SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-MICHEL BONY

Polynômes de Bernstein et monodromie

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 459, p. 97-110

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__97_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 459-01
27e année, 1974/75, n° 459 Février 1975

POLYNÔMES DE BERNSTEIN ET MONODROMIE

[d'après B. MALGRANGE]

par Jean-Michel BONY

Introduction

I. N. Bernstein [1] et J. E. Björk [2] ont démontré que, étant donné un germe $f \in \mathbf{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$, singulier à l'origine, on peut lui associer un polynôme $b(s)$ et un opérateur différentiel $P(x, s, \frac{\partial}{\partial x})$ de telle sorte que l'on ait

$$P(x, s, \frac{\partial}{\partial x}) f^s = b(s) f^{s-1} .$$

Il semble raisonnable de conjecturer que (en choisissant le meilleur des b ci-dessus) les zéros de b sont rationnels, et de rechercher des liens entre ces zéros et la topologie de la singularité.

Nous nous proposons d'exposer ici une partie des résultats de B. Malgrange (cf. [7], [8], [9]), qui a démontré cette conjecture dans le cas d'une singularité isolée, en donnant une relation très étroite entre les zéros de $b(s)$ et la monodromie de f .

1. Monodromie d'une singularité isolée

Dans tout cet exposé, on se donne une fonction analytique $f(x_1,\ldots,x_n)$ définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$, vérifiant $f(0) = 0$. On suppose que f possède un point critique isolé à l'origine, c'est-à-dire que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ont un zéro commun à l'origine et n'en ont pas d'autre au voisinage.

En désignant par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions analytiques dans $\mathbf{C}^n$, on définit le nombre de Milnor μ de la singularité par

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,0} / (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) .$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, et posons

$$T = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \eta\} \quad , \quad T^* = T \setminus \{0\} \quad ,$$

$$X = \{x \in \mathbf{C}^n \mid |x| < \varepsilon \text{ et } |f(x)| < \eta\} \quad , \quad X^* = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \quad ,$$

$$X_t = \{x \in X \mid f(x) = t\} \; .$$

THÉORÈME 1.1 [10].- Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $\eta \leq \eta_0(\varepsilon)$, on a

a) L'application $f : X^* \to T^*$ est une fibration C^∞ .

b) Pour $t \neq 0$, on a $H_p(X_t, \mathbf{C}) = 0$ pour $p \neq 0$, $n-1$ et $H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ est de dimension μ .

Le résultat de Milnor est en fait plus précis et affirme que, pour $t \neq 0$, X_t a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères.

Si U est un ouvert de T^* suffisamment petit, $f : X^* \cap f^{-1}(U) \to U$ peut être considérée comme la projection d'un produit sur l'un de ses facteurs, et si t_1 et t_2 appartiennent à U , on a un isomorphisme canonique de $H_{n-1}(X_{t_1}, \mathbf{C})$ sur $H_{n-1}(X_{t_2}, \mathbf{C})$.

Soient alors $\mathcal{R}$ le revêtement universel de T^* et $s \mapsto [s]$ la projection de $\mathcal{R}$ sur T^* . On dira qu'une section $\gamma : s \mapsto \gamma(s) \in H_{n-1}(X_{[s]}, \mathbf{C})$, définie sur $\mathcal{R}$, dépend continûment de s si, pour s_1 et s_2 assez voisins, $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_2)$ sont images l'un de l'autre par l'isomorphisme canonique de $H_{n-1}(X_{[s_1]}, \mathbf{C})$ sur $H_{n-1}(X_{[s_2]}, \mathbf{C})$. On dira aussi abusivement que $\gamma(t)$ est une section multiforme au-dessus de T^* dépendant continûment de t .

Soient $s_0 \in \mathcal{R}$ et $\gamma_0 \in H_{n-1}(X_{[s_0]}, \mathbf{C})$. Il existe alors un et un seul $\gamma(s)$ dépendant continûment de s , défini sur $\mathcal{R}$, tel que $\gamma(s_0) = \gamma_0$. Pour $s_1 \in \mathcal{R}$, l'application $\gamma_0 \mapsto \gamma(s_1)$ est un isomorphisme.

En particulier, l'application $\gamma(s_0) \mapsto \gamma(s_0 \, e^{2i\pi})$ est un automorphisme h de $H_{n-1}(X_{[s_0]}, \mathbf{C})$, dit automorphisme de monodromie. Si l'on change de point s_0 , on obtient un automorphisme conjugué. On associe ainsi à f une (classe de) matrice carrée d'ordre μ , définie à une équivalence près, dite matrice de monodromie.

On aurait pu faire ce qui précède pour $H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$, ce qui prouve qu'il existe des bases où la matrice de monodromie h est à coefficients entiers, et

donc que ses valeurs propres sont algébriques. On a en fait le résultat suivant, nettement plus difficile (voir par exemple [3]).

THÉORÈME DE MONODROMIE.- Les valeurs propres de h sont des racines de l'unité. Les racines du polynôme minimal de h ont une multiplicité inférieure ou égale à n .

2. Polynômes de Bernstein

Soit s une indéterminée. Considérons l'ensemble des sommes finies du type $\sum_{k,\ell \geq 0} a_{k\ell}(x)\, s^k\, f(x)^{s-k}$ où les $a_{k\ell}$ sont des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Muni des relations évidentes $f(x)\, f(x)^{s-k-1} = f(x)^{s-k}$ et des lois de compositions non moins évidentes, c'est une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre.

Si, maintenant, on considère les opérateurs différentiels $P(x, s, \frac{\partial}{\partial x})$ à coefficients analytiques en x et polynomiaux en s :

$$P(x, s, \frac{\partial}{\partial x}) = \Sigma\, b_{k\alpha}(x)\, s^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} ,$$

ils opèrent sur l'anneau précédent, en posant

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^{s-k} = (s-k)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-k-1} .$$

Si on attribue à s des valeurs entières, les opérations précédentes sont compatibles avec les opérations habituelles sur les fonctions méromorphes.

THÉORÈME 2.1.- Il existe un polynôme $B(s)$ et un opérateur différentiel $P(x, s, \frac{\partial}{\partial x})$ tels que l'on ait

$$P(x, s, \frac{\partial}{\partial x})\, f^s = B(s) f^{s-1} .$$

Ce théorème a en fait été démontré par I. N. Bernstein [1] lorsque f est un polynôme quelconque, et a été étendu par J. E. Björk [2] au cas où f est un germe de fonction analytique ayant une singularité quelconque à l'origine.

Il est clair que l'ensemble des $B(s)$ pour lesquels on a une relation du type ci-dessus est un idéal, et nous noterons $b(s)$ (le polynôme de Bernstein de f) le générateur de cet idéal dont le coefficient dominant est égal à 1 .

On a $p(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}) 1 = b(0)f^{-1}$, ce qui entraîne $b(0) = 0$. Nous poserons $b(s) = s\tilde{b}(s)$.

Les résultats de Malgrange [9] peuvent s'énoncer ainsi

THÉORÈME 2.2.- a) Les zéros de $\tilde{b}$ sont rationnels et < 1 .

b) L'application $s \mapsto \exp(-2i\pi s)$ est surjective de l'ensemble des zéros de $\tilde{b}$ sur l'ensemble des valeurs propres de h . Plus précisément, si $\tilde{b}(s) = \prod_j (s - s_j)$, et si on pose $p(\lambda) = \prod_j (\lambda - \exp(-2i\pi s_j))$, le polynôme minimal de h divise p qui divise lui-même le polynôme caractéristique de h .

3. Connexions

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbf{C}$ et soit Ω l'espace des germes de 1-formes holomorphes. On notera K le corps des germes de fonctions méromorphes. Si $\mathcal{R}_\varepsilon$ désigne le revêtement universel du disque pointé de rayon ε , on posera $M = \varinjlim \mathcal{O}(\mathcal{R}_\varepsilon)$ (espace des germes de fonctions holomorphes multiformes dans le complémentaire de l'origine).

DÉFINITION 3.1.- Une K-connexion sur un K-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est une application ∇ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ qui est $\mathbf{C}$-linéaire, et qui vérifie, pour $e \in \mathcal{E}$ et $f \in K$: $\nabla fe = e \otimes df + f\nabla e$.

Comme l'application $f(t) \mapsto f(t)dt$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω , on peut poser $\nabla e = De \otimes dt$, où D est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ vérifiant $D(fe) = \frac{df}{dt} e + fDe$. Par abus de langage, nous parlerons également de la connexion D .

Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension finie, et soit $e_1 \dots e_\mu$ une base de $\mathcal{E}$. On définit les $c_{ij} \in K$ par

$$De_i = \Sigma c_{ij} e_j .$$

Si $e = \Sigma f_i e_i \in \mathcal{E}$, on a alors

$$De = \Sigma \frac{df_i}{dt} e_i + \Sigma f_i c_{ij} e_j$$

et la connexion D associe au vecteur de composantes $(f_1 \dots f_\mu)$ le vecteur de composantes $(\dots, \frac{df_i}{dt} + \Sigma\, c_{ki} f_k, \dots)$.

On appelle section horizontale (multiforme) de D un élément e de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} M$ vérifiant $De = 0$. Si $F = (f_1, \dots, f_\mu)$ sont les composantes (multiformes) de e , et si on désigne par C la matrice de composantes c_{ki} , on obtient le système différentiel

$$\frac{dF}{dt} + CF = 0 .$$

Le résultat suivant est bien classique : pour $t_0 \neq 0$ (suffisamment près de de l'origine) et $F_0 \in \mathbb{C}^\mu$, il existe une et une seule solution multiforme $F(t) = R(t,t_0).F_0$ du système différentiel vérifiant $F(t_0) = F_0$. A une équivalence près, la matrice $h_D = R(t_0 e^{2i\pi}, t_0)$ ne dépend ni de t_0 , ni de la base de $\mathcal{E}$ choisie. On appelle h_D <u>la matrice de monodromie de la connexion</u> D .

THÉORÈME 3.2.- <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Il existe une base de</u> $\mathcal{E}$ <u>dans laquelle la matrice</u> C <u>a au plus un pôle simple à l'origine</u>.

b) <u>Dans tout secteur angulaire</u> $\alpha \leq \operatorname{Arg} t \leq \beta$ <u>du revêtement universel, les sections horizontales de</u> D <u>sont à croissance lente</u> (<u>c'est-à-dire que dans une (ou toute) base de</u> $\mathcal{E}$, <u>les composantes</u> f_i <u>vérifient une estimation du type</u> $|f_i(t)| \leq C_{\alpha\beta}\, t^{-N}$).

On dit que <u>la connexion est régulière</u> (ou à point singulier régulier) si ces conditions sont vérifiées.

Soit alors C_0 une matrice telle que $\exp(-2i\pi\, C_0) = h_D$. Les valeurs propres de h_D sont du type $\exp(-2i\pi\alpha)$ avec α valeur propre de C_0 . D'autre part, si on pose $R(t,t_0) = H(t)\exp(-C_0 \log t)$, la matrice $H(t)$ est uniforme en t et à croissance lente, donc à coefficients méromorphes, et les composantes d'une section horizontale sont données par $F(t) = H(t)\exp(-C_0 \log t)F_0$.

En mettant C_o sous forme de Jordan, on voit facilement que $\exp(-C_o \log t).F_o$ est somme de termes du type $t^{-\alpha}(\log t)^q A_{\alpha q}$ avec α valeur propre de C_o et $q+1$ compris entre 1 et la multiplicité de α dans le polynôme minimal de C_o. En développant les coefficients holomorphes en série entière de t, on obtient que toute section horizontale de la connexion s'écrit

$$e = \Sigma f_i e_i$$

$$f_i = \sum_{\alpha,q} a_{\alpha q} t^{-\alpha}(\log t)^q ,$$

la série étant convergente au voisinage de l'origine avec $e^{-2i\pi\alpha}$ valeur propre de h_D, et $(q+1)$ inférieur ou égal à la multiplicité de $e^{-2i\pi\alpha}$ dans le polynôme minimal de h_D.

4. La connexion de Gauss-Manin

Nous désignerons par $\mathcal{O}_X$, Ω^p_X les faisceaux des fonctions holomorphes, des p-formes holomorphes dans X, et par d la différentielle extérieure.

Nous poserons $\Omega^p_{X/T} = \Omega^p_X / df \wedge \Omega^{p-1}_X$ (faisceau des p-formes relatives). Par passage au quotient, d induit $d_{X/T} : \Omega^p_{X/T} \to \Omega^{p+1}_{X/T}$. Le complexe ainsi obtenu sera noté $\Omega^\cdot_{X/T}$. On a le résultat suivant [3] :

THÉORÈME 4.1.- a) Les $H^p(f_* \Omega^\cdot_{X/T})$ sont cohérents.

b) La restriction de $H^p(f_* \Omega^\cdot_{X/T})$ à T^* est localement libre et s'identifie aux sections holomorphes du fibré $t \mapsto H^p(X_t, \mathbb{C})$.

c) L'application naturelle $H^p(f_* \Omega^\cdot_{X/T,0}) \to H^p(\Omega^\cdot_{X/T,0})$ est un isomorphisme.

Posons $E = H^{n-1}(f_* \Omega^\cdot_{X/T,0}) = H^{n-1}(\Omega^\cdot_{X/T,0})$, on a

$$E = \frac{\{\alpha \in \Omega^{n-1}_{X/T,0} \mid d_{X/T}\,\alpha = 0\}}{d_{X/T}\,\Omega^{n-2}_{X/T}} = \frac{\{\omega \in \Omega^{n-1}_{X,0} \mid \exists\, \pi \in \Omega^{n-1}_{X,0},\ d\omega = df \wedge \pi\}}{df \wedge \Omega^{n-2}_{X,0} + d\,\Omega^{n-2}_{X,0}} ;$$

c'est un $\mathcal{O}$-module (on note toujours $\mathcal{O}$ sans indice l'anneau des germes de fonctions holomorphes de la variable t), la multiplication par $\varphi(t) \in \mathcal{O}$ étant déduite de l'application $\omega \mapsto \varphi(f(x))\omega$.

On définit également le $\mathcal{O}$-module F :

$$F = \Omega^{n-1}_{X,0} / df \wedge \Omega^{n-2}_{X,0} + d\Omega^{n-2}_{X,0} .$$

Soit $e \in E$, et soit ω une $n-1$ forme dont la classe $[\omega]$ soit égale à e. Il existe alors $\pi \in \Omega^{n-1}_{X,0}$ telle que $d\omega = df \wedge \pi$, et la classe $[\pi]$ de π dans F ne dépend que de e. Nous noterons D l'application de E dans F ainsi définie.

THÉORÈME 4.2.- a) D est $\mathbb{C}$-linéaire, et on a pour $\varphi \in \mathcal{O}$ et $e \in E$:

$$D(\varphi e) = \frac{d\varphi}{dt} e + \varphi De .$$

b) F/E est de torsion sur $\mathcal{O}$, et D se prolonge en une connexion sur $\mathcal{E} = E \otimes_{\mathcal{O}} K = F \otimes_{\mathcal{O}} K$.

c) Soit, pour t appartenant au revêtement universel $\mathcal{R}$ de T^*, $\gamma(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ dépendant continûment de t (cf. § 1). Alors, pour $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$, $\int_{\gamma(t)} \omega$ est holomorphe et on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} D[\omega] .$$

[On a noté abusivement X_t la fibre au point de T^* correspondant à $t \in \mathcal{R}$.]

Démonstration. a) Soit $e = [\omega]$. Alors $\varphi e = [\varphi \circ f\ \omega]$ et $d(\varphi \circ f\ \omega) = \varphi' \circ f\ df \wedge \omega + \varphi \circ f\ d\omega$, mais on a $d\omega = df \wedge \pi$ avec $[\pi] = D[\omega]$, d'où $d(\varphi \circ f\ \omega) = df \wedge (\varphi' \circ f\ \omega + \varphi \circ f\ \pi)$ et $D(\varphi e) = \varphi' e + \varphi De$.

b) On a $F/E = \Omega^{n-1}_{X/T,0} / \{\alpha \in \Omega^{n-1}_{X/T,0} \mid d_{X/T}\alpha = 0\}$. L'application déduite de $d_{X/T}$ est donc un isomorphisme de F/E sur $\Omega^n_{X/T,0}$. En identifiant $\Omega^n_{X,0}$ à $\mathcal{O}_{X,0}$ par $\varphi(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \longmapsto \varphi(x)$, on obtient

$$\Omega^n_{X/T} \cong \mathcal{O}_{X,0} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Or, les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne s'annulant simultanément qu'à l'origine, on a, pour un k convenable, $f^k \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, ce qui signifie précisément que $t^k F \subset E$.

Pour étendre D, on introduit les sous-modules de torsion E_1 et F_1 de

E et F et on vérifie facilement que $DE_1 \subset F_1$. On peut donc définir D de $E/E_1 \to F/F_1$ et, E/E_1 étant libre, le prolonger à $E/E_1 \otimes_{\mathcal{O}} K = \mathcal{E}$.

c) $X^* \xrightarrow{f} T^*$ étant une fibration C^∞ , on peut se ramener localement à la situation suivante : $X^* \cap f^{-1}(U)$ est difféomorphe à $U \times \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$, $\gamma(u)$ s'identifie à $\{u\} \times \gamma_o$ où γ_o est un $n-1$ cycle singulier de Ω et $f(t,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = t$. On a alors, pour t et $t+h$ dans U

$$\int_{\gamma(t+h)} \omega - \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{[t,t+h]\times\gamma_o} d\omega = \int_{[t,t+h]\times\gamma_o} du\wedge\pi = \int_t^{t+h} du \int_{\{u\}\times\gamma_o} \pi$$

et $\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma(t+h)} \omega - \int_{\gamma(t)} \omega\right) \to \int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} D[\omega]$.

DÉFINITION 4.3.- La connexion D ainsi définie est dite connexion de Gauss-Manin. Nous noterons h_D sa monodromie.

Soit ω une section horizontale (multiforme) de D . Si $\gamma(t)$ dépend continûment de t , on a, d'après ce qui précède

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} d\omega = 0 ,$$

ou encore, en notant $\omega(t) \in H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ la classe de la restriction de ω à X_t , et en notant $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la dualité entre $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ et $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, on a

$$\langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle = \text{constante} .$$

En particulier : $\langle \gamma(te^{2i\pi}) , \omega(te^{2i\pi}) \rangle = \langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle$

$$\langle h\gamma(t) , h_D\, \omega(t) \rangle = \langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle .$$

Les $\gamma(t)$ (resp. $\omega(t)$) formant une base de $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ (resp. $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$) pour γ multiforme dépendant continûment de t (resp. ω section horizontale de D), on en déduit que la monodromie h de la singularité et la monodromie h_D de la connexion de Gauss-Manin sont inverses transposées l'une de l'autre

$$h_D = h^{*-1} .$$

5. Régularité et périodes d'intégrales

Le théorème suivant, fondamental dans la théorie, peut être démontré par des méthodes analytiques (Nilsson, Griffiths, la démonstration de Malgrange que nous esquissons ci-dessous), arithmétiques (Katz), algébriques (Deligne).

THÉORÈME 5.1.- La connexion de Gauss-Manin est régulière.

Soit $\gamma(t) \in H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ défini sur le revêtement universel de T^* et dépendant continûment de t. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des $n-1$ formes relatives définies dans X, dont les classes $[\omega_1], \ldots, [\omega_\mu]$ forment une base de $\mathcal{E}$.

Si $D[\omega_i] = \Sigma c_{ij}[\omega_j]$, les composantes $f_1, \ldots, f_\mu$ d'une section horizontale ω de la connexion de Gauss-Manin vérifient $\frac{df_i}{dt} + \Sigma c_{ki} f_k = 0$, tandis que le système des intégrales associées à γ : $I_j(t) = \int_{\gamma(t)} \omega_j$ vérifie

$$\frac{dI_i}{dt} = \int_{\gamma(t)} D[\omega_j] = \Sigma c_{ik} I_k .$$

On obtient un système différentiel où la matrice des c_{ki} intervenant précédemment est remplacée par l'opposé de la transposée, et dont la monodromie sera h, inverse transposée de la monodromie h_D de la connexion de Gauss-Manin.

Il suffit évidemment de démontrer que ce système est à point singulier régulier. En fait, on a le résultat plus fort suivant, qui entraîne la régularité d'après 3.2.

THÉORÈME 5.2 [8].- Soit $I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$ où ω est une $n-1$ forme relative dans X. Alors, dans tout secteur angulaire $\alpha \leq \operatorname{Arg} t \leq \beta$ du revêtement universel $\mathcal{R}$, on a $I(t) \to 0$ pour $t \to 0$.

a) Montrons d'abord que sur chaque rayon (par exemple $0 < t \leq t_0$) on a $I(t) \to 0$.

Le principe de la démonstration consiste à construire une n-chaîne Δ dans $X \cap f^{-1}[0,t_0]$, dont le bord Γ représente $\gamma(t_0)$ et telle que $\Delta \cap f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. En désignant par $\tilde{\omega}$ une $(n-1)$-forme dont la classe modulo $d\varphi$ est ω, et en posant $\Delta_t = \Delta \cap f^{-1}([0,t])$, un argument à la Stokes montre que

$$I(t) = \int_{\Delta_t} d\tilde{\omega} ,$$

et cette intégrale tend vers 0 avec t.

Pour justifier cet argument, il faut utiliser un théorème de Łojasiewicz [6] pour construire une triangulation semi-analytique de l'ensemble semi-analytique

$X \cap f^{-1}([0,t_o])$, puis utiliser les résultats de Herrera [4] pour l'existence des intégrales ci-dessus et la validité de la formule de Stokes.

b) Le vecteur $\mathcal{J}(t) = (I_1(t),\ldots,I_\mu(t))$ est solution d'un système différentiel à coefficients méromorphes. On a donc

$$\|\frac{d\mathcal{J}}{dt}\| \leq \frac{C_1}{|t|^N} \|\mathcal{J}\|$$

et $\|\mathcal{J}(t)\| \leq C_2 \exp(C_1 |t|^{-N})$ dans tout secteur angulaire du revêtement universel.

c) Du principe de Phragmen-Lindelöf et des deux résultats précédents, on déduit que dans tout secteur angulaire $\alpha \leq \text{Arg } t \leq \beta$ de $\mathcal{R}$, avec $|\beta - \alpha| < \frac{\pi}{N}$, on a $\mathcal{J}(t) \to 0$, et le cas où α et β sont quelconques s'en déduit immédiatement.

5.3 Périodes d'intégrales

D'après le paragraphe 3, l'intégrale $I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$ possède un développement convergent du type

$$I(t) = \Sigma\ c_{\alpha q}(\omega)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q\ .$$

D'après le résultat précédent, on a nécessairement $-\alpha > 0$. D'autre part, on a $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ est une valeur propre de h et $q+1$ est inférieur ou égal à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal (pour $c_{\alpha q} \neq 0$!).

D'après le théorème de monodromie, on a donc α rationnel et $q \leq n-1$.

Soit maintenant π une n-forme dans X . On peut localement dans T^* écrire $\pi = df \wedge \theta$, et les θ définissent une section de $\Omega^{n-1}_{X/T}$ au-dessus de T^* notée $\frac{\pi}{df}$.

Posons $J(t) = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$.

Il existe une $n-1$-forme ρ dans X avec $d\rho = \pi = df \wedge \theta$. On a donc $D[\rho] = [\theta] = \left[\frac{\pi}{df}\right]$ et $\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} [\rho] = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$. Et donc

$$J(t) = \Sigma\ d_{\alpha q}(\pi)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q$$

avec α rationnel, $-\alpha > -1$, $0 \leq q \leq n-1$ et $e^{-2i\pi\alpha}$ est une valeur propre

de h dont la multiplicité dans le polynôme minimal est au moins $q+1$.

6. Relations entre la monodromie et le polynôme de Bernstein

Soit λ une valeur propre de h . Il existe nécessairement une n-forme ω dans X telle que, dans le développement

$$J(t) = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \Sigma\ d_{\alpha q}(\pi)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q\ ,$$

il existe un terme $d_{\alpha q}(\pi) \neq 0$ avec $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ (sinon, il est facile de voir que λ n'apparaîtrait jamais comme valeur propre de la monodromie).

Soit $\alpha_o = \sup\{\alpha \mid \exists\ \pi\ ,\ \exists\ q\ ,\ d_{\alpha q}(\pi) \neq 0 \text{ et } e^{-2i\pi\alpha} = \lambda\}$

et soit $q_o = \sup\{q \mid \exists\ \pi\ ,\ d_{\alpha_o q}(\pi) \neq 0\}$.

Nous nous bornerons ici à démontrer le résultat très partiel suivant :

THÉORÈME 6.1.- Le polynôme de Bernstein b admet α_o comme racine d'ordre q_o+1 .

Soit donc π une n-forme avec $d_{\alpha_o q_o}(\pi) \neq 0$. Nous allons utiliser le même type d'arguments que pour 4.3(c) : on prend une trivialisation de $f : X \cap f^{-1}(]0,1[) \to]0,1]$ (en se ramenant au cas où $1 \in T$). On peut alors supposer $\gamma(t) = \{t\} \times \gamma_o$ où γ_o est un $n-1$-cycle fixe. On pose $\Delta(t) = [t,1] \times \gamma_o$.

On a alors $\int_{t_o}^1 t^{s-1}\, dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{\Delta(t_o)} f^{s-1}\, \pi$, et donc

$$b(s) \int_{t_o}^1 t^{s-1}\, dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{\Delta(t_o)} [P(s, x, \frac{\partial}{\partial x})\, f^s]\pi\ .$$

Soit P^* l'adjoint formel de P opérant sur les n-formes (c'est-à-dire l'opérateur différentiel tel que, si φ est une fonction et ω une n-forme, l'une des deux étant à support compact, on ait $\int P\varphi\,\omega = \int \varphi\, P^*\omega$). On a alors

$$\int_{\Delta(t_o)} P\varphi\,\omega \ - \int_{\Delta(t_o)} \varphi\, P^*\omega \ = \int_{\gamma(1)-\gamma(t_o)} \theta$$

où θ est une $n-1$ forme dépendant de φ et ω dont on voit facilement dans

le calcul d'intégration par parties, qu'elle a une expression du type

$$\theta = \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial x^\beta} \theta_\beta \qquad \text{où } k \text{ est l'ordre de l'opérateur } P .$$

On a donc

$$\int_{\Delta(t_o)} [P(s, x, \frac{\partial}{\partial x}) f^s]\pi = \int_{\Delta(t_o)} f^s P^*\pi + \int_{\gamma(1)-\gamma(t_o)} \theta$$

avec $\theta = f^{s-k+1}\theta_1$.

$$b(s) \int_{t_o}^1 t^{s-1}\, dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{t_o}^1 t^s\, dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df} + \int_{\gamma(1)} \theta_1 - t_o^{s-k+1} \int_{\gamma(t_o)} \theta_1 .$$

Pour Re s assez grand, on peut passer à la limite, et on a

$$(*) \qquad b(s) \int_0^1 t^{s-1}\, dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_0^1 t^s \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df} + \int_{\gamma(1)} \theta_1 .$$

En utilisant les développements de $\int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$ et $\int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df}$ et

$\int_0^1 t^{s-1-\alpha} (\log t)^q\, dt = \frac{d^q}{ds^q} \left(\frac{1}{s-\alpha} \right)$, on voit que le membre de gauche de $(*)$, divise par b, a un pôle d'ordre $q_o + 1$ en α_o , tandis que les pôles du membre de droite, soit ne sont pas congrus à $\alpha_o \pmod 1$, soit sont situés en des points $\alpha \leq \alpha_o - 1$. Le polynôme de Bernstein b doit donc avoir un zéro d'ordre $q_o + 1$ en α_o .

En poursuivant cet argument et en examinant l'ordre des pôles (si p est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de h , il existe un α , peut-être plus petit que α_o , mais tel que $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ et $d_{\alpha,p-1}(\pi) \neq 0$ par un π convenable), et en considérant à part le cas $\alpha = 0$, on arrive au résultat suivant [7] :

THÉORÈME 6.2.- Si λ est une valeur propre de h dont la multiplicité dans le polynôme minimal est p , il existe p rationnels $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_p < 1$ tels que $e^{-2i\pi\alpha_j} = \lambda$ et $(s - \alpha_1) \ldots (s - \alpha_p)$ divise $\tilde{b}(s)$.

Remarque 6.3.- Nous n'avons pas utilisé jusqu'ici le fait que b est le polynôme de Bernstein (le générateur de l'idéal) et nous nous sommes donc bornés à

démontrer que $\tilde{b}$ possède un certain nombre de zéros rationnels. Pour démontrer le théorème 2.2, l'une des étapes, due à Kashiwara [5], consiste à déduire d'une étude des modules sur l'anneau des germes d'opérateurs différentiels, la construction d'un $\mathcal{O}$-module à connexion, tel que $\tilde{b}$ soit le polynôme minimal de la matrice de connexion.

Il "ne reste plus qu'à" démontrer que c'est la même chose que la connexion de Gauss-Manin, ce qui ne nécessite qu'un nombre fini d'étapes intermédiaires - pour lesquelles nous renvoyons à [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. N. BERNSTEIN - Prolongement analytique des fonctions généralisées avec paramètres [en russe], Funkts. Analyz 6.4 (1972), p. 26-40 ; [traduction : Funct. Anal. Appl., 6 (1972), p. 273-285].

[2] J. E. BJÖRK - Dimensions over algebras of differial operators, à paraître.

[3] P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer Verlag 1970.

[4] M. HERRERA - Integration on a semi-analytic set, Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 141-180.

[5] M. KASHIWARA - Papiers non publiés (en japonais).

[6] S. ŁOJASIEWICZ - Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, III, 18.4 (1964), 449-474.

[7] B. MALGRANGE - Sur les polynômes de I. N. Bernstein, Uspekhi Mat. Nauk, 29.4 (1974), 81-88 et Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé 20, 1973/74.

[8] B. MALGRANGE - Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, t. 7 (1974), 405-430.

[9] B. MALGRANGE - Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, preprint.

[10] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, 61 (1968), Princeton