Astérisque

ALAIN CHENCINER

La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 622, p. 147-170

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__147_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983-84, n° 622 Février 1984

LA DYNAMIQUE AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE ELLIPTIQUE CONSERVATIF : DE POINCARÉ ET BIRKHOFF À AUBRY ET MATHER

par Alain CHENCINER

Depuis son introduction par Poincaré à propos du problème restreint des trois corps, l'étude au voisinage d'un point fixe elliptique des germes de difféomorphismes du plan conservant les aires a fourni quelques uns des plus beaux résultats de la dynamique hamiltonienne. Un moment le lieu d'une certaine défaite de l'intuition physique (hypothèse ergodique de Boltzmann) devant la rigueur mathématique (théorème des courbes invariantes (K.A.M.)) ce sujet vient de connaître de nouveaux développements, largement influencés par la physique.

Presqu'un demi-siècle séparent le "dernier théorème géométrique" de Poincaré [34], démontré par Birkhoff en 1913 [3], et le "théorème des courbes invariantes" [29], [37]. Le premier, topologique, fournit l'existence d'orbites périodiques de nombre de rotation donné dans tout voisinage du point fixe et ce n'est que tout récemment qu'une démonstration symplectique, valable en toutes dimensions, en a été donnée par Conley et Zehnder [8], [9] ; le second, analytique (petits diviseurs), affirme l'existence autour du point fixe d'un ensemble de Cantor de courbes fermées invariantes sur lesquelles la dynamique est quasi-périodique (on trouvera un énoncé de ce théorème dans le deuxième chapitre de [30] ; voir également [39] et [16]).

Les résultats que viennent de démontrer (indépendamment) Aubry [2] et Mather [24], complètent le tableau (dans un sens qui apparaîtra au paragraphe suivant) en prouvant l'existence, autour du point fixe, d'orbites "quasi-périodiques" (dans un sens faible !, voir [24]) n'appartenant pas forcément à une courbe fermée invariante et en donnant un critère permettant (en théorie) de décider si tel est le cas. La méthode des deux auteurs est variationnelle : la fonctionnelle (l'"action") d'Aubry vient directement de la physique (et est en particulier infinie), celle de Mather est empruntée à Percival, également physicien, qui l'avait utilisée dans des recherches numériques de tores invariants [32] ; toutes deux généralisent (au signe près) la "somme des longueurs" d'une orbite de billard, introduite par Birkhoff [6].

Aussi bien dans la méthode d'Aubry que dans les démonstrations qu'ont données R. Douady [10] et A. Katok [20] du théorème de Mather, ces orbites quasi-périodiques faibles apparaissent comme limites d'orbites périodiques ayant la propriété d'être ordonnées circulairement comme les orbites de la rotation périodique correspondant à

leur nombre de rotation. De telles orbites vérifient des estimations lipschitziennes uniformes analogues à celles que Birkhoff, encore lui, avait découvertes pour les courbes invariantes [5], [16] et peuvent de ce fait être localisées a priori. En particulier, la démonstration que nous donnerons de leur existence ne dépend pas du théorème des courbes invariantes, alors que la possibilité d'appliquer à un grand itéré du difféomorphisme le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff en dépend effectivement.

Le premier paragraphe introduit rapidement les "formes normales", approximations invariantes par rotation des difféomorphismes qui nous intéressent, ainsi que la propriété de "distorsion monotone" dont Poincaré et surtout Birkhoff avaient reconnu le caractère fondamental. Le paragraphe suivant fournit les estimations lipschitziennes associées aux orbites "ordonnées" et le paragraphe 3 les fonctions génératrices ; les deux sont immédiatement utilisées pour remplacer le difféomorphisme original par un difféomorphisme d'un anneau auquel les théories d'Aubry et Mather puissent s'appliquer (élimination des problèmes de bord). Dans les paragraphes 4 et 5 on prouve que les orbites périodiques et quasi-périodiques faibles ordonnées existent, les premières comme orbites maximales au sens d'Aubry, ce qui a l'avantage de faire apparaître naturellement la propriété d'ordre, les secondes par le passage à la limite de [20] ; des allusions sont faites également aux démonstrations originelles d'Aubry et Mather et aux propriétés d'hyperbolicité. Dans le paragraphe 6, enfin, sont décrits les résultats de Mather sur les orbites minimax et le critère d'existence de courbes invariantes, également obtenu par Aubry sous une forme légèrement différente.

1. FORMES NORMALES ET DISTORSIONS MONOTONES

Soit $\overline{F} : \mathbb{R}^2,0 \to \mathbb{R}^2,0$ un difféomorphisme C^∞ défini au voisinage de 0. On suppose que 0 est un point fixe elliptique, c'est-à-dire que $\overline{F}(0) = 0$ et que les valeurs propres de la dérivée $D\overline{F}(0)$ sont de module 1 et non réelles ; on note ces dernières $\lambda_o = e^{2\pi i\omega_o}$ et $\overline{\lambda}_o$. On suppose enfin que $\overline{F}$ conserve les aires (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$).

Si $D\overline{F}(0)$ n'est pas trop fortement résonnante, i.e. si ω_o n'est pas un rationnel de trop petit dénominateur on peut, suivant Poincaré et Birkhoff, trouver un changement de coordonnées préservant les aires qui fasse apparaître $\overline{F}$ comme perturbation d'une "forme normale polynômiale" $\overline{N}$ invariante par le groupe des rotations [5], [30]. En coordonnées polaires $x + iy = re^{2\pi i\vartheta}$ un relèvement F de $\overline{F}$ au revêtement universel $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2 - 0 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) se prolonge naturellement en un difféomorphisme C^∞ défini sur un voisinage de $\mathbb{R}\times 0$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par la formule suivante (on a supposé $\omega_o \neq \frac{p}{q}$ pour $q \leq 2n+3$) :

$$F(\vartheta,r) = (\vartheta + g(r^2) + \alpha(\vartheta,r)\ ,\ r + \beta(\vartheta,r))\ ,$$

où $g(X) = \omega_o + b_1X + \ldots + b_nX^n$ est un polynôme et α et β, 1-périodiques en ϑ,

sont des $O(|r|^{2n+2})$.

La forme normale $\overline{N}$, obtenue en oubliant α et β , laisse invariant chaque cercle $r = \rho$ et induit dessus la rotation $\overline{R}_{g(\rho^2)}$ de nombre de rotation $g(\rho^2)$. En général $b_1 \neq 0$, et nous le supposerons positif (sinon prendre $\overline{F}^{-1}$) ; $g(\rho^2)$ est alors, pour $\rho > 0$ assez petit, une fonction monotone croissante de ρ . Les résultats évoqués dans l'introduction précisent le souvenir que les cercles invariants de $\overline{N}$ laissent dans la dynamique de $\overline{F}$. Ils dépendent de façon essentielle de l'hypothèse $b_1 > 0$ (qu'on aurait pu remplacer par $b_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$) ; celle-ci implique l'existence, pour tout ω assez proche de ω_0 et tel que $\omega - \omega_0 > 0$, d'un unique $\rho > 0$ proche de 0 tel que $\overline{N}$ induise la rotation $\overline{R}_\omega$ sur le cercle $r = \rho$. Le destin précis de ce cercle dans le passage de $\overline{N}$ à $\overline{F}$ est lié aux propriétés arithmétiques de ρ mais les théorèmes d'Aubry et Mather affirment qu'on en retrouve toujours la trace dans la dynamique de $\overline{F}$. Malgré la date tardive de leur démonstration, ces théorèmes se placent donc à la base de la théorie (existence d'une forme de "solutions faibles"), et font apparaître le théorème des courbes invariantes comme un résultat (difficile !) de régularité et d'unicité.

Pour étudier $\overline{F}$ au voisinage du cercle $r = \rho$ il est commode de faire un nouveau changement de variables $\vartheta = x$, $r = \rho\sqrt{1+y}$ qui transforme F (resp. $\overline{F}$) en un difféomorphisme défini sur la bande A (resp. l'anneau $\overline{A}$) $|y| \leq \frac{1}{2}$ (par exemple) par une formule de la forme

$$F(x,y) = (x + \omega + t(y) + \rho^{2n+2}\alpha_1(x,y,\rho) \ , \ y + \rho^{2n+1}\beta_1(x,y,\rho))$$

où α_1 et β_1 sont des fonctions C^∞ de x , y , ρ pour $|y| \leq \frac{1}{2}$ et ρ voisin de 0 .

La mesure $rdrd\vartheta$ était préservée dans les coordonnées (ϑ,r) ; la mesure de Lebesgue $dxdy$ est donc préservée dans les nouvelles coordonnées (x,y) . Si ρ est assez petit, on déduit de l'hypothèse $b_1 > 0$ que $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$ est borné inférieurement sur tout A par une constante positive (on a écrit $F(x,y) = (F_1(x,y),F_2(x,y))$). Le difféomorphisme $\overline{F}$ apparaît ainsi comme une "distorsion monotone" de l'anneau $\overline{A}$: chaque rayon $\vartheta = \vartheta_0$ a pour image par le relèvement F une courbe coupant les autres rayons en au plus un point (figure 1).

Il est souvent agréable de faire un dernier changement de variables en remplaçant (x,y) par $(x , F_1(x,y) - x - \omega)$ (la mesure conservée n'est plus $dxdy$) ; F s'écrit alors

$$(*) \qquad F(x,y) = (x + \omega + y \ , \ y + \varphi(x,y)) \ ,$$

où φ est un $O(\rho^{2n+1})$.

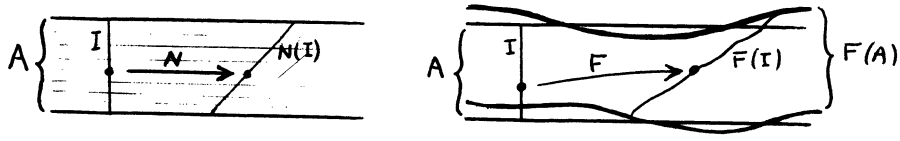


Figure 1

Si $\partial_i\bar{A}$, $i = 0,1$, sont les composantes connexes du bord de $\bar{A}$, $\bar{F}(\partial_i\bar{A})$ est proche de $\bar{N}(\partial_i\bar{A}) = \partial_i\bar{A}$; par contre, si q est "grand", $\bar{F}^q(\partial_i\bar{A})$ peut devenir très complexe et n'est en général pas le graphe d'une application de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$. Il n'est donc pas possible d'appliquer le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff [4] à la recherche d'orbites périodiques de $\bar{F}$, c'est-à-dire de points fixes de $\bar{F}^q$, si on ne sait pas à l'avance que $\bar{F}$ possède des courbes invariantes (notons que la théorie de Birkhoff implique que de telles courbes sont nécessairement des graphes lipschitziens, voir § 2, remarque 2).

Les théories d'Aubry et Mather exigent également un bon comportement de la restriction de $\bar{F}$ au bord de $\bar{A}$ - Aubry considère des distorsions monotones $\bar{F}$ du cylindre infini $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}$ qui tordent indéfiniment les génératrices dans les deux directions (l'image par le relèvement F d'un rayon $x = x_0$ est le graphe d'une fonction $y = y_{x_0}(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ entier), Mather considère des distorsions monotones $\bar{F}$ de l'anneau $\mathbb{T}^1\times[01]$ qui laissent invariante chaque composante du bord - Le grand progrès est qu'utilisant la propriété de distorsion monotone (ce que ne fait pas le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff) elles fournissent des orbites possédant une propriété d'ordre qui les fait ressembler à des orbites situées sur une courbe invariante et les empêche d'osciller trop sauvagement (estimations lipschitziennes). Il est alors possible de localiser a priori ces orbites et de montrer leur existence en utilisant une modification de $\bar{F}$ coïncidant avec $\bar{F}$ sur la région où elles doivent se trouver mais ayant les propriétés requises au bord de l'anneau.

2. ESTIMATIONS LIPSCHITZIENNES ET LOCALISATION A PRIORI DES ORBITES ORDONNÉES

Chaque orbite de $\bar{N}$ est également l'orbite d'une rotation ; en particulier, la projection $\bar{\pi} : \mathbb{T}^1\times\mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ est injective sur ces orbites et la restriction de $\bar{N}$ respecte l'ordre circulaire. Les orbites de $\bar{F}$ ayant ces deux propriétés seront dites "ordonnées". Ce sont celles qui miment au plus près la dynamique de $\bar{N}$: elles possèdent un nombre de rotation $\omega = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_1^n(x,y)}{n}$ (où $F^n(x,y) = (F_1^n(x,y),F_2^n(x,y))$), ce qui n'est en général pas le cas de toutes les orbites de $\bar{F}$ [1].

Plus généralement, suivant Mather, nous dirons qu'un sous-ensemble M de A $(= \mathbb{R}\times[01]$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ est " F-ordonné" si

1) M est invariant par F , F^{-1}, et par les translations $T_{\pm1}(x,y) = (x\pm1,y)$ (en particulier M définit $\bar{M}\subset\bar{A}$ $(=\mathbb{T}^1\times[01]$ ou $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R})$) invariant par $\bar{F}$ et $\bar{F}^{-1}$,

2) la restriction à M de la projection $\pi(x,y) = x$ est injective,

3) si (x,y) et (x',y') sont deux éléments de M vérifiant $x < x'$, on a

$$\pi(F(x,y)) < \pi(F(x',y')) \quad \text{et} \quad \pi(F^{-1}(x,y)) < \pi(F^{-1}(x',y'))$$

(où $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la première projection).

Lemme.— Si M est F-ordonné, il en est de même de son adhérence. □

Seule l'injectivité de π n'est pas évidente ; elle découle du lemme suivant

donnant des estimations lipschitziennes uniformes pour M [5], [20] : nous supposerons (ce sera vérifié pour nous) que F et F^{-1} sont uniformément lipschitziennes et que $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ et son analogue pour F^{-1} sont bornées inférieurement par une constante $a > 0$.

Lemme.— Il existe une constante ℓ ne dépendant que de F telle que, si M est F-ordonné et si (x,y) , (x',y') appartiennent à M , on ait

$$|y' - y| \leq \ell |x' - x| \ . \qquad \square$$

La démonstration est contenue dans la figure 2 où l'on a supposé que $y > y'$ (sinon remplacer F par F^{-1}) :

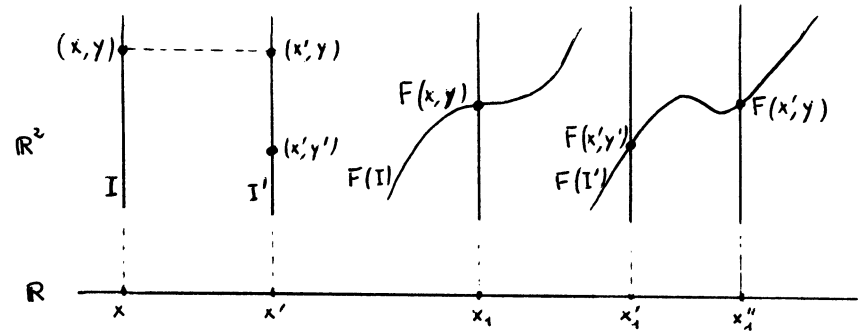


Figure 2

On a

$$a(y - y') \leq x_1'' - x_1' \leq x_1'' - x_1 \leq b(x' - x) \ .$$

La première inégalité vient de la condition de distorsion monotone, la seconde du caractère ordonné de M , et la troisième du caractère lipschitzien uniforme de F . On peut donc prendre pour ℓ le sup de $\frac{b}{a}$ et de la quantité analogue définie par F^{-1} .

Si M est F-ordonné et fermé, le lemme précédent prouve que sa projection $\overline{M}$ dans $\overline{A}$ est compacte ; son image $K = \pi(M)$ est donc fermée dans $\mathbb{R}$. F induit une application bijective croissante de K dans K , somme de l'identité et d'une fonction périodique, qui se prolonge par interpolation linéaire en un homéomorphisme k de $\mathbb{R}$ relevant un homéomorphisme $\overline{k}$ de $\mathbb{T}^1$. Autrement dit, la restriction de $\overline{F}$ à $\overline{M}$ est conjuguée à la restriction de $\overline{k}$ à un fermé invariant $\overline{K}$. En particulier, à M (resp. $\overline{M}$) est associé un nombre de rotation réel (resp. élément de $\mathbb{T}^1$), commun à toutes les orbites qui le composent. Nous appelerons "*ensemble invariant d'Aubry-Mather de* $\overline{F}$ " un fermé invariant minimal $\overline{M}$ non vide dont le relèvement M est F-ordonné.

Il découle de la structure des homéomorphismes du cercle qu'un tel ensemble est une orbite périodique ordonnée comme les orbites de la rotation correspondante si le nombre de rotation de M est rationnel, une courbe fermée invariante ou un ensemble

de Cantor invariant si le nombre de rotation de M est irrationnel.

L'existence de l'homéomorphisme k fournit une évaluation assez fine de la constante lipschitzienne ℓ [16] lorsque, comme dans (*), F est la perturbation d'une forme normale $N(x,y) = (x+\omega+y, y)$; notons $\bar{\psi} : \bar{K} \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ l'application (continue) dont $\bar{M}$ (fermé) est le graphe et $\psi : K \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ son relèvement : si l'on note également $\bar{\psi}$ (resp. ψ) l'extension de cette application à $\mathbb{T}^1$ (resp. $\mathbb{R}$) par interpolation linéaire, on a $k(x) = x + \omega + \psi(x)$ et l'invariance de M se traduit par $\frac{k+k^{-1}}{2}$ = Identité + $\varphi(k^{-1}, \psi \circ k^{-1})$ aux points de K . On peut en déduire que $\ell = \mathrm{lip}(\psi|K) = \mathrm{lip}\,\psi$ est un $O(\sqrt{\|\varphi\|_{C^1}})$ et tend donc vers 0 avec $\|F-N\|_{C^1}$. Un éventuel ensemble F-ordonné de nombre de rotation ω est donc nécessairement contenu dans un petit voisinage tubulaire de $y = 0$ de taille $O(\rho^{(2n+1)/2})$; en effet, le graphe de ψ doit rencontrer cette droite, i.e. $\psi(x) = k(x) - x - \omega$ s'annule, par une propriété fondamentale du nombre de rotation [15]. Cette localisation a priori des orbites ordonnées fait complètement défaut pour les orbites générales qui, a priori, peuvent faire de grandes excursions même si leur nombre de rotation est défini.

Remarques.— 1) Herman [18] déduit de l'inégalité de Denjoy-Koksma [15] que, si $\bar{M}$ est un ensemble invariant d'Aubry-Mather du type Cantor, ses trous (composantes connexes du complémentaire de sa projection sur $\mathbb{T}^1$) sont majorés par la variation de ψ , donc par ℓ , ce qui rend bien difficile la distinction sur ordinateur entre un tel ensemble et une courbe invariante pour les petites perturbations ! De même, si $\bar{M}$ est une orbite périodique $\frac{p}{q}$, la distance de deux points consécutifs est majorée par $\frac{1}{q} + \ell$.

2) Par définition, un ensemble invariant d'Aubry-Mather est un graphe. Pour les courbes fermées invariantes, Birkhoff a montré que ce n'est pas une restriction [5]. Plus précisément, soit $\bar{F}$ une distorsion monotone de l'anneau $\bar{A} = \mathbb{T}^1 \times [01]$, et $\bar{U}$ un ouvert relativement compact de $\bar{A}$ homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times [01]$. Si $\bar{U}$ est invariant par $\bar{F}$ et contenu dans l'ensemble non-errant de $\bar{F}$, la frontière de $\bar{U}$ est le graphe d'une application continue $\bar{\psi}$ de $\mathbb{T}^1$ dans $[01]$ (voir [16]). Ceci s'applique en particulier au cas où $\bar{F}$ conserve l'aire puisqu'alors le théorème de récurrence de Poincaré implique que l'ensemble non-errant de $\bar{F}$ coïncide avec l'anneau entier. Ce qui précède montre que $\bar{\psi}$ est automatiquement lipschitzienne.

3. FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Dans ce paragraphe $\bar{A}$ (resp. A) désigne ou bien un anneau compact $\mathbb{T}^1 \times [ab]$ (resp. son revêtement universel $\mathbb{R} \times [ab]$) ou bien un anneau $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et $F : A \to A$ le relèvement d'une distorsion monotone $\bar{F}$ de $\bar{A}$, préservant les bords dans le premier cas, distorsion infinie dans les deux directions dans le second cas. Dans le cas à bord, on note F_0 et F_1 les restrictions de F à $\mathbb{R} \times \{a\}$ et $\mathbb{R} \times \{b\}$, et on définit

$$B = \{(x,x') \in \mathbf{R}^2 , F_0(x) \leq x' \leq F_1(x)\} .$$

Dans le cas sans bord on pose simplement $B = \mathbf{R}^2$.

La conservation de l'aire équivaut à l'existence d'une fonction continue $h : B \to \mathbf{R}$, C^∞ dans l'intérieur de B , bien définie à une constante près par

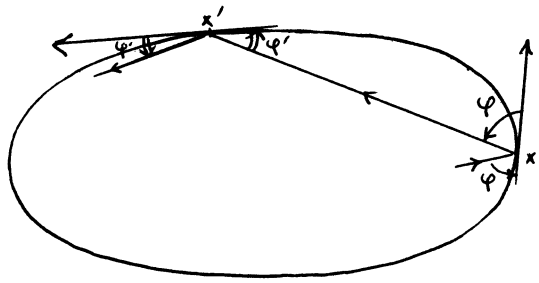
$$dh(x,x') = y(x,x')dx - y'(x,x')dx' ,$$

où $y = y(x,x')$ et $y' = y'(x,x')$ sont uniquement définis par la condition que $F(x,y) = (x',y')$.

Réciproquement, h définit F par

$$F(x , \frac{\partial h}{\partial x}(x,x')) = (x' , - \frac{\partial h}{\partial x'}(x,x')) .$$

Le premier cas est illustré par l'exemple célèbre, étudié par Birkhoff [6], du billard convexe (figure 3).



$$\begin{cases} y = -\cos\varphi \\ y' = -\cos\varphi' \\ F(x,y) = (x',y') \end{cases}$$

Figure 3

L'anneau $\overline{A} = \mathbb{T}^1 \times [-1,1]$ est formé des couples (x,y) de l'abcisse curviligne x d'un point du bord du billard et du cosinus $y = -\cos\varphi$ de l'angle orienté φ (compris entre 0 et π) que fait avec la tangente en x une demi-droite rentrant dans le billard (morceau de trajectoire). L'application F est définie sur la figure 3, F_0 est l'Identité, F_1 est la translation T_1 .

Le lecteur vérifiera que la mesure $dxdy$ est préservée et que la fonction génératrice $h(x,x')$ n'est autre que la distance euclidienne de x à x' .

Dans les exemples d'Aubry, qui illustrent le second cas, c'est au contraire la fonction génératrice qui est l'"objet physique" (au signe près) et le système dynamique l'objet dérivé : il s'agit d'étudier les états stationnaires que peut prendre une chaîne périodique d'atomes, couplés deux à deux par un potentiel élastique, lorsqu'elle est soumise à un potentiel périodique de période différente. Dans le modèle classique de Frenkel-Kontorova, l'énergie microscopique est de la forme $\Phi(\ldots,x_i,\ldots) = -\sum_i h(x_i,x_{i+1})$, où x_i désigne la position du i-ième atome, et h est de la forme

$$h(x_i,x_{i+1}) = -\frac{\lambda}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi x_i}{a}\right) - \frac{1}{2}c(x_{i+1}-x_i)^2 + \mu(x_{i+1}-x_i)$$

et les états stationnaires sont les projections $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sur $\mathbf{R}$ des orbites

$(x_i,y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ du difféomorphisme F associé à la fonction génératrice h.

L'existence des fonctions génératrices rend très faciles ici les problèmes de prolongement dans la classe des difféomorphismes conservant l'aire : il suffit de prolonger la fonction génératrice !

Dans notre cas, on remplacera F par un difféomorphisme G coïncidant avec F sur un voisinage tubulaire A' de la droite $r = \rho$ (i.e. $y = 0$) et avec N en dehors d'un voisinage tubulaire A contenant A' dans son intérieur. Il sera commode de supposer que G est défini sur $A = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et est une distorsion infinie dans les deux directions (autrement dit, G et sa restriction à A représentent les deux cas ci-dessus). La fonction génératrice de F vérifie $h(x+1,x'+1) = h(x,x')$ (cela vient de l'invariance de $r = 0$) et il en sera de même de la fonction génératrice de G. Si A' est bien choisi, les estimations lipschitziennes du paragraphe 2 appliquées à G assurent que tout ensemble G-ordonné de nombre de rotation $\omega = g(\rho^2)$ se trouve dans A', donc est invariant par F et F-ordonné. Les paragraphes suivants sont consacrés à la preuve de l'existence de tels ensembles, d'abord lorsque ω est rationnel, puis dans le cas général par un passage à la limite qu'autorisent les estimations lipschitziennes.

Remarque.— En différentiabilité suffisante (par exemple C^4 [30]) le théorème des courbes invariantes assure l'existence de courbes fermées invariantes F-ordonnées dans tout voisinage de 0. On obtient donc directement des anneaux invariants par F. Il serait cependant désagréable de faire dépendre le résultat essentiellement topologique qu'est l'existence d'orbites périodiques ou quasi-périodiques d'un théorème analytique considérablement plus difficile à démontrer et, qui plus est, faux en basse différentiabilité ([38], [16], remarque 2 du § 5 ; ce dernier point n'est pas vraiment un argument car les formes normales utilisées exigent au moins trois dérivées (pour que b_1 soit défini)).

4. ORBITES PÉRIODIQUES ORDONNÉES DES DISTORSIONS MONOTONES CONSERVATIVES DE L'ANNEAU

Nous considérons des distorsions monotones G, de fonction génératrice h, analogues au G introduit dans le paragraphe précédent : définies sur $A = \mathbb{R}^2$ tout entier, elles coïncident avec une forme normale N en dehors de $A = \mathbb{R} \times [ab]$.

La fonction génératrice h est bornée supérieurement et vérifie $h(x+1,x'+1) = h(x,x')$; de plus elle est de classe C^2 et sa dérivée seconde $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x,x')$ est positive en tout point.

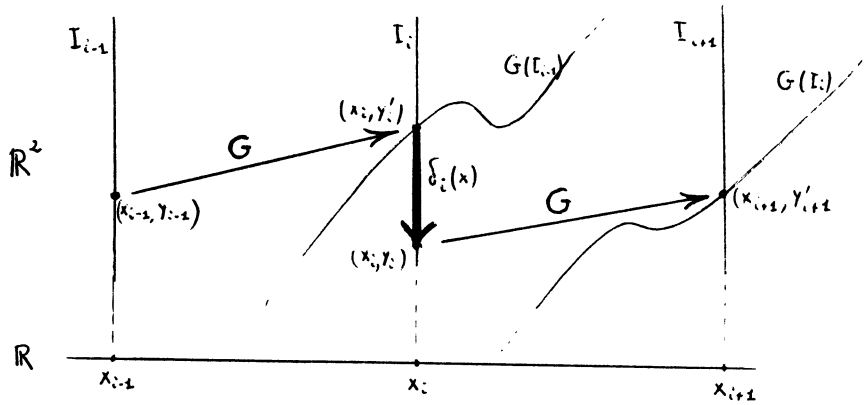
La théorie qui va suivre pourrait se faire directement dans l'un des deux cas évoqués au paragraphe précédent : l'hypothèse ci-dessus, naturelle ici, simplifie légèrement l'exposé.

Appelons (avec Aubry) *état* une suite $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de réels (si on se restreignait à A il faudrait de plus supposer que, pour tout i, $(x_i,x_{i+1}) \in B$).

La somme $\sum_{i\in\mathbb{Z}} h(x_i,x_{i+1})$ n'a aucune raison d'être définie, mais ses dérivées partielles

$$\delta_i(x) = \frac{\partial h}{\partial x'}(x_{i-1},x_i) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_i,x_{i+1})$$

le sont très certainement et les *états stationnaires* x, définis par $\delta_i(x) = 0$ pour tout i, ne sont autres que les projections sur $\mathbb{R}$ des orbites de G (figure 4).



$$\left(y'_i = -\frac{\partial h}{\partial x'}(x_{i-1},x_i)\ ,\ y_i = \frac{\partial h}{\partial x}(x_i,x_{i+1})\right).$$

Figure 4

Si p et q sont des entiers, on note $X_{p,q}$ l'espace topologique des états $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que $x_{i+q} = x_i + p$ pour tout i.

La topologie de $X_{p,q}$ est induite par le plongement de $X_{p,q}$ dans $\mathbb{R}^q$ défini (par exemple) par $x \longrightarrow (x_o,\ldots,x_{q-1})$.

Soit $W_{oq} = W : X_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction C^∞ définie par

$$W(x) = \sum_{i=o}^{q-1} h(x_i,x_{i+1}) \left[= \sum_{i=m}^{m+q-1} h(x_i,x_{i+1}) \text{ (pour tout } m)\right].$$

W est invariante par translation, c'est-à-dire

$$W(x) = W(T(x)),$$

où $T(x) = (\tilde{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\tilde{x}_i = x_i + 1$. L'application $W : X_{p,q}/T \longrightarrow \mathbb{R}$ étant propre, il existe un *état maximal* $x \in X_{p,q}$ réalisant le maximum de W.

Un tel état est évidemment stationnaire (si on suppose G défini seulement sur A, il faut vérifier qu'un état maximal ne se trouve pas sur le "bord" de $X_{p,q}$, formé des états tels que $(x_i,x_{i+1}) \in \partial B$ pour au moins un i).

On obtient ainsi des orbites de G, relevant des orbites périodiques de $\overline{G}$, de nombre de rotation $\frac{p}{q}$. Le lemme qui suit, dû à Aubry, montre qu'elles sont nécessairement G-ordonnées.

Lemme (un aspect du "lemme fondamental" d'Aubry).– *Si* $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *sont des éléments distincts de* $X_{p,q}$ *maximisant* W, $x_i - \tilde{x}_i$ *ne s'annule pas et son signe est indépendant de* i. *De plus, tout état maximal* $x \in X_{p,q}$ *correspond à une orbite* G*-ordonnée.* □

Démonstration.– Soient deux entiers k, ℓ vérifiant $1 \le \ell - k \le q-1$: notons x' (resp. $\tilde{x}'$) l'élément de $X_{p,q}$ obtenu à partir de x (resp. $\tilde{x}$) en remplaçant x_i par $\tilde{x}_i$ (resp. $\tilde{x}_i$ par x_i) pour $k+1+nq \le i \le \ell+nq$, $n \in \mathbb{Z}$. Puisque x et $\tilde{x}$ sont des états maximaux, les quantités $\Delta = W(x) - W(x')$ et $\tilde{\Delta} = W(\tilde{x}) - W(\tilde{x}')$ sont positives ou nulles. Un calcul immédiat fournit

$$\Delta + \tilde{\Delta} = R_k + R_\ell$$

où

$$R_i = h(x_i,x_{i+1}) - h(x_i,\tilde{x}_{i+1}) + h(\tilde{x}_i,\tilde{x}_{i+1}) - h(\tilde{x}_i,x_{i+1}) = \int_{\tilde{x}_i}^{x_i}\int_{\tilde{x}_{i+1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x,x')\,dx\,dx'$$

est du signe de $(\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1})(\tilde{x}_i - x_i)$.

De $R_i = R_{i+q}$ on déduit que $R_k + R_\ell \ge 0$ pour tous les couples (k,ℓ) d'entiers tels que $k - \ell \neq 0$ modulo q.

S'il existe k tel que $R_k < 0$, on a $R_\ell > 0$ pour tous les $\ell \neq k$ modulo q ce qui signifie que $\tilde{x}_i - x_i$ ne s'annule pas et change une seule fois de signe sur une période $i_0 \le i < i_0 + q$; mais la périodicité rend ceci impossible.

S'il existe k tel que $R_k = 0$, par exemple si $x_k = \tilde{x}_k$, on a $R_m \ge 0$ pour tout m. Les états maximaux x, $\tilde{x}$ étant la projection sur $\mathbb{R}$ d'orbites de G, la propriété de distorsion monotone implique que $(\tilde{x}_{k-1} - x_{k-1})(\tilde{x}_{k+1} - x_{k+1}) < 0$ (voir figure 5 : on a utilisé $x \neq \tilde{x}$, qui implique $y_k \neq \tilde{y}_k$ (orbites distinctes)).

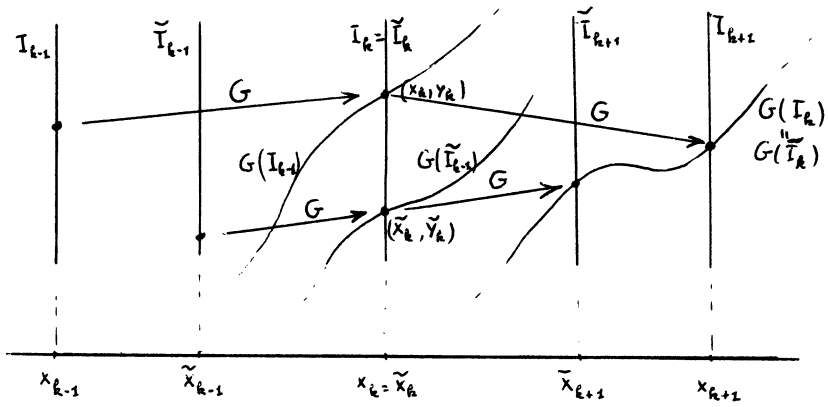


Figure 5

Autrement dit, dans ce cas comme dans le cas précédent, les graphes des fonctions linéaires par morceaux interpolant les fonctions $i \to x_i$ et $i \to \tilde{x}_i$ s'intersectent transversalement. Le même argument de périodicité implique donc l'existence d'un entier ℓ, compris entre $k+2$ et $k+q-2$, vérifiant $x_\ell = \tilde{x}_\ell$. On en déduit

que $R_k + R_\ell = \Delta + \tilde{\Delta} = 0$, donc $\Delta = \tilde{\Delta} = 0$. Les états x' et $\tilde{x}'$ associés aux entiers k , ℓ sont donc également maximaux, donc stationnaires, c'est-à-dire projection d'orbites de G . Mais x_i et x_i' coïncident pour au moins deux indices consécutifs, ce qui implique la coïncidence des orbites correspondantes (x_i et x_{i+1} déterminent $y_i = \frac{\partial h}{\partial x}(x_i,x_{i+1})$, donc l'orbite de (x_i,y_i)) c'est-à-dire l'égalité de x et x' ; de même, $\tilde{x} = \tilde{x}'$, donc $x = \tilde{x}$ contrairement à l'hypothèse.

Finalement, l'unique possibilité est $R_i > 0$ pour tout i , ce qui démontre la première partie du lemme. La deuxième partie s'obtient en comparant les états maximaux $\tilde{x}$ et $\tilde{\tilde{x}}$ définis par $\tilde{x}_i = x_{i+m} + n$, $\tilde{\tilde{x}}_i = x_{i+m'} + n'$: si $\tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i < 0$ pour tout i , on a également $x_{i+qm} + qn < x_{i+qm'} + qn'$, c'est-à-dire $pm + qn < pm' + qn'$. Autrement dit

$$\left[\forall i \ , \ x_{i+m} + n \leqq x_{i+m'} + n'\right] \iff \left[m\frac{p}{q} + n \leqq m'\frac{p}{q} + n'\right]$$

dont le lecteur vérifiera que c'est l'exacte traduction du caractère G-ordonné de l'orbite $(x_i,y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ qui se projette sur x .

Remarques.— 1) Si on se restreint à A , la preuve que nous avons donnée doit être modifiée, car il n'y a aucune raison pour que x' et $\tilde{x}'$ soient encore des états (pour certains indices i , $h(x_i,\tilde{x}_{i+1})$ ou $h(\tilde{x}_i,x_{i+1})$ peut n'être pas défini). Mather a donné une démonstration directe du lemme en introduisant les opérations $(x \wedge \tilde{x})_i = \sup(x_i,\tilde{x}_i)$ et $(x \vee \tilde{x})_i = \inf(x_i,\tilde{x}_i)$ dont il vérifie qu'elles fournissent bien des états $x \wedge \tilde{x}$ et $x \vee \tilde{x}$.

2) Dans [5], [10] et [20], l'existence d'orbites périodiques ordonnées est obtenue en maximisant W sur le sous-espace des états ordonnés, ce qui oblige, même dans le cas de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, à vérifier que le maximum n'est pas atteint en un point du "bord" de ce sous-espace (sinon un tel état maximal n'aurait aucune raison d'être stationnaire).

3) Historiquement l'existence d'orbites périodiques au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif fut obtenue grâce au théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff appliqué à l'itéré $\overline{G}^q$. La deuxième démonstration qu'a donnée Birkhoff de ce théorème [4] s'applique à un anneau $\mathbb{T}^1 \times [ab] \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ dont une seule des composantes du bord est invariante, l'autre ayant pour image par $\overline{G}^q$ le graphe d'une application de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$. Si q n'est pas trop grand (majoré par une certaine fonction de $\left|\omega_o - \frac{p}{q}\right|^{-1}$) un tel anneau est défini (dans les coordonnées polaires (ϑ,r)) par $0 \leq r \leq r_o$, où r_o est légèrement plus grand que le rayon ρ vérifiant $g(\rho^2) = \frac{p}{q}$. En effet, pour de tels $\frac{p}{q}$, $\overline{G}^q$ est encore au voisinage du cercle $r = \rho$ une "petite" perturbation de $\overline{N}^q$. Dans les autres cas, on ne peut appliquer le théorème que si l'on dispose de courbes invariantes entourant le point fixe. Notons de plus que lorsque q n'est pas trop grand au sens ci-dessus, on peut obtenir les orbites périodiques de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ (d'ailleurs forcément ordonnées) par une simple application du théorème des fonctions implicites en montrant l'existence d'une courbe fermée, graphe d'une fonction de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$, dont chaque point a pour image par

$\overline{G}^q$ un point situé sur le même rayon (comparer à [7], [28], [31], [40]).

En conclusion, je ne connais pas d'exemple où la liberté de ne pas laisser invariante une composante du bord fournisse effectivement des orbites périodiques qu'on ne sache obtenir autrement.

4) Un théorème purement topologique que vient de démontrer G.R. Hall [14] permet cependant d'appliquer le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff dans les cas où l'on ne dispose pas de courbes invariantes : par un bel argument d'"enlacement" Hall montre que si une distorsion monotone C^0 , préservant les bords mais pas nécessairement conservative, d'un anneau $A = \mathbb{T}^1 \times [ab]$ possède une orbite périodique de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, elle en possède également une qui est ordonnée !

5) En remarquant que, si (x_o,y_o) fait partie d'une orbite G-ordonnée de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ relevant une orbite périodique de $\overline{G}$, la dérivée $DG^q(x_o,y_o)$ est conjuguée à l'application linéaire $M_q : (\delta x_o,\delta x_1) \longmapsto (\delta x_q,\delta x_{q+1})$ (on a noté $DG^q(x_o,y_o)(\delta x_o,\delta y_o) = (\delta x_q,\delta y_q)$) et en utilisant les formules de récurrence vérifiées par le déterminant des matrices de Jacobi, on obtient la formule (de Mc Kay et Meiss)

$$\text{Trace } DG^q(x_o,y_o) = 2 + \frac{\det H_q}{\prod_{i=o}^{q-1}\left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x_i,x_{i+1})\right)}$$

où H_q est le hessien (dérivée seconde) de W en l'état $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ projection de l'orbite de (x_o,y_o) .

On en déduit qu'une orbite périodique maximale (i.e. telle que l'état correspondant soit maximal) est génériquement hyperbolique (col). On trouvera une démonstration directe de cette assertion dans [10], basée sur le fait que l'image de l'axe vertical par $DG^n(x_o,y_o)$ reste dans un demi-espace et ne tourne donc pas (i.e. si $DG^n(x_o,y_o) = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$, on a $c_n > 0$ pour tout $n > 0$). En ceci les orbites périodiques maximales ressemblent beaucoup aux courbes fermées invariantes : ces dernières sont nécessairement des graphes lipschitziens (théorie de Birkhoff [5], [16]) et la tangente (et donc les images successives de l'axe vertical) reste prisonnière d'un double cône.

5. ORBITES QUASI-PÉRIODIQUES FAIBLES ET ENSEMBLES INVARIANTS D'AUBRY-MATHER

G vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent, notons ω_o et ω_1 les nombres de rotation des restrictions de G aux composantes $\mathbb{R} \times \{a\}$ et $\mathbb{R} \times \{b\}$ du bord de A . Les orbites de G de nombre de rotation compris entre ω_o et ω_1 se trouvent nécessairement dans A . Nous avons montré que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ compris entre ω_o et ω_1 , il existe une orbite G-ordonnée de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ (donc contenue dans A) relevant une orbite périodique de période q de $\overline{G}$. Soit maintenant ω un irrationnel compris entre ω_o et ω_1 : si $(\mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'orbites G-ordonnées, de nombres de rotation $\frac{p_i}{q_i}$ tendant vers ω , relevant une

suite d'orbites périodiques de périodes q_i de $\overline{G}$, elle possède une sous-suite convergeant vers une orbite G-ordonnée de nombre de rotation ω. C'est une conséquence des estimations lipschitziennes uniformes vérifiées par les orbites G-ordonnées [20]. On en déduit le

THÉORÈME.— *Pour tout* ω *compris entre* ω_0 *et* ω_1, $\overline{G}$ *possède un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation* ω (modulo 1). □

Remarques.— 1) Génériquement au sens de Baire (dans la topologie C^∞ par exemple), $\overline{G}$ ne possède pas dans l'intérieur de A de courbe fermée invariante de nombre de rotation rationnel ([16] ; ceci était essentiellement connu de Poincaré).

Le sous-ensemble I de $\mathbb{T}^1$ formé des nombres de rotation des courbes invariantes de $\overline{G}$ est alors un fermé (cela vient des estimations lipschitziennes uniformes) ne rencontrant pas $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; en particulier, il existe des irrationnels ω auxquels ne correspond pas de courbe invariante. Tout sous-ensemble invariant d'Aubry-Mather ayant ce nombre de rotation est forcément un ensemble de Cantor.

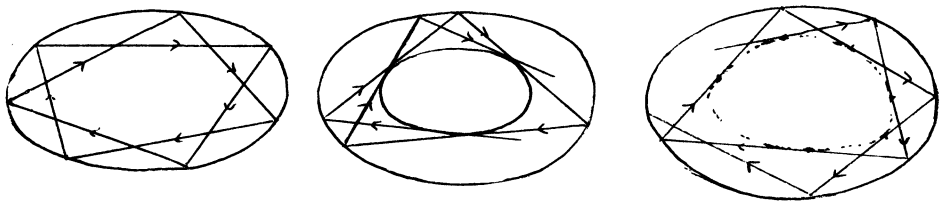
2) Le théorème des courbes invariantes affirme que, si $\overline{G}$ est assez proche d'une forme normale $\overline{N}$, I contient un ensemble de Cantor. La proximité doit être réalisée dans la topologie C^k, $k \geq 3$ [17] et $\overline{G}$, supposé C^∞ par exemple, induit sur les courbes invariantes (C^∞) données par le théorème un difféomorphisme C^∞-conjugué à une rotation de nombre irrationnel $\omega \in I$ (véritables mouvements quasi-périodiques). Si $k > 3$, la mesure de l'ensemble de ces courbes est positive [33], et c'est ce phénomène qui contredit l'hypothèse ergodique de Boltzmann. Herman a donné des exemples montrant que l'hypothèse avec $k = 3 - \varepsilon$ n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une courbe invariante de nombre de rotation donné, aussi "bon" soit-il. Quant à l'hypothèse avec $k = 2 - \varepsilon$ elle n'est pas incompatible avec l'inexistence totale de courbes invariantes [16]. Par ailleurs, on montrera que si $\overline{G}$ possède une courbe fermée invariante C^0 de nombre de rotation irrationnel, cette courbe contient l'*unique* ensemble invariant d'Aubry-Mather de $\overline{G}$ ayant ce nombre de rotation.

En basse différentiabilité ($\overline{G}$ de classe $C^{3-\varepsilon}$), Herman [16] a donné des exemples de courbes invariantes sur lesquelles $\overline{G}$ est un contre-exemple de Denjoy (i.e. possède un ensemble de Cantor invariant [15]). On ignore si un tel exemple existe en classe C^∞ dans le monde des difféomorphismes conservatifs, mais Hall [13] a construit des difféomorphismes C^∞ qui induisent un contre-exemple de Denjoy sur une courbe fermée invariante lipschitzienne.

3) Lorsqu'il n'existe pas de courbe invariante d'un nombre de rotation ω irrationnel donné, l'unicité d'un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω n'est pas claire. Elle est même fausse dans la situation globale, i.e. "loin" du point fixe elliptique [26], [19]. Les situations où la non-unicité est prouvée sont également celles où les Cantors invariants d'Aubry-Mather possèdent une structure

hyperbolique [2], [11], [19]. Il n'est pas clair qu'une telle structure puisse exister dans la situation locale qui nous intéresse. Ce problème n'est pas étranger à celui de l'existence de courbes fermées invariantes supportant un contre-exemple de Denjoy puisqu'une perturbation d'un tel exemple fournit des Cantors invariants "paraboliques" [16].

4) Il peut être agréable de se reposer ici en interprétant dans le cas des billards les trois types d'ensembles invariants d'Aubry-Mather (figure 6).



orbite périodique $\frac{2}{7}$ caustique "quasi-caustique"

Figure 6

Nous finirons ce paragraphe en donnant une idée des démonstrations originales qu'ont données Aubry et Mather du théorème ci-dessus et de diverses extensions. Curieusement, ni l'un ni l'autre n'utilise explicitement les estimations lipschitziennes (bien que chez Aubry elles soient sous-jacentes dans le passage à la limite).

A. La méthode d'Aubry

Soit $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X_{p,q}$ un état maximal au sens ci-dessus ; Aubry commence par remarquer que x est encore maximal si on le considère comme élément de $X_{\ell p,\ell q}$, i.e. pour la fonctionnelle

$$W_{o,\ell q} = \sum_{i=o}^{\ell q-1} h(x_i,x_{i+1}) \qquad (\ \ell \text{ entier}, \ \ell \geq 1\ ).$$

Cela vient de ce qu'un état maximal de $X_{\ell p,\ell q}$ doit vérifier les conditions d'ordre

$$\left[\forall i\ ,\ x_{i+m} + n \leqq x_{i+m'} + n'\right] \iff \left[\ m\frac{\ell p}{\ell q} + n \leqq m'\frac{\ell p}{\ell q} + n'\right],$$

donc $x_{i+q} = x_i + p$, et $W_{o,\ell q}(x) = \ell W_{oq}(x)$.

On en déduit que x est maximal au sens suivant :

DÉFINITION.— *Un état (quelconque)* $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *est maximal (au sens d'Aubry) si pour tout couple d'entiers* $m < n$, *et tout état* $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $\tilde{x}_i = x_i$ *pour* $i \leq m$ *et* $i \geq n$, *on a* $W_{mn}(x) \geq W_{mn}(x')$, *où* $W_{mn}(x) = \sum_{i=m}^{n-1} h(x_i,x_{i+1})$. □

Il est clair qu'un état maximal est stationnaire (il est également clair que cela demande une démonstration si on se restreint à A car l'espace des états a alors un "bord"). On appellera orbites maximales les orbites de G correspondantes.

D'autre part, si $\left\{x^n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{Z}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'états maximaux qui converge simplement vers $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} x_i^n = x_i$ pour tout i, la limite x est encore un état maximal. Les ensembles invariants d'Aubry-Mather de $\overline{G}$ obtenus

dans ce paragraphe et le précédent sont donc formés d'orbites dont les relèvements définissent des états maximaux. Voici comment Aubry les obtient : choisissons une suite x^n formée d'états maximaux définis par des relèvements d'orbites périodiques ordonnées de $\overline{G}$ dont les nombres de rotation $\frac{p_n}{q_n}$ convergent vers le nombre irrationnel ω .

Après remplacement éventuel de x_i^n par $x_i^n + \ell$ on peut supposer que, pour tout n , $0 \leq x_0^n < 1$. D'autre part, on déduit de la caractérisation du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle [15] que, pour tous i , j , n , on a $\left|x_j^n - x_i^n - (j-i)\frac{p_n}{q_n}\right| < 1$. Ceci montre l'existence d'une sous-suite qui converge simplement vers un état maximal x de nombre de rotation ω (i.e. tel que pour tous i , j , on ait $|x_j - x_i - (j-i)\omega| < 1$). L'orbite de $\overline{G}$ définie par x n'appartient pas nécessairement à un ensemble invariant d'Aubry-Mather (elle n'est pas nécessairement récurrente) mais un tel ensemble se trouve dans son adhérence : si $\beta = k\omega + \ell$, $\beta_n = k\frac{p_n}{q_n} + \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$, on note $x_i(\beta) = x_{i+k} + \ell$, $x_i^n(\beta_n) = x_{i+k}^n + \ell$; il suit du lemme démontré dans le paragraphe 4 que $x_i^n(\beta_n)$ est, pour tous i , n , une fonction strictement croissante de β_n . Notons qu'une généralisation de ce lemme est valable en général (lemme fondamental d'Aubry) : si x et $\tilde{x}$ sont des états maximaux, les graphes des fonctions linéaires par morceaux interpolant $i \longrightarrow x_i$ et $i \longrightarrow \tilde{x}_i$ ne peuvent se couper qu'en au plus un point, qui est ou bien un point d'intersection transversale à distance finie, ou bien un point à l'infini. De cette propriété d'intersection transversale (qui joue ici le rôle des estimations lipschitziennes) on déduit que, si $\beta \neq \beta'$, $x_i(\beta) \neq x_i(\beta')$, et donc que x_i est, pour tout i , une fonction strictement croissante de β . Si on note $\varphi_\omega^\pm(x) = \lim_{\beta \to x\pm} x_0(\beta)$, les $x^\pm(t) = (x_i^\pm(t))_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par $x_i^\pm(t) = \varphi_\omega^\pm(i\omega + t) = \lim_{\beta \to t\pm} x_i(\beta)$ forment, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble des états maximaux associés à un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω . Cet ensemble est une courbe si $\varphi_\omega^+ \equiv \varphi_\omega^-$, un ensemble de Cantor sinon.

Dans ce dernier cas, x définit une orbite qui ou bien fait partie de cet ensemble, ou bien lui est homocline (i.e. la demi-orbite positive et la demi-orbite négative tendent vers le Cantor) et se projette sur $\mathbb{T}^1$ dans les intervalles du complémentaire de sa projection.

Suivant une terminologie de la physique du solide, Aubry appelle *états fondamentaux* les états maximaux dont l'orbite de $\overline{G}$ correspondante est récurrente, et *défauts élémentaires* les autres.

L'existence de défauts élémentaires de nombre de rotation rationnel est facile à démontrer par passage à la limite à partir d'états fondamentaux proches [2], [21] : Soit $\overline{M}$ la limite d'une suite d'ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather de $\overline{G}$ dont les nombres de rotation ω_n (des relèvements) tendent vers le rationnel $\frac{p}{q}$; si $\overline{M}$ n'est pas une courbe, les trous de $\overline{M}$ (composantes connexes du complémentaire de sa projection sur $\mathbb{T}^1$) ne peuvent avoir leurs deux extrémités périodiques (i.e. projections d'éléments de $\overline{M}$ dont les orbites sont périodiques) ; ils sont en effet approchés par une suite de trous des $\overline{M}_n$ ayant chacun la propriété que la somme des

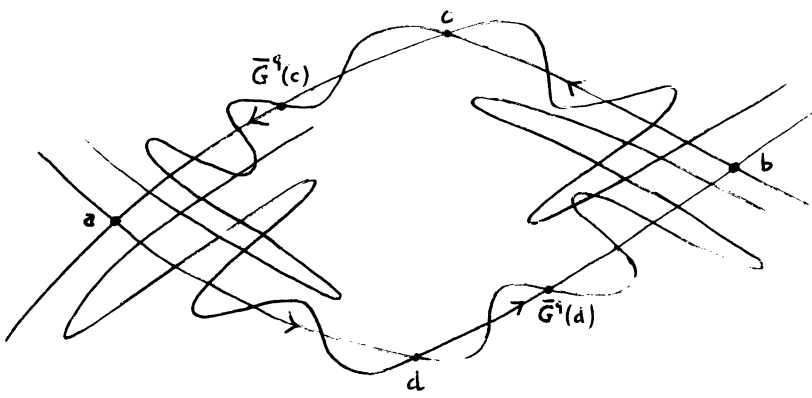
longueurs de leurs itérés par $\bar{G}$ est majorée par 1 .

Par une utilisation systématique des passages à la limite et de son lemme fondamental, Aubry réussit à comprendre la structure de l'ensemble des états maximaux : l'idée est d'utiliser les limites simples des états fondamentaux déjà construits pour encadrer les états maximaux quelconques. On obtient ainsi les résultats suivants :

1) Existence d'un nombre de rotation ω pour tout état maximal (i.e. $\lim_{|i-j|\to+\infty} \frac{x_i - x_j}{i-j} = \omega$). On notera (comme Mather) M'_ω l'ensemble des orbites maximales de G de nombre de rotation ω , M_ω le sous-ensemble formé des orbites correspondant à un état fondamental.

2) Lorsque ω est irrationnel, l'ensemble M'_ω tout entier est G-ordonné et le sous-ensemble M_ω définit par projection sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ un ensemble invariant d'Aubry-Mather $\bar{M}_\omega$ qui est l'unique fermé invariant minimal de $\bar{M}'_\omega$. L'ensemble M_ω est paramétré par le couple $\varphi^+_\omega, \varphi^-_\omega$ introduit plus haut.

3) Lorsque $\omega = \frac{p}{q}$ est rationnel, $M_{p/q}$ est encore G-ordonné, mais $M'_{p/q}$ ne l'est pas en général : il s'écrit comme réunion de deux sous-ensembles G-ordonnés $M'_{p/q,+}$ et $M'_{p/q,-}$ d'intersection $M_{p/q}$. La figure 7 explique la situation dans le cas où $\bar{M}_{p/q}$ est formé d'une orbite périodique hyperbolique : Poincaré [35] savait déjà que la conservation de l'aire forçait l'existence d'orbites homoclines et Robinson [36] implique la transversalité générique de l'intersection des variétés stables et instables aux points de ces orbites (voir aussi [40]). Remarquons que deux orbites maximales homoclines appartenant respectivement à $M'_{p/q,-}$ et $M'_{p/q,+}$ illustrent un cas d'intersection effective dans le lemme fondamental d'Aubry.



a , b éléments de $\bar{M}_{p/q}$ (fixés par $\bar{G}^q$),
c élément de $\bar{M}'_{p/q,-}$, d élément de $\bar{M}'_{p/q,+}$,
les flèches représentent la dynamique de $\bar{G}^q$.

Figure 7

Remarque.— Comme exemple de l'intérêt de la notion d'état maximal au sens d'Aubry, montrons comment on déduit immédiatement de ce qui précède l'inexistence de caustique

pour un billard convexe dont la courbure du bord s'annule en un point x_0 (théorème de Mather) : il suffit de remarquer que le morceau de trajectoire tangent à une caustique et passant par x_0 minimise localement la somme des longueurs $h(x_{-1},x_0) + h(x_0,x_1)$ au lieu de la maximiser.

B. La méthode de Mather

La fonctionnelle d'Aubry généralise "brutalement" la somme des longueurs des q côtés d'un polygône inscrit dans un billard, celle de Percival-Mather généralise la même somme divisée par q, ce qui permet de la définir par une intégrale dans le cas irrationnel.

On se place dans l'anneau $A = \mathbb{R} \times [ab]$ et on cherche a priori des sous-ensembles invariants G-ordonnés de nombre de rotation ω compris entre les nombres de rotation ω_0 et ω_1 des restrictions de G à $\mathbb{R}\times\{a\}$ et $\mathbb{R}\times\{b\}$. Un tel ensemble M (ou plutôt sa projection sur $\mathbb{R}$) peut être défini ou bien par un paramétrage φ non décroissant discontinu qui transforme la restriction $G|M$ en la translation de ω (Mather le choisit continu à gauche, mais ce qui importe est son "graphe", complété par des segments verticaux aux points de discontinuité et on aurait pu garder le couple (φ_+,φ_-) de la détermination continue à gauche et de la détermination continue à droite, comme dans la définition de M_ω par Aubry) ou bien par l'"inverse" ψ de φ qui est une pseudo-conjugaison de $G|M$ à la translation de ω et peut s'interpréter comme la primitive d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$ invariante par l'homéomorphisme $\bar{k}$ de $\mathbb{T}^1$ associé à l'ensemble G-ordonné M (figure 8 : pour définir ψ on prend le symétrique par rapport à la diagonale du "graphe" de φ)

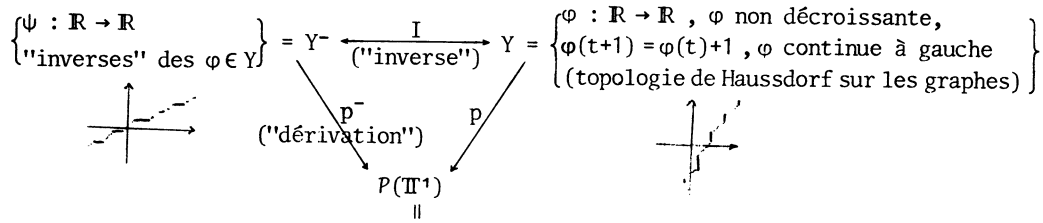


Figure 8

Soit Y_ω le sous-espace de Y formé des paramétrages φ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G|_{\mathbb{R}\times\{a\}}(\varphi(t)) \le \varphi(t+\omega) \le G|_{\mathbb{R}\times\{b\}}(\varphi(t))$,
$Y_\omega^- = \left\{\psi \in Y^- , \psi(G|_{\mathbb{R}\times\{a\}}(x)) \le \psi(x)+\omega \le \psi(G|_{\mathbb{R}\times\{b\}}(x))\right\} = I(Y_\omega)$, et $P_\omega(\mathbb{T}^1) = p(Y_\omega)$. On définit $F_\omega = Y_\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F_\omega(\varphi) = \int_0^1 h(\varphi(t)),\varphi(t+\omega))dt$$

et on vérifie que $F_\omega(\varphi \circ T_\lambda) = F_\omega(\varphi)$ si $T_\lambda(t) = t + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui implique la factorisation de F_ω en une application

$$\overline{F}_\omega : P_\omega(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dont on peut vérifier la continuité.

$P_\omega(\mathbb{T}^1) \subset P(\mathbb{T}^1)$ est faiblement compact, ce qui montre l'existence d'un $\varphi_\omega \in Y_\omega$ en lequel F_ω est maximum (il est facile de voir que $P_\omega(\mathbb{T}^1)$ est non vide pour les ω considérés).

Il reste à voir qu'un tel φ_ω nous comble. C'est évident formellement car

$$" \ DF_\omega(\varphi)\Delta\varphi = \int_0^1 \delta(\varphi,t)\Delta\varphi(t)dt \ " \ ,$$

où $\delta(\varphi,t) = -\frac{\partial h}{\partial x'}(\varphi(t-\omega),\varphi(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(\varphi(t),\varphi(t+\omega))$.

La démonstration, assez fine, de Mather exhibe suffisamment de déformations de φ_ω pour montrer qu'effectivement $\delta(\varphi_\omega,t)$ est identiquement nul : il s'agit en quelque sorte de montrer que φ_ω n'est pas sur le "bord" de $P_\omega(\mathbb{T}^1)$, mais cela n'a bien sûr pas vraiment de sens.

Remarques.— 1) Mather a montré dans [25] que $F_\omega \circ I : Y_\omega^- \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave (cela a un sens car Y_ω^- est un convexe dans l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Si ω est irrationnel, un élément maximal $\psi \in Y_\omega^-$ est forcément continu (l'homéomorphisme $\overline{k}$ associé à $\overline{M}_\omega$ a une unique mesure invariante, qui n'a pas de masse atomique, car son nombre de rotation est irrationnel [15] ; si $\overline{M}_\omega$ est un ensemble de Cantor, le graphe de ψ est un "escalier du diable").

De plus, la restriction de $F_\omega \circ I$ au sous-ensemble $X_{\omega c}^-$ formé des $\psi \in Y_\omega^-$ continus tels que $\psi(0) = 0$ (qui est dans l'image d'une section discontinue de p^- (cf. figure 8)) est alors strictement concave. Ceci montre l'unicité de l'élément de $P_\omega(\mathbb{T}^1)$ en lequel F_ω atteint son maximum : on retrouve la structure de M_ω évoquée à propos de la méthode d'Aubry.

D. Goroff [12] a montré que, dans ce cas, $F_\omega \circ I$ a une extension concave à l'espace des ψ continues non nécessairement croissantes (ou encore une extension de F_ω aux mesures pas forcément positives). En particulier, cette construction lui permet de calculer les sous-différentielles $F_\omega \circ I$.

2) L'existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather se généralise (Mather, communication orale) aux difféomorphismes $\overline{G}$ de l'anneau qui dévient la verticale dans le sens suivant : l'image par G de tout rayon est un chemin $\gamma(t)$, $t \in [01]$ dont la tangente orientée fait avec la verticale un angle qui est en chaque point algébriquement supérieur (resp. inférieur) à 0 (on a choisi une détermination à valeurs dans $\mathbb{R}$ de cet angle le long du chemin à partir de $\gamma(0)$). Notons que cette classe de difféomorphismes est stable par composition, contrairement à celle des distorsions monotones.

6. ORBITES MINIMAX ET CRITÈRES D'INEXISTENCE DES COURBES INVARIANTES

Birkhoff [6] avait déjà remarqué qu'en déplaçant le polygône représentant une orbite périodique d'un billard convexe de façon à diminuer le moins possible la somme

W des longueurs des côtés et à revenir au polygône initial (après permutation des sommets) on rencontrait une nouvelle orbite périodique correspondant au minimum de W dans cette déformation. Katok [21], puis Mather [27], ont remarqué que de telles orbites minimax existent en général pour les distorsions monotones de l'anneau, et Mather en a déduit un critère d'inexistence de courbes invariantes d'un nombre de rotation irrationnel donné.

Soit ω un nombre irrationnel et $(\varphi_\omega^+,\varphi_\omega^-)$ le paramétrage associé à l'ensemble invariant d'Aubry-Mather maximal $\overline{M}_\omega$ défini au § 5. On supposera que $\overline{M}_\omega$ est un ensemble de Cantor. Si $t \in \mathbb{R}$ est un point de discontinuité du paramétrage, on note J l'intervalle $]x_o^-,x_o^+[$, où $x_i^- = \varphi_\omega^-(i\omega + t)$ et $x_i^+ = \varphi_\omega^+(i\omega + t)$. On note X_J l'ensemble des états $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que $x_i^- \le x_i \le x_i^+$ pour tout i . Muni de la topologie produit, l'espace X_J est compact. D'autre part, les intervalles $]x_i^-,x_i^+[$ ayant des projections (injectives) disjointes sur $\mathbb{T}^1$, la série

$$\widetilde{W}_J(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (h(x_i,x_{i+1}) - h(x_i^-,x_{i+1}^-))$$

converge normalement si $x \in X_J$ et définit donc une fonction continue $\widetilde{W}_J : X_J \to \mathbb{R}$. On montre sans difficulté que cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ et s'annule en $x^- = (x_i^-)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $x^+ = (x_i^+)_{i\in\mathbb{Z}}$ (caractère maximal des états x^- et x^+). On montre de même que M'_ω s'obtient à partir de M_ω en lui ajoutant toutes les orbites de G associées aux états $x \in \bigcup_{\text{"trous" } J} \widetilde{W}_J^{-1}(0)$. Cette description a par exemple la vertu de montrer que M'_ω coïncide génériquement avec M_ω lorsque ω est irrationnel, résultat conjecturé par Aubry.

Autrement dit, il n'existe pas en général d'orbite maximale homocline à $\overline{M}_\omega$; par contre Mather montre par des techniques analogues à celles que nous avons rencontrées (assurer qu'un maximum est atteint à l'intérieur d'un espace, etc...) qu'il existe toujours de telles orbites homoclines associées à un état $x \in X_J$ minimax pour la fonction $\widetilde{W}_J$ (i.e. tel que $\widetilde{W}_J(x') = \max\{a \mid x^- \text{ et } x^+ \text{ sont dans la même composante connexe de } \widetilde{W}_J^{-1}([a,+\infty[)\}$).

On note $\Delta W_J = -\widetilde{W}_J(x') \ge 0$ et

$$\Delta W_\omega = \max_J \Delta W_J \ge 0 .$$

Il est facile de voir que ΔW_ω est fini.

Le critère de Mather est contenu dans le

THÉORÈME.— *Lorsque ω est irrationnel, il existe une courbe fermée invariante de $\overline{G}$ de nombre de rotation ω si et seulement si $\Delta W_\omega = 0$.* □

Une telle courbe est toujours le graphe d'une fonction lipschitzienne de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$ (théorie de Birkhoff déjà citée [5], [16]) mais elle n'est pas nécessairement du type de celles données par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser : elle peut a priori n'être que lipschitzienne et supporter un contre-exemple de Denjoy (cependant de tels exemples n'ont été construits, par Herman, que pour $\overline{G}$ de classe $C^{3-\varepsilon}$ [16]). Autrement dit, cette courbe ne coïncide pas forcément avec $\overline{M}_\omega$ (qui

peut être un ensemble de Cantor) mais toujours avec $\overline{M}'_\omega$. Montrons cette dernière affirmation, qui implique immédiatement le théorème : la propriété de distorsion entraîne que, s'il existe une courbe invariante, elle sépare l'anneau en une région où les points avancent plus vite sous l'action de $\overline{G}$ et une région où ils avancent moins vite ; par suite, $\overline{M}_\omega$ est contenu dans la courbe. Il reste à montrer que $\overline{M}'_\omega$ contient la courbe : le caractère G-ordonné de M'_ω montre alors la coïncidence avec la courbe. Pour voir ce point, supposons que $\overline{M}_\omega$ est un ensemble de Cantor (si c'est une courbe il est clair que $M_\omega = M'_\omega$) et considérons un intervalle $J =]x_o^-, x_o^+[$ du complémentaire de la projection sur $\mathbb{R}$ de M_ω . Il suffit de montrer que pour tout $x_o \in J$, $\widetilde{W}_J(x) = 0$ si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est l'état associé à une orbite sur la courbe. Formellement, on vérifie facilement que $\frac{d\widetilde{W}_J}{dx_o}(x) = 0$ pour tout tel x . En fait, cet argument est essentiellement correct : $x_o \longrightarrow x_i$ est lipschitzienne croissante donc presque partout dérivable et égale à l'intégrale de sa dérivée ; d'autre part la somme des longueurs des intervalles $]x_i^-, x_i^+[$ est majorée par 1 . On en déduit la convergence absolue dans $L^1(J)$ des sommes intervenant dans la preuve formelle.

Pour qu'un tel critère permette effectivement de décider que $\overline{M}'_\omega$ n'est pas une courbe, il faut être capable de calculer des approximations de ΔW_ω .

Dans cette direction, Mather montre le théorème suivant (qui malheureusement ne dit rien sur la vitesse d'approximation) :

Soit $x \in X_{p,q}$ un état fondamental de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ (correspondant donc à une orbite périodique de $\overline{G}$) ; notons x_* l'état défini par $(x_*)_i = x_{i+i_o} + j_o$, où $\frac{p}{q} i_o + j_o = \frac{1}{q}$: x_* représente la même orbite périodique avec une numérotation décalée. Soit $X_{p,q}(x)$ l'espace des états $x' = (x'_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X_{p,q}$ tels que $x_i \le x'_i \le (x_*)_i$ pour tout i . La restriction de W à $X_{p,q}(x)$ (voir la définition de W au § 4) prend son maximum en x et x_* et on peut montrer (comme pour le cas irrationnel) qu'il existe dans $X_{p,q}(x)$ au moins un état stationnaire minimax x' . On note $\Delta W_x = W(x) - W(x') \ge 0$. Mather montre que ΔW_x est indépendant du choix de l'état fondamental $x \in X_{p,q}$ et note $\Delta W_{p/q}$ la valeur commune des ΔW_x . Il obtient le

THÉORÈME.– *La fonction $\omega \longrightarrow \Delta W_\omega$ est continue en un ω irrationnel.* □

Remarques.– 1) La fonction $\omega \longrightarrow \Delta W_\omega$ est en général discontinue aux rationnels. Aubry, Le Daeron et André [2] ont un critère numérique légèrement différent, l'énergie de Peierls, qui marche également dans le cas rationnel : ils caractérisent la "différence" entre les variétés stables et instables de deux points consécutifs d'une orbite périodique (supposée hyperbolique) associée à un état fondamental.

2) On peut également trouver des orbites minimax homoclines à une orbite périodique.

3) Dans [22] les auteurs donnent une interprétation (heuristique !) de ΔW_ω comme le flux à travers l'ensemble de Cantor $\overline{M}_\omega$: les orbites de $\overline{G}$ traversent $\overline{M}_\omega$ d'autant plus facilement que ΔW_ω est grand.

QUELQUES QUESTIONS EN GUISE DE CONLUSION

Il y a d'autres façons dont s'introduisent des ensembles de Cantor invariants au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif "générique", par exemple les ensembles de Cantor associés aux "fers à cheval" produits par les orbites homoclines aux orbites périodiques hyperboliques [40], et les sous-systèmes "presque-périodiques" obtenus par intersection d'une infinité d'"îles elliptiques" emboîtées [23].

Le lien avec les ensembles de Cantor d'Aubry-Mather n'est pas clair : on ne sait pas si ces derniers peuvent être hyperboliques au voisinage d'un point fixe elliptique (voir la remarque 3 du § 5) mais, si tel était le cas, il resterait à comprendre leur relation avec les "fers à cheval" évoqués ci-dessus.

Plus généralement, l'importance dynamique de ces ensembles invariants n'est pas bien comprise. Rappelons que dans une zône d'instabilité (zône bordée par deux courbes fermées invariantes mais n'en contenant pas elle-même) il existe des orbites allant presque d'un bord à l'autre (conséquence du théorème de Birkhoff évoqué dans la remarque 2 du § 2). Ces orbites doivent traverser les ensembles de Cantor invariants, mais comment ?

Dans [20], Katok montre que la mesure de l'ensemble des Cantors invariants d'Aubry-Mather hyperboliques est nulle. La question de l'existence éventuelle d'entropie métrique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif n'est donc pas effleurée par cette théorie.

L'intérêt majeur des ensembles d'Aubry-Mather est sans doute leur caractère ordonné qui les rend, à beaucoup de points de vue, semblables à des courbes invariantes et permet de les considérer légitimement comme le "souvenir" des cercles invariants des formes normales.

Au fait, ces cercles invariants, comment se transforment-ils en ensembles de Cantor d'Aubry-Mather ?

NOTE AJOUTÉE EN JUILLET 1984

Quelque temps après qu'il ait exposé tout ceci, l'auteur a eu connaissance d'un important article de G. Hedlund ([42]) datant de 1932 qui, faisant suite à un article de M. Morse publié en 1924 ([41]), contient dans un autre cadre une bonne partie de la démarche d'Aubry, à l'exception toutefois de ce qui est relatif à l'ordre.

Hedlund étudie les géodésiques de classe A (i.e. minimisant la distance entre deux quelconques de leurs points) sur le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une métrique riemannienne bipériodique (revêtement universel d'un tore riemannien). Il montre qu'à toute droite de $\mathbb{R}^2$ correspond une telle géodésique qui en reste à distance uniformément bornée. Morse étudiait le même problème sur une surface de genre supérieur à 1 et son article est loin d'avoir été oublié des géomètres hyperbolistes.

Le lecteur remarquera aisément l'existence, pour le flot géodésique du tore plat,

d'une surface annulaire de section, anneau ouvert sur lequel l'application de premier retour est exactement le modèle d'Aubry (forme normale qui est une distorsion infinie dans les deux directions, voir § 3). Dans les cas où le flot géodésique considéré par Hedlund possède un anneau de section, les géodésiques de classe A qu'il trouve correspondent aux orbites maximales d'Aubry, le nombre de rotation étant donné par la pente de la droite associée. Hedlund remarque d'ailleurs que seul le cas "irrationnel" est nouveau, l'existence de géodésiques périodiques étant déjà connue.

Quant au lemme fondamental d'Aubry, il s'éclaire singulièrement dans ce cadre : deux géodésiques de classe A ne peuvent s'intersecter qu'en au plus un point (de même que deux droites...!).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.G. ARONSON, M.A. CHORY, R.G. HALL and R.P. McGEHEE - *Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter families of Maps of the Plane : A computer-Assisted study*, Communications in Math. Physics 83(1982), 303-354.

[2] S. AUBRY, P.Y. LE DAERON and G. ANDRÉ - *Classical ground-states of a one-dimensional model for incommensurate structures*, soumis à Communications in Math. Physics.

[3] G.D. BIRKHOFF - *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 14(january 1913), 14-22.

[4] G.D. BIRKHOFF - *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Math. (december 1925), 297-311.

[5] G.D. BIRKHOFF - *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta math. vol. 43(march 1920), 1-119.

[6] G.D. BIRKHOFF - *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta Math. vol. 50(october 1927), 359-379.

[7] G.D. BIRKHOFF and D.C. LEWIS - *On the periodic motions near a given Periodic Motion of a Dynamical System*, Annali Matem. S-4, vol. 12(1933), 117-133.

[8] M. CHAPERON - *Quelques questions de géométrie symplectique* [*d'après entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder*], Séminaire Bourbaki 1982-83, exp. n° 610, Astérisque 105-106(1983), 231-249.

[9] C. CONLEY and E. ZEHNDER - *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a Conjecture of V.I. Arnold*, Inventiones Math. 73(1983), 33-49.

[10] Raph. DOUADY - *Application du théorème des tores invariants*, Thèse de 3e cycle, Université de Paris 7, 1982.

[11] D. GOROFF - *Hyperbolic sets for twist maps*, preprint 1983, soumis à Ergodic theory and dynamical systems.

[12] D. GOROFF - *A variational study of twist maps*, en préparation.

[13] G.R. HALL - *Bifurcation of an attracting invariant circle : A Denjoy attractor*, Ergodic theory and dynamical systems,

[14] G.R. HALL - *A topological version of a theorem of Mather on twist maps*, preprint University of Wisconsin-Madison, 1983.

[15] M.R. HERMAN - *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. I.H.E.S. 49(1979), 5-233.

[16] M.R. HERMAN - Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Volume 1, Astérisque n° 103-104, 1983.

[17] M.R. HERMAN - Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Volume 2, soumis à Astérisque.

[18] M.R. HERMAN - *Remarque sur les Cantors de Mather et Aubry*, Conférence au Séminaire de l'École Polytechnique, 15/03/1982.

[19] M.R. HERMAN - *Cantors hyperboliques*, Conférence au Séminaire de l'École Polytechnique, 14/02/1983.

[20] A. KATOK - *Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems*, Ergodic theory and dynamical systems vol. 2(1982), 185-194.

[21] A. KATOK - *More about Birkhoff periodic orbits and Mather sets for twist maps*, preprint I.H.E.S., 1982.

[22] R.S. MACKAY, J.D. MEISS and I.C. PERCIVAL - *Transport in Hamiltonian systems*, preprint 1983, submitted to Physica D.

[23] L. MARKUS and K.R. MEYER - *Periodic orbits and solenoids in generic hamiltonian dynamical systems*, Amer. J. of Math. vol. 102(1980), 25-92.

[24] J.N. MATHER - *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology vol. 21, n° 4(1982), 457-467.

[25] J.N. MATHER - *Concavity of the Lagrangian for quasi-periodic orbits*, Comment. Math. Helvetici 57(1982), 356-376.

[26] J.N. MATHER - *Non-Uniqueness of Solutions of Percival's Euler-Lagrange Equations*, Commun. Math. Phys. 86(1982), 465-473.

[27] J.N. MATHER - *A criterion for the Non-Existence of Invariant Circles*, preprint, 1982.

[28] J. MOSER - *Non existence of Integrals for Canonical systems of Differential equations*, Commun. on Pure and Appl. Math. vol. VIII(1955), 409-436.

[29] J. MOSER - *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen Math. Phys. K1 11(1962), 1-20.

[30] J. MOSER - Stable and random motions in dynamical systems, Annals of Math. Studies 77, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1973.

[31] J. MOSER - *Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D. Birkhoff*, Lect. Notes in Math. 597, Springer-Verlag, 1977.

[32] I.C. PERCIVAL - *Variational principles for invariant tori and cantori*, in Symp. on Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interactions, edited by M. Mouth and J.C. Herrava, n° 57, Amer. Instit. of Physics, Conf. Proc. (1980), 310-320.

[33] J. POESCHEL - *Integrability of hamiltonian systems on Cantor sets*, Commun. Pure and Appl. Math. vol. 35(1982).

[34] H. POINCARÉ - *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo vol. 33(1912), 375-407.

[35] H. POINCARÉ - Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome III, Gauthier-Villars, 1899.

[36] R.C. ROBINSON - *Generic properties of conservative systems*, Amer. J. Math. 92 (1970), 562-603.

[37] H. RÜSSMANN - *On the existence of invariant curves of twist mapping of an annulus*, Lect. Notes in Math. 1007, Springer-Verlag, 1983.

[38] F. TAKENS - A C^1 *counter-example to Moser's twist theorem*, Indag. Math. 33(1971), 379-386.

[39] R. THOM - *Travaux de Moser sur la stabilité des mouvements périodiques*, Séminaire Bourbaki 1963-64, exp. 264, W.A. Benjamin Inc., 1966.

[40] E. ZEHNDER - *Homoclinic Points near Elliptic Fixed Points*, Commun. on Pure and Appl. Math. vol. XXVI (1973), 131-182.

[41] M. MORSE - *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one*, Transactions A.M.S. vol. 26(1924), 25-60.

[42] G. HEDLUND - *Geodesics on a 2-dimensional riemannian manifold with periodic coefficients*, Annals of Math. serie II vol. 33(1932), 719-739.

Alain CHENCINER

Université de Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05