cdot D^2f \equiv 0 \ .$$

On trouve alors, après un changement de coordonnées holomorphes locales $w = w(z)$, que $D_w^2f\cdot D_w^2f = (dz/dw)^4 D_z^2f\cdot D_z^2f$. De plus l'équation (3.9) implique que $\bar{D}(D^2f\cdot D^2f) \equiv 0$. Donc on a démontré que $\Phi_2 := (D^2f\cdot D^2f)dz^4$ est un élément bien défini de $H^0(\Sigma;(\Omega^1)^4)$. Puisque le genre de Σ est zéro, on a $\Phi_2 \equiv 0$, i.e.

$$D^2f\cdot D^2f \equiv 0 \quad \text{et} \quad D^2f\cdot D^3f \equiv 0 \ .$$

Il est clair qu'on peut continuer. On suppose par récurrence que $D^jf\cdot D^kf \equiv 0$ pour $1 \leq j+k \leq 2p-1$. On trouve d'après (3.9) que $\Phi_p := (D^pf\cdot D^pf)dz^{2p}$ est une forme holomorphe de poids $2p$. Puisqu'on a supposé $\Sigma \approx S^2$, on sait que $\Phi_p \equiv 0$ et donc $D^pf\cdot D^pf \equiv D^pf\cdot D^{p+1}f \equiv 0$. Par récurrence, alors, on a

(3.10) $$D^jf\cdot D^kf \equiv 0 \qquad \forall\, j+k \geq 1 \ .$$

Une immersion qui vérifie (3.10) est appelée une *immersion isotrope*.

On considère maintenant les fonctions $F_p := \bar{D}f\wedge\bar{D}^2f\wedge\ldots\wedge\bar{D}^pf$ à valeurs dans $\Lambda^p\mathbb{C}^{n+1}$. Par changement de coordonnées locales, F_p est modifiée par le facteur scalaire $(\overline{dw/dz})^{\binom{n}{p}}$. On considère l'entier m tel que $F_{m+1} \equiv 0$ mais $F_m \not\equiv 0$. De (3.10) on déduit que la fonction $F \equiv f\wedge F_m\wedge\overline{F}_m$ vérifie $\|F\| \equiv \|F_m\|^2$. Cela implique alors que $2m+1 \leq n$ et nous allons voir qu'en fait

(3.11) $$n = 2m+1 \ .$$

Donc F est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ (définie à une constante près) et nous allons voir aussi que le quotient

(3.12) $$\frac{1}{F}F_m \quad \text{est méromorphe.}$$

Par suite, en passant à l'espace projectif, on voit que l'application F $F = [F_m] : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m\mathbb{C}^{2m+1})$ est bien définie et holomorphe. De plus il est évident que $F_m = \bar{D}f\wedge\ldots\wedge\bar{D}^mf$ sont les coordonnées de Plücker d'un m-plan isotrope dans $\mathbb{C}^{2m+1}$. Alors F envoie Σ sur la sous-variété complexe $I_m \subset \mathbb{P}(\Lambda^m\mathbb{C}^{2m+1})$. D'après (3.5) et (3.6) on vérifie directement que $\pi\circ F = f$. En outre il n'est pas difficile de voir que F est horizontale. Observons que l'espace horizontal $H_V \subset T_VI_m \subset T_V\mathbb{G}r_m(\mathbb{C}^{2m+1}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V^\perp) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\bar{V}\oplus\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}(V,\bar{V}) \oplus \mathrm{Hom}(V\oplus\mathbb{C})$ est pré-

cisément la seconde composante, i.e. $H_V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V \oplus \overline{V})^{\perp}$) . Or au point $F(z) = [\overline{D}f(z) \wedge \ldots \wedge \overline{D}^m f(z)]$, l'élément $F'(z)$ dans H_V est l'application qui envoie $\overline{D}^k f(z)$ dans $D(\overline{D}^k f(z)) = \overline{D}^{k-1}(-\lambda f(z)) \equiv -(\overline{D}^{k-1}\lambda) f(z) \pmod{F(z)}$. Puisque $f(z)$ engendre l'espace $[F(z) \oplus \overline{F}(z)]^{\perp}$, on voit bien que $F'(z)$ est horizontale.

Pour démontrer (3.11), on observe d'abord que, d'après l'équation (3.9), on a

$$\overline{D}^k D^{\ell} f = a_0 f + a_1 Df + \ldots + a_{\ell-k} D^{\ell-k} f \,, \tag{3.13}$$

si $k \leq \ell$, où $a_0, \ldots, a_{\ell-k} \in C^{\infty}$. Restons, pour l'instant, dans l'ensemble $\mathcal{R} \equiv \{F_m \neq 0\}$. Puisque $F_{m+1} \equiv 0$, on a

$$D^{m+1} f = b_1 Df + \ldots + b_m D^m f \tag{3.14}$$

où $b_1, \ldots, b_m \in C^{\infty}$. Alors, le sous-espace $f \wedge Df \wedge \ldots \wedge D^m f \wedge \overline{D}f \wedge \ldots \wedge \overline{D}^m f$ est la complexification de l'espace engendré par f et toutes ses dérivées. Puisque f est linéairement pleine, on trouve que $n = 2m + 1$.

Pour démontrer (3.12) on observe qu'en conjuguant l'équation (3.14), on a : $\overline{D}F_m = \overline{b}_m F_m$ et $\overline{D}F = \overline{b}_m F$. Ceci implique que $\overline{D}(F^{-1}F_m) = 0$. Alors, le relèvement F est bien défini, holomorphe et horizontal, au moins dans l'ensemble $\mathcal{R}$ qui est ouvert et dense ($\|F_m\|^2 \in C^{\omega}$). Il est aussi vrai que $\pi \circ F = f$. On démontre alors que $\Sigma - \mathcal{R}$ est un ensemble fini grâce à l'équation vérifiée par $\|F_m\|^2$. Le fait que F ait une extension holomorphe résulte donc d'un théorème classique. q.e.d.

Dans la démonstration ci-dessus nous avons trouvé une courbe holomorphe $F : \Sigma \to I_m$ telle que $F' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, F^{\perp})$ soit un homomorphisme de rang un partout sur Σ . Il est classique qu'une telle courbe est engendrée par une courbe "directrice" isotrope $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^{2m}(\mathbb{C})$: on a $F(z) = [g(z) \wedge g'(z) \wedge \ldots \wedge g^{(m-1)}(z)]$. Le problème d'étudier les immersions minimales $S^2 \longrightarrow S^{2m}(1)$ est devenu maintenant le problème d'étudier les courbes rationnelles isotropes dans $\mathbb{P}^{2m}(\mathbb{C})$.

Le théorème de Calabi a deux conséquences intéressantes. On trouve, par exemple, qu'une surface minimale Σ de genre zéro dans $S^n(1)$ a l'aire $A(\Sigma) = 4\pi m$ où $m \in \mathbb{Z}^+$ (ce qui n'est pas du tout vrai pour les surfaces de genre positif). Quelques extensions intéressantes du théorème de Calabi ont été trouvées par S.S. Chern [Ch$_1$] [Ch$_2$] et L. Barbosa [Ba]. On observe que le théorème 3.8 a transformé le problème de la classification des applications harmoniques de S^2 dans $S^n(1)$ en termes de géométrie algébrique. Récemment J.-L. Verdier [V] a fait progresser cette question en étudiant plus précisément la structure de cet espace d'applications.

§ 4. Le cas de S^4 (d'après R. Bryant). Depuis 1968, on sait que toute surface compacte orientée se plonge minimalement dans $S^3(1)$ ([L$_1$]). Les structures conformes induites par ces plongements sont particulières ; elles ont beaucoup d'automorphismes. Récemment, H.I. Choi et R. Schoen ont démontré que, pour une surface compacte Σ , l'ensemble des structures conformes qui sont réalisées par un

plongement minimal de Σ dans S^3 est un sous-ensemble compact dans l'espace de modules [CS]. Par contre, R. Bryant a utilisé la transformation de Calabi-Penrose pour établir le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1 (R. Bryant [B_1]).— *Toute surface de Riemann compacte admet une immersion minimale et conforme dans* $S^4(1)$.

Démonstration.— Il suffira de démontrer que chaque surface de Riemann compacte apparaît comme une courbe holomorphe dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, non-singulière et horizontale pour la projection $\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow S^4(1)$. Le champ H de plans horizontaux pour π est holomorphe sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et il faut en comprendre les courbes intégrales. R. Bryant a résolu complètement ce problème en raisonnant à la Élie Cartan. On présente ici sa solution d'une façon un peu différente.

Considérons le fibré holomorphe $p : \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des espaces tangents de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ projectivisés (donc, $p^{-1}(x) = \mathbb{P}(T_x\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$). Il est évident que $\mathbb{D}^3$ est la *variété des drapeaux*, c'est-à-dire la variété des paires (ℓ,P) de sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}^3$ tels que $\dim_{\mathbb{C}}\ell = 1$, $\dim_{\mathbb{C}}P = 2$, et $\ell \subset P$. La variété $\mathbb{D}^3$ est difféomorphe à U_3/T , où T est le tore maximal du groupe U_3 .

Or il y a sur $\mathbb{D}^3$ un champ holomorphe K de 2-plans, qui est défini de la façon suivante. Un point $t \in \mathbb{D}^3$ est, par définition, une droite dans l'espace $T_{p(t)}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et on pose $K_t = [dp]_t^{-1}(t)$. Autrement dit, K_t est le sous-espace de $T_t\mathbb{D}^3$ engendré par la direction horizontale t et la direction verticale. Il est alors tout à fait évident que :

(4.2) toute immersion holomorphe $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (où Σ est une surface de Riemann) a un relèvement canonique $\tilde{\psi} : \Sigma \to \mathbb{D}^3$ défini par les droites tangentes à ψ ;

(4.3) un tel relèvement $\tilde{\psi}$ est une courbe intégrale du champ holomorphe de 2-plans verticaux K .

Le fait spectaculaire que R. Bryant a trouvé est qu'il y a une correspondance birationnelle entre $\mathbb{D}^3$ et $\mathbb{P}^3$ bien définie hors de deux courbes rationnelles dans $\mathbb{D}^3$, qui envoie le champ K précisément sur le champ H . Alors puisque toute surface de Riemann a une immersion holomorphe dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (cf. [GH]), on trouve le résultat cherché assez rapidement en utilisant (4.3).

Expliquons maintenant les détails. Prenons les coordonnées homogènes $w = (w_0,\ldots,w_3)$ pour $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et considérons $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{H}^2$ comme un espace vectoriel quaternionien avec multiplication scalaire à gauche. Les coordonnées quaternionniennes (q_1,q_2) sont $q_1 = w_0 + w_1 j$, $q_2 = w_2 + w_3 j$. La métrique de Fubini-Study correspond à la 2-forme "kählérienne" $\omega = \partial\bar{\partial}\log\|w\|^2$. La fibration $\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow S^4(1) = \mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ est donnée par le quotient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 - \{0\} = \mathbb{H}^2 - \{0\} & & \\ {\scriptstyle \mathrm{Hopf}_{\mathbb{C}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mathrm{Hopf}_{\mathbb{H}}} \\ \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) \end{array}$$

D'après cela, on peut voir sans difficulté que le champ H de 2-plans horizontaux pour π est donné par une 1-forme à valeurs dans $O(2)$ dont le relèvement à $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ est

$$\Omega = \frac{1}{\|w\|^2}(w_0 dw_1 - w_1 dw_0 + w_2 dw_3 - w_3 dw_2) \tag{4.4}$$

(c'est-à-dire qu'au point w, on a $\Omega^{\perp} = \mathbb{C}\cdot w \oplus (\mathbb{H}\cdot w)^{\perp}$). Observons que, si on passe aux coordonnées affines $z = (1, z_1, z_2, z_3)$, alors le champ H est déterminé par la forme holomorphe

$$\Omega_0 = dz_1 + z_2 dz_3 - z_3 dz_2 \tag{4.5}$$

comme $H = \Omega_0^{\perp}$.

On considère maintenant la variété $\mathbb{D}^3$ d'une façon symétrique. On remplace les 2-plans dans $\mathbb{C}^3$ par les droites dans $(\mathbb{C}^3)^*$ et on trouve que

$$\mathbb{D}^3 = \{[\ell, \ell^*] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* : \ell^*(\ell) = 0\} . \tag{4.6}$$

Il y a alors deux projections différentes

$$\begin{array}{ccc} & \overset{p}{\nearrow} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ \mathbb{D}^3 & & \\ & \underset{p^*}{\searrow} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* , \end{array}$$

et on a $K = V \oplus V^*$ où V est vertical pour p et où V^* est vertical pour p^*. Prenons des coordonnées homogènes $(\chi_0, \chi_1, \chi_2; \xi_0, \xi_1, \xi_2)$ pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$. Alors $\mathbb{D}^3$ est définie par $\Sigma \chi_j \xi_j = 0$. Considérons le sous-ensemble affine U défini par

$$U \sim \{(1, \chi_1, \chi_2; \xi_0, 1, \xi_2)\} .$$

Evidemment $U \cap \mathbb{D}^3$ est déterminé par l'équation

$$\xi_0 + \chi_1 + \chi_2 \xi_2 = 0 . \tag{4.7}$$

Or le champ K de 2-plans est donné par la 2-forme définie sur $U \cap \mathbb{D}^3$ par

$$\Theta \equiv d\chi_1 + \xi_2 d\chi_2 = -(d\xi_0 + \chi_2 d\xi_2) . \tag{4.8}$$

Il est clair que Ψ s'annule sur les fibres des deux projections. De plus, si $\psi(t) = (1, \chi_1(t), \chi_2(t))$ est une courbe holomorphe, le relèvement canonique $\tilde{\psi}(t) = (\psi(t); \xi(t)) = (1, \psi_1(t), \psi_2(t); \xi_0(t), 1, \xi_2(t))$ est tel que $\Sigma \psi_j'(t)\xi_j(t) \equiv 0$, i.e. $\psi_1'(t) + \psi_2'(t)\xi_2(t) \equiv 0$, ce qui veut dire que $\tilde{\psi}^*\Theta = 0$, i.e. $\tilde{\psi}$ est une courbe intégrale de K.

Considérons maintenant la correspondance birationnelle $B : \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ donnée sur $U \cap \mathbb{D}^3$ par

$$(1, \chi_1, \chi_2; \xi_0, 1, \xi_2) \longmapsto (1, \chi_1 + \tfrac{1}{2}\chi_2\xi_2, \chi_2, -\tfrac{1}{2}\xi_2) \tag{4.9}$$

(on rappelle que $\xi_0 = -\chi_1 - \chi_2\xi_2$ et (χ_1, χ_2, ξ_2) sont des coordonnées libres sur $\mathbb{D}^3$). On déduit directement de (4.5) et (4.8) que $B^*(\Omega_0) = \Theta$, ce qui veut dire que

$$B_* K = H \qquad \text{sur } \mathbb{D}^3 \cap U . \tag{4.10}$$

Evidemment l'équation (4.10) s'étend à tout l'ensemble dom B où B est bien défini.

Afin de déterminer dom B , on rend homogène l'application (4.9) en remplaçant x_1 , x_2 , ξ_0 , ξ_2 par (x_1/x_0) , (x_2/x_0) , (ξ_0/ξ_1) , (ξ_2/ξ_1) . On trouve que (4.9) devient la correspondance

$$(4.11) \qquad (x_0,x_1,x_2;\xi_0,\xi_1,\xi_2) \longmapsto (x_0\xi_1, x_1\xi_1 + \frac{1}{2}x_2\xi_2, x_2\xi_1, -\frac{1}{2}x_0\xi_2) .$$

Elle est bien définie sur $\mathbb{D}^3 = \{\Sigma x_j\xi_j = 0\}$ en dehors des deux droites :

$$L_1 = \{(x;\xi) : x_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0\} \quad \text{et} \quad L_2 = \{(x;\xi) : \xi_1 = x_0 = x_2 = 0\} ,$$

donc $\mathrm{Dom}\, B = \mathbb{D}^3 - (L_1 \cup L_2)$. Elle est injective sur $\mathbb{D}^3$ en dehors des deux surfaces

$$S_1 = \{(x;\xi) \in \mathbb{D}^3 : x_0 = 0\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{(x;\xi) \in \mathbb{D}^3 : \xi_1 = 0\} .$$

On calcule que le rang de dB est deux sur $S_1 \cup S_2 - (L_1 \cup L_2)$. Observons aussi que $B(0,2s,t;\xi,t,-2s) = [(0,s,t,0)]$ et $B(t,x,s;s,0,-t) = [(0,-s,0,t)]$. On a donc : les fibres de $B|_{S_1}$ sont les fibres de $p|_{S_1}$ (les droites verticales), et les fibres de $B|_{S_2}$ sont les relèvements canoniques des droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui passent par $\hat{x} \equiv [(0,1,0)]$.

Nous achevons la démonstration de la façon suivante. Soit Σ une surface de Riemann compacte et soit $\psi : \Sigma \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une immersion holomorphe ([GH]). Si le relèvement canonique $\tilde{\psi} : \Sigma \to \mathbb{D}^3$ évite les deux droites L_1 et L_2 et s'il n'est tangent à aucun relèvement canonique d'une droite dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui contient le point $\hat{x}$, alors nous savons que $\pi \circ B \circ \tilde{\psi} : \Sigma \to S^4$ est une immersion minimale conforme.

Or il suffit de vérifier que pour un automorphisme complexe générique $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, l'immersion transformée $\psi_g = g \circ \psi$ est telle que $\tilde{\psi}_g$ évite les droites L_1 et L_2 et qu'aussi les droites tangentes de ψ_g aux points d'inflexion ne passent pas par $\hat{x}$. Afin de démontrer ce fait, observons d'abord que :

(i) $p(L_2) = \hat{x}$ est un point porté par la droite $\hat{L} \equiv p(L_1) = p(S_1)$,

(ii) $L_2 \subset \mathbb{D}^3$ est le relèvement canonique de $\hat{L}$.

Cela veut dire précisément que le relèvement $\tilde{\psi}_g$ évitera $L_1 \cup L_2$ si et seulement si l'immersion ψ_g évite le point $\hat{x}$ et coupe la droite $\hat{L}$ transversalement. Or une droite L générique est transversale à ψ et un point générique x dans L évite les droites tangentes aux points d'inflexion de ψ . Puisque le groupe d'automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est transitif sur les droites pointées, l'assertion est évidente. q.e.d.

Récemment P. Gauduchon a trouvé une description géométrique de la correspondance de Bryant.

§ 5. Le cas de S^6 (d'après R. Bryant). On trouve qu'il y a de la belle géométrie exceptionnelle en dimensions 7 et 8 donnée au fond par l'algèbre $\mathbb{O}$ des octaves de Cayley. En particulier chaque 6-plan dans $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ est canoniquement complexe et donc chaque variété $M^6 \subset \mathbb{O}$ est canoniquement presque-complexe (voir [C_2], [Gr], [B_2] pour la recherche des conséquences). En particulier $S^6 \subset \mathrm{Im}\, \mathbb{O}$ est munie d'une structure presque-complexe et analytique réelle (et absolument pas intégrable !). De plus, il y a un ensemble intéressant de sous-variétés de dimension 3

dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ déterminées par la condition que leurs espaces tangents soient partout les parties imaginaires $\mathrm{Im}\,H$ des sous-algèbres quaternioniennes $H \subset \mathbb{O}$ (voir [HL]). Elles s'appellent les *sous-variétés associatives* parce qu'elles sont définies par l'annulation de l'associateur : $x(yz) - (xy)z$. Ces variétés sont minimisantes absolument. On trouve que *les cônes associatifs sont exactement les cônes sur les courbes holomorphes compactes dans* S^6 .

Il faut dire qu'il n'y a aucune sous-variété presque-complexe de dimension complexe 2 dans S^6 , même localement ([B_2]). Par contre il y en a beaucoup en dimension 1 parce que le système d'équations est C^ω et régulier. On a même le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1 (R. Bryant [B_2]).— *Toute surface de Riemann compacte a une famille infinie de plongements holomorphes (ramifiés) dans* S^6 .

Le degré du diviseur de la ramification peut être aussi grand qu'on veut.

On ne donne ici que l'idée de la démonstration. Elle est du même type général.

Observons d'abord que, pour chaque vecteur unitaire $u \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$, on a l'application linéaire $J_u : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ donnée par $J_u(x) \equiv x \cdot u$ qui vérifie $J_u^2 = -\mathrm{Id}$. Elle est orthogonale et envoie 1 sur u et u sur -1 ; alors elle conserve $T_u(S^6) = (1,v)^\perp$. Voilà la structure presque complexe sur S^6 qui est évidemment invariante par le groupe de Lie G_2 d'automorphismes de $\mathbb{O}$.

Soit $\mathbb{G}r = G(2,\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ la grassmannienne des 2-plans orientés dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$. C'est une variété kählérienne canoniquement difféomorphe à l'hyperquadrique $\{Z_1^2 + \ldots + Z_7^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^6(\mathbb{C})$. Il y a une submersion riemannienne

$$\pi : \mathbb{G}r \longrightarrow S^6 \tag{5.2}$$

qui est G_2-invariante. On sait que, en tant qu'espaces homogènes, $\mathbb{G}r \cong G_2/U_2$ et $S^6 \cong G_2/SU_3$. L'application π est donnée par la formule

$$\pi(P) = x \cdot y \tag{5.3}$$

où $\{x,y\}$ est n'importe quelle base orthonormale orientée de $P \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$. On voit facilement que si $u = \pi(P)$, alors $P \perp u$ et $J_u(P) = P$ (il est bon de se rappeler qu'une sous-algèbre de $\mathbb{O}$ engendrée par deux éléments est associative). La fibre $\pi^{-1}(u)$ est alors exactement le plan projectif $\mathbb{P}^2(T_uS^6)$ et on trouve l'identification $\mathbb{G}r \cong (\mathbb{P}T)(S^6)$.

Or il n'est pas vrai que la submersion π est presque-complexe analytique, mais elle a une structure analogue quand même. Soit $P \in \mathbb{G}r$ un 2-plan tel que $\pi(P) = u \in S^6$ et considérons l'espace horizontal H_P pour π au point P . Alors, par l'identification $d\pi : H_P \xrightarrow{\approx} T_uS^6 \supset P$, on a une décomposition orthogonale :

$$H_P \cong P \oplus P^\perp . \tag{5.4}$$

Alors $d\pi_P$ est complexe linéaire sur $P^\perp$ et anti-complexe linéaire sur P .

La démonstration de R. Bryant consiste à trouver, au bout d'un long calcul qui

utilise un résultat d'Élie Cartan et le théorème de Riemann-Roch, que chaque surface de Riemann compacte se réalise comme une courbe intégrale du champ de 2-plans $P^{\perp}$ sur $\mathbb{G}r$. En fait il y a une infinité de telles réalisations.

R. Bryant a aussi démontré une réciproque. A chaque courbe holomorphe $f : \Sigma \to S^6$ est associé un drapeau de fibrés holomorphes sur Σ :

$$T\Sigma = E_1 \subset E_2 \subset E_3 = f^*TS^6$$

du type Frenet, qui est bien défini partout (hors du cas complètement dégénéré). Le quotient binormal $\beta \equiv E_3/E_2$ donne une application $\beta : \Sigma \to \mathbb{G}r$ telle que $\pi \circ \beta = f$.

THÉORÈME 5.5 ([B_2]).— *Le relèvement binormal β est holomorphe si et seulement si la torsion de f , au sens de Frenet, s'annule. En outre, dans ce cas-là, β est une courbe intégrale du champ P .*

On a alors une classification du type de celle de Calabi pour les courbes holomorphes dans S^6 de torsion zéro.

§ 6. Généralisations. Il est assez évident qu'il doit y avoir des généralisations importantes de tout ce qu'on vient de décrire. En fait, la littérature est devenue si énorme que je n'ai ni le temps ni la place pour en faire une présentation complète. Néanmoins on peut remarquer qu'une motivation puissante a surgi récemment à cause du problème posé par certains physiciens : une variété riemannienne X donnée, décrire toutes les applications harmoniques (donc minimales) de S^2 dans X. Le cas $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a été traité indépendamment par D. Burns [Bu], Din-Zakrzewski [$DZ_{1,2}$] et Glaser-Stora [GS]. Ensuite Eells-Wood ont fait encore des progrès [$EW_{1,2}$]. Ils ont trouvé qu'une application harmonique de S^2 dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est toujours "isotrope" dans un sens très proche de celui de Calabi. De plus ils ont donné une construction explicite de toutes ces applications en termes holomorphes. On va, au moins, présenter cette construction.

Soit $\psi : \Sigma \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une courbe holomorphe qui est linéairement pleine et considérons *le drapeau de Frenet* qui est défini en un point générique $x \in \Sigma$ par

$$\Psi \equiv (V_1, \ldots, V_n) \; ; \tag{6.1}$$

où $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$ et où, pour chaque k , $V_k \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est le sous-espace complexe de dimension $k+1$ osculateur au point x . Pour bien comprendre cela, on considère les courbes associées $\psi_k : \Sigma \to \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$, $0 \le k < n$, qui sont définies par $\psi_k(x) = [\tilde{\psi}(x) \wedge \tilde{\psi}'(x) \wedge \ldots \wedge \tilde{\psi}^{(k)}(x)]$ où $\tilde{\psi}(x)$ est une expression holomorphe locale de $\psi(x)$ en coordonnées homogènes (même si l'expression s'annule en un point isolé, l'application s'étend holomorphiquement). Alors $V_k(x)$ n'est rien d'autre que l'espace déterminé par $\psi_k(x)$. En somme le drapeau de Frenet est une application holomorphe bien définie

$$\Psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{D}_{n+1} \equiv U_{n+1}/U_1 \times \ldots \times U_1 \quad (n+1 \text{ fois}) \tag{6.2}$$

où $\mathbb{D}_{n+1}$ est la variété des drapeaux maximaux de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si on prend un repère orthonormé local $\{e_0,\ldots,e_n\}$ sur Σ tel que $V_k(x) \cap V_{k-1}^{\perp}(x) = \mathbb{C}\cdot e_{k-1}(x)$, $0 < k \leq n$, alors on a les *Formules de Frenet* :

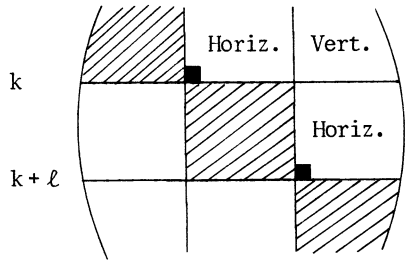
$$(6.3) \qquad d\begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & k_1 & & \\ -\bar{k}_1 & * & k_2 & \\ & -\bar{k}_2 & \ddots & \\ & & & k_n \\ & & -\bar{k}_n & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

On peut fabriquer maintenant une quantité énorme de surfaces minimales compactes dans toutes les grassmanniennes $\mathbb{G}r_{n+1,\ell}$ des ℓ-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$. Pour chaque courbe complexe $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et chaque entier k, $1 \leq k \leq n-\ell$, on définit $F_k : \Sigma \longrightarrow \mathbb{G}r_{n+1,\ell}$ par

$$(6.4) \qquad F_k(x) \equiv V_{k+\ell}(x) \cap V_k^{\perp}(x), \qquad x \in \Sigma.$$

PROPOSITION 6.5 ([ErW], [EW$_{1,2}$]).– *Toutes les applications* $F_k : \Sigma \longrightarrow \mathbb{G}r_{n+1,\ell}$ *sont minimales et conformes.*

Démonstration.– Soit $\mathbb{D}_{n+1;k,\ell}$ la variété des drapeaux $V \subset W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ à deux étages tels que $\dim V = k$ et $\dim(W/V) = \ell$. Il y a une application *holomorphe* $\Pi_{k,\ell} : \mathbb{D}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{D}_{n+1;k,\ell}$ donnée par $\Pi_{k,\ell}(V_1,\ldots,V_n) \equiv (V_k, V_{k+\ell})$. D'après le corollaire 2.4, il suffit de vérifier que l'application holomorphe $\Psi_{k,\ell} \equiv \Pi_{k,\ell} \circ \Psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{D}_{n+1;k,\ell}$ est horizontale pour la submersion riemannienne $\pi : \mathbb{D}_{n+1;k,\ell} \longrightarrow \mathbb{G}r_{\ell}$ donnée par $\Pi(V,W) \equiv W \cap (V^{\perp})$. Si on décrit, maintenant, comme il est habituel les espaces tangents dans l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes, on obtient le tableau :



où il est évident, d'après (6.3), que $\Psi_{k,\ell}$ est horizontale (voir les carrés noirs). q.e.d.

Cette construction a des généralisations directes.

Il y a quelque chose d'un peu subtil dans cette construction. On observe que l'application $\pi : \mathbb{D}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{G}r_{n+1,\ell}$ donnée par $\pi_{\ell}(V_1,\ldots,V_n) = V_{\ell}$ est holomorphe (même algébrique). Par contre, les autres applications $\pi_{k,\ell} : \mathbb{D}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{G}r_{n+1,\ell}$ données par $\pi_{k,\ell}(V_1,\ldots,V_n) = V_{k+\ell} \cap (V_k^{\perp})$, $1 \leq k \leq n-\ell$, ne sont pas du tout ho-

lomorphes, en dépit du fait qu'elles sont toutes isomorphes en tant que submersions riemanniennes. On peut décrire la situation de la façon suivante. Soit $w : U_{n+1} \to U_{n+1}$ un élément du groupe de Weyl W pour le tore maximal $T = U_1 \times \ldots \times U_1$ et considérons le difféomorphisme induit $\tilde{w} : \mathbb{D}_{n+1} \to \mathbb{D}_{n+1}$ (où $\mathbb{D}_{n+1} = U_{n+1}/T$). Toutes les submersions $\pi_{k,\ell}$ sont de la forme $\pi_\ell \circ \tilde{w}$ pour $w \in W$. Or $\tilde{w}$ est une isométrie qui, en général, n'est pas holomorphe.

Un exemple intéressant est la submersion "twistorielle" $\pi_{1,1} : \mathbb{D}_3 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ où le champ horizontal H se décompose en droites $H = \ell_1 \oplus \ell_2$ telles que $d\pi_{1,1}$ soit $\mathbb{C}$-linéaire sur ℓ_1 et $\mathbb{C}$-antilinéaire sur ℓ_2 .

Le fait intéressant est que toutes les immersions minimales isotropes $\psi : \Sigma \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont ou holomorphes, ou antiholomorphes, ou de la forme ci-dessus. Ce phénomène était découvert par les physiciens Din et Zakrzewski [DZ], et les idées étaient développées par Glaser et Stora [GS]. Le phénomène était aussi découvert indépendamment par Burns [Bu]. Une démonstration complète était achevée et publiée pour la première fois par Eells et Wood [EW$_{1,2}$].

THÉORÈME 6.6.– *Soit Σ une surface de Riemann compacte. Toutes les immersions harmoniques isotropes (ou, également, toutes les immersions minimales conformes isotropes) $f : \Sigma \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, qui sont ramifiées et linéairement pleines, sont de la forme*

$$f(x) = \ell_k(x) \qquad x \in \Sigma$$

où $1 \leq k \leq n+1$ et où $\mathbb{C}^{n+1} = \ell_1(x) \oplus \ldots \oplus \ell_{n+1}(x)$ est une décomposition orthogonale en droites associée au drapeau de Frenet d'une application holomorphe $\psi : \Sigma \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. En particulier toutes les immersions minimales $\psi : S^2 \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont de cette forme.

Comme on l'a déjà dit, la démonstration est bien de la forme de Calabi. On se sert du fait que $H^0(S^2;(\Omega^1)^n) = 0 \quad \forall n > 0$ en faisant la construction inverse. En fait ce théorème est une généralisation directe (mais pas triviale) de celui de Calabi, qui se retrouve avec sa démonstration en considérant les applications harmoniques de S^2 dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Les détails sont bien présentés en [EW$_1$] et [EL$_2$].

Il y a beaucoup de monde qui s'intéresse maintenant à ce sujet ; parmi eux : S. Erdem, J.F. Glazebrook, T. Langer, J.H Rawnsley, J. Ramanathan, S. Salamon, J. Wolfson. (Il y a un résumé des progrès dans [E].) M. Dubois-Violette, J. Eells, S. Salamon ont considéré les constructions twistorielles en général (voir [BO], [DuV], [ES]). Récemment, R. Bryant a trouvé un espace twistoriel (avec une structure complexe intégrable) au-dessus de toutes les variétés symétriques compactes [B] . Sa construction marche et est très intéressante dans le cas des espaces symétriques exceptionnels. Une construction similaire a été trouvée indépendamment par S. Salamon [S].

BIBLIOGRAPHIE

[A] F.J. ALMGREN, Jr. - *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. 84(1966), 277-292.

[AHS] M. ATIYAH, N. HITCHIN and I. SINGER - *Self-duality in four-dimensional riemannian geometry*, Proc. Royal Soc. London Ser. A 362(1978), 425-461.

[Ba] L. BARBOSA - *On minimal immersions of S^2 into S^{2m}*, Trans. Amer. Math. Soc. 210 (1975), 75-106.

[BO] L. BÉRARD BERGERY and T. OCHIAI - *On some generalizations of the construction of twistor spaces*, in Global Riemannian Geometry, ed. T.J. Willmore and N. Hitchin, Ellis Horwood London, 1984, 52-58.

[B_1] R. BRYANT - *Submanifolds and special structures on the octonions*, J. Diff. Geom. 17(1982), 185-232.

[B_2] R. BRYANT - *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-spheres*, J. Diff. Geom. 17(1982), 455-473.

[B_3] R. BRYANT - *Lie groups and twistor spaces*, à paraître.

[Bu] D. BURNS - *Harmonic maps from $\mathbb{C}P^1$ to $\mathbb{C}P^n$*, Harmonic maps Symposium, New Orleans (1980), Springer Lect. Notes 949(1982), 48-55.

[C_1] E. CALABI - *Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima*, Topics in Complex Manifolds (Ed. H. Rossi), Les Presses de l'Univ. de Montréal (1967), 59-81.

[C_2] E. CALABI - *Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres*, J. Diff. Geom. 1(1967), 111-125.

[Ch_1] S.S. CHERN - *On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature*, Problems in Analysis, Princeton (1970), 27-40.

[Ch_2] S.S. CHERN - *On minimal spheres in the 4-sphere*, Studies and essays presented to T.W. Chen, Taïwan (1970), 137-150.

[CS] H. CHOI and E. SCHOEN - *The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature*, à paraître.

[DZ_1] A.M. DIN and W.J. ZAKRZEWSKI - *General classical solutions in the $\mathbb{C}P^{n-1}$ model*, Nucl. Phys. B 174(1980), 397-406.

[DZ_2] A.M. DIN and W.J. ZAKRZEWSKI - *Properties of the general classical $\mathbb{C}P^{n-1}$ model*, Phys. Letters 95 B(1980), 419-422.

[DuV] M. DUBOIS-VIOLETTE - *Structures complexes au-dessus des variétés, applications*, Math. et Phys., Sém. E.N.S., Birkhäuser, Progress in Math., 37(1983), 1-43.

[E] J. EELLS - *Gauss maps of surfaces*, à paraître dans le volume du 40e anniversaire d'Oberwolfach.

[EL_1] J. EELLS and L. LEMAIRE - *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 10(1978), 1-68.

[EL_2] J. EELLS and L. LEMAIRE - *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S. Regional Conf. Series n° 50, A.M.S. Providence, 1980.

[ES] J. EELLS et S. SALAMON - *Constructions twistorielles des applications harmoniques*, C.R. Acad. Sci. Paris 296(1983), 685-687.

[EW_1] J. EELLS and J.C. WOOD - *The existence and construction of certain harmonic maps*, Symp. Math. Ist. Naz. Alta Mat. Roma 26(1982), 123-138.

[EW_2] J. EELLS and J.C. WOOD - *Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*, Advances in Math. 49(1983), 217-263.

[ErW] S. ERDEN and J.C. WOOD - *On the construction of harmonic maps into a Grassmannian*, J. London Math. Soc. 28(1983), 161-174.

[F] H. FEDERER - *Some theorems on integral currents*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 43-67.

[GH] P. GRIFFITHS and J. HARRIS - Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[GS] V. GLASER and R. STORA - *Regular solutions of the $\mathbb{C}P^n$ models and further generalizations*, CERN preprint, 1980.

[G] R.D. GULLIVER - *Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature*, Ann. of Math. 97(1973), 275-305.

[Gr] A. GRAY - *Vector cross products on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), 465-504.

[H] H. HOPF - *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachr. 4(1950/1), 232-249.

[HL] R. HARVEY and H.B. LAWSON, Jr. - *Calibrated Geometries*, Acta Math. 148(1982), 47-157.

[L_1] H.B. LAWSON, Jr. - *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. 92(1970), 335-374.

[L_2] H.B. LAWSON, Jr. - Lectures on Minimal Submanifolds, IMPA, Rio de Janeiro 1970, 2e edition, Publish or Perish Press, Berkeley, 1980.

[O'N] B. O'NEILL - *The fundamental equations of a submersion*, Mich. Math. J. 13 (1966), 459-469.

[O] R. OSSERMAN - *A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem*, Ann. of Math. 97(1973), 275-305.

[S] S. SALAMON - *Harmonic and holomorphic maps*, à paraître.

[V] J.-L. VERDIER - *Two dimensional σ-models and harmonic maps from S^2 to S^{2n}*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Physics 180(1982), 136-141.

H. Blaine LAWSON Jr.

S.U.N.Y.
Department of Mathematics
STONY BROOK - NY 11794 (USA)