Astérisque

ROBERT SADOURNY

Quelques problèmes de dynamique des fluides géophysiques

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 614, p. 307-319

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__307_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 614

Juin 1983

QUELQUES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE DES FLUIDES GÉOPHYSIQUES

par Robert SADOURNY

0. Généralités

On s'intéresse ici exclusivement à la dynamique des fluides géophysiques (atmosphère ou océan) *à grande échelle*, qui étudie l'évolution de structures dont la dimension caractéristique horizontale est supérieure à quelques kilomètres. L'écoulement est alors en première approximation hydrostatique et s'effectue, en l'absence d'échanges thermiques externes, suivant des surfaces d'entropie thermodynamique constante. Si l'on prend comme coordonnée verticale une fonction s de l'entropie thermodynamique, les équations, dites *primitives* qui régissent ce type de mouvement sont les suivantes :

$$(1) \qquad \frac{DV}{Dt} + f\, N\wedge V + \operatorname{grad} S = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial S}{\partial s} = H_s > 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial r}{\partial t} + \operatorname{div}(rV) = 0, \qquad (3') \qquad \frac{D}{Dt}\left[(f+\operatorname{rot} V)/r\right] = 0,$$

respectivement : équation du mouvement horizontal
équation de continuité $D/Dt = \partial/\partial t + V.\operatorname{grad}$ est la dérivée lagrangienne,
V la vitesse horizontale, t le temps, f la composante verticale du tourbillon planétaire ou paramètre de Coriolis, N le vecteur unitaire vertical, $H(s,p)$ la primitive du volume spécifique par rapport à la pression (obtenue à partir de l'équation d'état) - c'est-à-dire, pour l'atmosphère, l'enthalpie, $r = -\partial p/\partial s$ la *pseudo-densité* dans la coordonnée s, $S=G+H$ l'énergie statique (G : géopotentiel), grad,div,rot des opérateurs différentiels bi-dimensionnels le long des surfaces isentropes. Les dérivées partielles de H par rapport à s ou p sont indiquées par des indices. Les équations (3) et (3')

sont équivalentes, (3') exprimant la conservation du tourbillon absolu potentiel $\eta = (f+\mathrm{rot}V)/r$ dans le mouvement des particules. Le domaine horizontal $\mathcal{D}$ est, soit la sphère, soit, pour l'océan, l'ensemble des bassins océaniques, avec des conditions de glissement ou de frottement sur les bords. Les coordonnées horizontales x, y sont par exemple la longitude et le sinus de la latitude, multipliés par le rayon de la terre. La limite supérieure $s = \delta_H(x,y,t)$ est du type surface libre:

$$(4) \qquad \frac{D\delta}{Dt}H = 0, \qquad p(x,y,\delta_H,t) = p_H,$$

La limite inférieure $s = \delta_B(x,y,t)$ est du type surface rigide:

$$(5) \qquad \frac{D\delta}{Dt}B = 0, \qquad G(x,y,\delta_B,t) = g_B(x,y).$$

Ici p_H est une constante et $g_B(x,y)$ est défini par le relief du fond. Les seconds membres dans (1, 3, 3', 4, 5) ne sont nuls qu'en l'absence d'échanges thermiques externes et de processus dissipatifs.

Les principaux invariants du problème sont l'*énergie*

$$(6) \qquad E = \iint_{\mathcal{D}} \left[p_B g_B + \int_{\delta_B}^{\delta_H} (r\frac{V^2}{2} + P)\, ds \right] dxdy, \qquad (P_p = H_s),$$

et toute fonction du tourbillon absolu potentiel, parmi lesquelles l'*enstrophie potentielle*

$$(7) \qquad Z(s) = \iint_{\mathcal{D}'(s,t)} r\frac{\eta^2}{2}\, dxdy,$$

où $\mathcal{D}'(s,t) = \mathcal{D} \cap \{ (x,y) \,|\, \delta_B(x,y,t) \leqslant s \leqslant \delta_H(x,y,t) \}$.

Les *modèles de circulation générale* atmosphérique ou océanique sont des modèles numériques qui intègrent les équations (1-5) munies de représentation des échanges thermiques externes (interfaces sol/air/océan, rayonnement, changement d'état de l'eau atmosphérique, effets de salinité dans l'océan) à partir de conditions initiales observées. Leur utilisation pose d'emblée le problème de la *prédicibilité* des écoulements géophysiques, dû au fait que dans des systèmes non linéaires du type (1-5), les instabilités

sont telles que de petites perturbations localisées ont en général tendance à croître en amplitude et en échelle jusqu'à affecter la totalité de l'écoulement. Sur la base des observations dont on dispose il est raisonnable de penser que l'atmosphère, y compris les plus grandes échelles, a un *temps de prédicibilité* estimé en moyenne de l'ordre d'une quinzaine de jours [1] . Il est donc a priori sans intérêt d'intégrer des modèles de circulation générale au delà de cette limite, si on les considère sous l'angle de la *prévision du temps*. (Les difficultés de modélisation et d'observation des conditions initiales conduisent d'ailleurs en l'état actuel des choses à une limite de prédicibilité pratique de l'ordre de 5 à 6 jours). Intégrer des modèles de circulation générale au delà de la limite de prédicibilité n'a de sens que dans le cas de la *simulation du climat* où l'on ne s'intéresse pas à l'histoire déterministe des structures, mais plutôt aux propriétés statistiques (par exemple : variabilité interannuelle) de l'écoulement.

1. Attracteurs

Les écoulements atmosphériques ou océaniques sont des écoulements *stratifiés* : l'état instantané du fluide peut être considéré comme une petite perturbation autour d'un état de repos correspondant à une stratification moyenne (indépendante de x, y) définie par exemple par une fonction $\bar{p}(s)$, et des fonctions $\bar{H}(s)$, $\bar{r}(s)$, etc, déduites de la première. Les équations (1-5), linéarisées autour de cet état de repos, possèdent un invariant quadratique (l'énergie de perturbation) ; un état instantané du fluide peut alors se représenter sur la base d'une série de modes propres Ω_n , associés à des fréquences propres ω_n . Ces modes propres peuvent se décomposer grossièrement en deux classes : la classe $\mathcal{L}$ des *modes inertio-gravitationnels* à forte divergence et fréquence élevée ; et la classe $\mathcal{R}$ des *modes de Rossby* essentiellement rotationnels, à fréquence plus faible et proches de l'*équilibre géostrophique*

(8) $\qquad f\, N \wedge V + \mathrm{grad}\, S = 0.$

On observe que l'énergie des écoulements géophysiques est essentiellement contenue dans le sous-espace $\mathcal{R}$; les processus dynamiques *d'ajustement géostrophique* qui conduisent à cette répartition se ramènent pour l'essentiel

à des mécanismes de transfert non-linéaires vers les petites échelles associés à des processus de dissipation, dont la structure est fondamentalement différente dans les deux sous-espaces.

Ces caractéristiques particulières à l'état de régime posent bien entendu des problèmes conceptuels et techniques considérables dans le cadre de la prévision du temps. L'état de l'atmosphère observé à l'instant de départ t_0 de la prévision l'est de façon très imparfaite par un ensemble de mesures ponctuelles, irrégulièrement réparties et entachées d'erreurs. L'interpolation de ces mesures sous forme d'un état initial M_0 des variables du modèle introduit donc des modes inertio-gravitationnels d'un niveau énergétique très supérieur aux caractéristiques de l'état de régime. Remplacer M_0 par sa projection $M_0^{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{R}$ ne résoudrait le problème qu'en l'absence de non-linéarité et de forçage thermique. La dérivée temporelle de la composante inertio-gravitationnelle $M^{\mathcal{L}}$ peut se décomposer suivant une contribution linéaire, une contribution de la dynamique non-linéaire et une contribution du forçage :

$$\frac{\partial M^{\mathcal{L}}}{\partial t} = L\,M^{\mathcal{L}} + N(M^{\mathcal{L}}, M^{\mathcal{R}}) + F(M^{\mathcal{L}}, M^{\mathcal{R}}). \tag{9}$$

Faire $M^{\mathcal{L}} = 0$ à $t = t_0$ n'annule que le premier terme, les deux autres ramenant rapidement $M^{\mathcal{L}}$ à un niveau énergétique irréaliste et inacceptable pour la prévision. La tendance actuelle [2] consiste à ne pas prendre $M_0^{\mathcal{L}} = 0$, mais à déterminer $M_0^{\mathcal{L}}$ par l'équation dite de balance

$$0 = L\,M^{\mathcal{L}} + N(M^{\mathcal{L}}, M^{\mathcal{R}}) + F(M^{\mathcal{L}}, M^{\mathcal{R}}). \tag{10}$$

qui contraint le système à ne pas s'écarter plus des caractéristiques de régime que ne s'en écarte l'interpolation initiale.

Il est clair que (10), en dépit de sa complexité technique, n'est qu'une solution très approximative du problème. Il est peu vraisemblable que la structure caractéristique des solutions d'un problème non-linéaire comme (1-5) dans leur état de régime puisse s'exprimer de façon satisfaisante sur la base d'une simple décomposition linéaire suivant les sous-espaces $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$. Ceci est d'autant plus clair que la distinction entre modes de Rossby et inertio-gravitationnels n'est pas une séparation nette, et

que (10) dépend par conséquent aussi du choix de la séparation.

Dans un travail récent, Lorenz [3] montre que la tendance des solutions de (1-5) à s'approcher du sous-espace $\mathcal{R}$ n'est vraisemblablement qu'une des conséquences de l'existence d'un *attracteur* inclus dans, ou proche de, $\mathcal{R}$. Pour cela, il considère une simplification maximale de (1-5)[4] ; la structure verticale est éliminée, ramenant (1-5) aux équations de l'eau peu profonde

$$\frac{DV}{Dt} + f\, N\wedge V + \text{grad}\, G = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}(GV) = 0, \tag{12}$$

avec un paramètre de Coriolis constant, et la structure horizontale réduite, sur le plan supposé périodique, à trois modes de Fourier. Les trois vecteurs d'ondes étant supposés de somme nulle

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \tag{13}$$

le système, ainsi ramené à neuf équations différentielles scalaires, est fermé pour les interactions quadratiques. Sur ce système simplifié, il met en évidence l'existence d'un attracteur dont la projection sur le sous-espace Y_1, Y_2 , Y_3 des composantes spectrales du tourbillon est représenté sur la figure 1. L'étoile est un centre de symétrie, les frontières naturelles de l'attracteur sont indiquées par des traits épais, les lignes de niveau de Y_1 par des traits fins, le contour apparent par des pointillés. A l'endroit où les frontières naturelles s'arrêtent, de part de d'autre de l'origine, les deux nappes ne se confondent pas, mais deviennent très proche l'une de l'autre. Chaque fois qu'une orbite

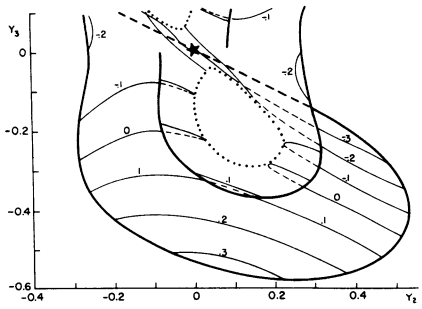

Figure 1

passe autour d'un de ces points, elle quitte la surface représentée pour se retrouver sur une surface très voisine du même type, de sorte que la structure topologique de l'attracteur est en fait du type ensemble de Cantor. Au voisinage de l'attracteur, la relation géostrophique (8) est bien une bonne approximation, mais l'équation de balance (10) est une approximation encore plus précise. Tout porte à croire que les solutions de (1-5) sont soumises à un attracteur du même type, bien qu'infiniment plus complexe.

2. Modèles quasi-géostrophiques

L'hypothèse que M est au voisinage de $\mathcal{R}$ amène à proposer un modèle simplifié de (1-5), dit *quasi-géostrophique* (en abréviation: QG). On décompose les variables thermodynamiques en moyenne et perturbation: $p = \bar{p}(s) + p'$, $r = \bar{r}(s) + r'$ etc, et on suppose

(i) $|DV/Dt| \ll |f\ N\wedge V|$ qui équivaut à: (i1) $M \in \mathcal{R}$ et (i2) le terme d'advection non linéaire est petit devant f (ceci justifie l'approximation géostrophique (8));

(ii) $|f'| \ll |\bar{f}|$: la variation du paramètre de Coriolis est faible devant sa valeur moyenne sur le domaine (ce qui en exclut les régions équatoriales); (8) donne alors

(14) $\qquad V = N \wedge \text{grad}\ \psi \qquad\qquad$ avec $\qquad \psi = S'/\bar{f}$;

(iii) $|r'| \ll \bar{r}$: ceci permet un développement au premier ordre de l'équation du tourbillon potentiel (3'), qui devient

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\ )}{\partial(x,y)}\right)\left(f + \nabla^2\psi + \frac{\bar{f}^2}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\bar{H}_{sp}}\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right) = 0,$$

à laquelle on associe les conditions limite approchées

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\ )}{\partial(x,y)}\right)\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \qquad \text{à} \quad s = \bar{\delta}_H,$$

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\ )}{\partial(x,y)}\right)\left(1 - \frac{\bar{H}_p}{\bar{H}_{sp}}\frac{\partial}{\partial s}\right)\psi = 0 \qquad \text{à} \quad s = \bar{\delta}_B.$$

qui supposent

$$\text{(iv)} \quad \frac{\delta'_H}{p}\frac{\partial p}{\partial s}\Big|_H \ll 1, \qquad\qquad \text{(v)} \quad \frac{\delta'_B}{G}\frac{\partial G}{\partial s}\Big|_B \ll 1.$$

Noter que $\bar{H}_{sp} > 0$, qu'on a , pour simplifier, supprimé le relief et que $\bar{\delta}_H$ et $\bar{\delta}_B$ sont des constantes. On retrouve sur le modèle QG (15-17) l'équivalent des deux invariants de (1-5) :

$$(18) \qquad E = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\bar{f}^2}{\bar{H}} \psi^2 \Big|_B + \int_{\bar{\delta}_B}^{\bar{\delta}_H} \left(\bar{r} (\mathrm{grad}\psi)^2 + \frac{\bar{f}^2}{\bar{H}_{sp}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 \right) ds \right] dxdy,$$

$$(19) \qquad Z(s) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(f + \nabla^2 \psi + \frac{\bar{f}^2}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\bar{H}_{sp}} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right)^2 dxdy,$$

plus deux invariants supplémentaires, l'*énergie potentielle utilisable* associée à chacune des deux frontières :

$$(20) \qquad P_H = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 dxdy \qquad \text{à} \quad s = \bar{\delta}_H,$$

$$(21) \qquad P_B = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\left(1 - \frac{\bar{H}_p}{\bar{H}_{sp}} \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi \right)^2 dxdy \qquad \text{à} \quad s = \bar{\delta}_B.$$

Les équations (15-17) sont la généralisation directe à un domaine tri-dimensionnel de l'équation d'Euler *bi-dimensionnelle*, dont on sait que la solution reste régulière pendant un temps infiniment long [5, 6, 7]

$$(22\text{-}24) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \ )}{\partial(x,y)} \right) \nabla^2 \psi = 0, \quad E = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} (\mathrm{grad}\psi)^2 dxdy, \quad Z = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} (\nabla^2 \psi)^2 dxdy.$$

L'étude mathématique de l'existence et de la régularité des solutions de (15-17) n'a pas encore été faite. On dispose toutefois dans les deux cas (Euler, QG), d'une certaine connaissance physique du comportement des solutions, qui peut nous amener aux quelques conjectures qui suivent.

La théorie phénoménologique de la turbulence bi-dimensionnelle nous dit que, quand un fluide bi-dimensionnel régi par l'équation d'Euler (22), dans un domaine plan infini, est forcé à l'échelle $\ell_F = k_F^{-1} = 1$, avec un taux d'injection d'énergie (et donc d'enstrophie) ε constant, il évolue vers un état de régime stationnaire où (i) l'enstrophie cascade de proche en proche vers les échelles infinitésimales avec un taux de cascade ε , produisant pour $k > 1$ une *zone inertielle* où le spectre d'énergie $E(k)$ ($E = \int_0^\infty E(k)\, dk$) est de la forme [8, 9]

$$E(k) = C\, \varepsilon^{2/3}\, k^{-3}\, (\mathrm{Log}\ k)^{-1/3} \tag{25}$$

tandis que (ii) l'énergie cascade vers des échelles de plus en plus grandes avec le même taux ε suivant un spectre en $k^{-5/3}$. Le temps caractéristique de distorsion des structures d'échelle k^{-1} , $\tau(k)$, peut être estimé grossièrement à partir d'une mesure de l'activité des tourbillons d'échelle supérieure à k^{-1}:

$$\tau(k) \sim \left(\int_0^k q^2 E(q)\, dq \right)^{-1/2}, \tag{26}$$

Le temps mis par les déformations successives à se propager depuis l'échelle d'injection jusqu'aux échelles infinitésimales où il y aura production de singularités peut être estimé à son tour comme

$$T \sim \int_1^\infty \tau(k)\, d(\mathrm{Log}\ k),$$

intégrale qui, d'après (25-26), diverge : l'estimation phénoménologique s'accorde ainsi au résultat mathématique sur l'équation d'Euler.

La phénoménologie de (15-16-17) est plus compliquée à établir mais on peut en donner une idée en considérant deux problèmes plus simples [10] . Si l'une des relations

$$(15') \qquad f + \nabla^2\psi + \frac{\bar{f}^2}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\bar{H}_{sp}}\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) \equiv 0 \qquad \text{pour } \bar{\delta}_B < s < \bar{\delta}_H,$$

$$(16') \qquad \frac{\partial\psi}{\partial s} \equiv 0 \qquad \text{à } s = \bar{\delta}_H,$$

$$(17') \qquad \left(1 - \frac{\bar{H}_p}{\bar{H}_{sp}}\frac{\partial}{\partial s}\right)\psi \equiv 0 \qquad \text{à } s = \bar{\delta}_B$$

est vérifiée à $t = t_0$, elle reste vérifiée pour tout $t > t_0$.
Le problème *interne* I (15-16'-17'), dans lequel la dynamique des frontières a été neutralisée, conduit aux mêmes estimations phénoménologiques (25-26) que l'équation d'Euler (22) ; ceci laisse prévoir un temps de régularité infini. Le problème *externe* E (15'-16-17), réduit au contraire aux effets dynamiques de frontière, conduit à des estimations très différentes. En effet, l'enstrophie potentielle (19), extension directe de (24) ne joue plus de rôle dynamique. Ce sont les énergies potentielles (20-21) qui jouent un rôle équivalent, et cascadent depuis l'échelle d'injection jusqu'aux échelles infinitésimales. Les spectres d'énergie sont de la forme :

$$(27) \qquad E(k) = C\,\varepsilon^{2/3}\,k^{-5/3}.$$

Comme dans le cas de l'équation d'Euler tridimensionnelle, un spectre de ce type conduit à des estimations (26) de $\tau(k)$ dont l'intégrale converge. On s'attend donc pour E à des temps de régularité finis.

Le déclenchement de singularités sur les frontières correspond à l'apparition de *fronts thermiques* , discontinuités de températures que l'on observe couramment à la base de l'atmosphère et à la surface des océans.

L'approche phénoménologique résumée ci-dessus est clairement insuffisante ; de même que l'approche plus élaborée par les *modèles de fermeture statistique* , elle ne tient pas compte de la structure réelle

des solutions. L'expérimentation numérique de l'équation d'Euler (22) à haute résolution [11] montre l'établissement de spectres plus pentus que (25), explicable par l' *intermittence* de l'activité non-linéaire, et associé à l'émergence de *tourbillons quasi-stationnaires* dont la structure en fonction de courant est voisine d'une gaussienne (figure 2), et qui occasionnellement, interagissent les uns avec les autres. Cette émergence, qui se produit aussi bien dans les simulations forcées que dans le problème à valeurs initiales, reste inexpliquée ; les quelques critères de stabilité d'écoulements stationnaires [12-13-14-15] dont on dispose sont un bagage insuffisant pour aborder ce problème.

Les modèles quasi-géostrophiques n'ont qu'un intérêt théorique, la pratique de la prévision du temps ou de la simulation du climat nécessitant le recours aux équations primitives. Ils ont avec celles-ci un certain nombre de propriétés communes : par exemple, l'attracteur de Lorenz [3] se retrouve pratiquement inchangé quand on passe de (11-12) à (22). Il semble peu probable toutefois que le problème *interne* associé aux équations primitives (1-2-3-4'-5') avec

(4') $\quad p = \bar{p}$ constant à $s = \bar{s}_H$,

(5') $\quad G = \bar{g}$ constant à $s = \bar{s}_B$,

conduise à des solutions aussi régulières que celles du problème interne quasi-géostrophique : il existe en effet dans (1-2-3) des types d'instabilité qu'on ne trouve pas dans (15) [16] .

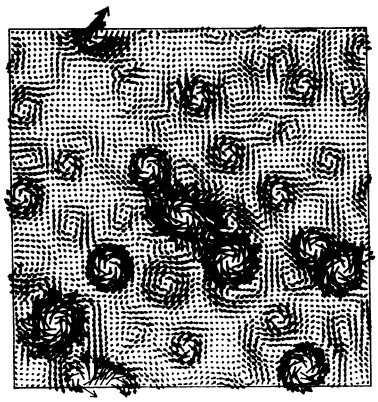

Figure 2

3. Prédicibilité

Les estimations phénoménologiques ci-dessus donnent également accès à des estimations de temps de prédicibilité. Le temps que mettent les déformations de structures à se propager depuis

l'échelle k^{-1} jusqu'aux échelles infinitésimales pour produire des singularités est du même ordre que le temps que met une erreur dont l'échelle initiale est infinitésimale pour contaminer l'échelle k^{-1} [17] . Les écoulements dont le temps de régularité est infini sont donc aussi des écoulements à temps de prédicibilité infini, et inversement. On s'attend donc d'après la théorie QG, à un temps de prédicibilité plus long à l'intérieur de l'atmosphère qu'au voisinage de ses bords inférieur (le sol) et supérieur (la tropopause). Ce résultat est bien vérifié par la pratique opérationnelle de la prévision du temps.

Mais encore une fois les estimations phénoménologiques sont très grossières et ne tiennent pas compte de la structure réelle des solutions - c'est-à-dire de la structure topologique de l'attracteur et de sa stabilité locale dans l'espace des phases. On sait bien - sans pouvoir d'ailleurs les caractériser de manière quantitative - que certaines situations météorologiques sont plus prédicibles que d'autres. On trouvera dans [18] une étude détaillée de ce type de problèmes sur la base de l'équation d'Euler forcée avec le relief, illustrée figure 3 par une alternance frappante de périodes prédicibles et imprédicibles observées sur une solution particulière : 4 séquences extraites de la même "histoire" ont été superposées, la période prédicible est indiquée par la flèche horizontale.

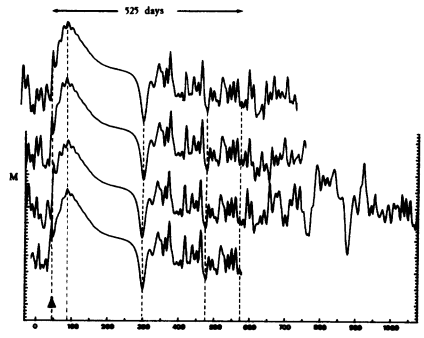

Figure 3

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.N. LORENZ - *Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues,* J. Atmos. Sci., 16 (1969), 636-646.

[2] R. DALEY - *Normal mode initialisation,* Rev. Geophys. Space Physics, 19 (1981), 450-468.

[3] E.N. LORENZ - *Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium,* J. Atmos. Sci., 37 (1980), 1685-1699.

[4] E.N. LORENZ - *Maximum simplification of the dynamic equations,* Tellus, 12 (1960), 243-254.

[5] J. LERAY - *Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique,* J. Math. Pure Appl., 12 (1933), 1-82.

[6] W. WOLIBNER - *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long,* Math. Z., 37 (1933), 727-738.

[7] T. KATO - *On the classical solution of the two-dimensional non stationary Euler equation*, Arch. Ration. Mech. Anal., 25 (1967), 302-324.

[8] R.H. KRAICHNAN - *Inertial-range transfer in two- and three dimensional turbulence,* J. Fluid Mech., 47 (1971), 525-535.

[9] A. POUQUET, M. LESIEUR, J.C. ANDRE and C. BASDEVANT - *Evolution of high-Reynolds number two-dimensional turbulence,* J. Fluid Mech., 72 (1975), 305-319.

[10] J.M. HOYER and R. SADOURNY - *Closure modeling of fully developed baroclinic instability,* J. Atmos. Sci., 39 (1982), 707-721.

[11] C. BASDEVANT, B. LEGRAS and R. SADOURNY; M. BELAND - *A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability,* J. Atmos. Sci., 38 (1981), 2305-2326.

[12] V.I. ARNOLD - *Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 162 (1965), 975-978.

[13] W. BLUMEN - *On the stability of quasi-geostrophic flow,* J. Atmos. Sci., 25 (1968), 929-931.

[14] R. BENZI, S. PIERINI, A. VULPIANI and E. SALUSTI - *On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices,* Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 20 (1982), 293-306.

[15] R. SADOURNY - *Stability of stationary quasi-geostrophic motion,* soumis.

[16] R. SADOURNY - *On the stability of stationary solutions of the primitive equations,* soumis.

[17] C.E. LEITH and R.H. KRAICHNAN - *Predictability of turbulent flows,* J. Atmos. Sci., 29 (1972), 1041-1058.

[18] B. LEGRAS - Thèse, Université de Paris-6, 3 septembre 1983.

Robert SADOURNY

C.N.R.S.
Laboratoire de Météorologie Dynamique
Ecole Normale Supérieure
24 rue Lhomond
F-75231 PARIS CEDEX 05