SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUC ILLUSIE

Cohomologie cristalline

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 456, p. 53-60

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__53_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 456-01
27e année, 1974/75, n° 456 Novembre 1974

COHOMOLOGIE CRISTALLINE

[d'après P. BERTHELOT]

par Luc ILLUSIE

Les paragraphes 1 et 2 de cet exposé sont un résumé très succinct de la thèse de Berthelot [2]. Pour un compte-rendu un peu plus complet, mais tout aussi dépourvu de démonstrations, le lecteur pourra se reporter à [10]. Aux paragraphes 3 et 4, nous indiquons brièvement quelques applications et prolongements de la théorie.

1. Définition de la cohomologie cristalline

1.0 Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k. La théorie de Berthelot associe fonctoriellement à chaque variété (= schéma de type fini) X/k des "groupes de cohomologie cristalline" $H^i(X/W)$ qui sont des modules sur W. Pourvu qu'on se limite aux variétés propres et lisses sur k, la cohomologie cristalline remplit le vide laissé en p par les cohomologies ℓ-adiques de Grothendieck : elle permet, par exemple, pour X projective et k fini, une étude p-adique des zéros et des pôles de la fonction zêta de X, voir § 3. L'idée de la construction est due à Grothendieck (cf. [7], [8]).

1.1 Soient A un anneau (commutatif, unitaire), I un idéal de A. Rappelons [26] qu'une structure de puissances divisées (en abrégé, PD-structure) sur I est la donnée d'une famille d'applications $(\gamma_n : I \to A)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés formelles de $x \mapsto x^n/n!$. Un idéal muni d'une PD-structure s'appelle un PD-idéal. Si A est de caractéristique nulle, tout idéal est muni naturellement d'une unique PD-structure. Si A est de torsion, tout PD-idéal est un nil-idéal. L'idéal maximal pW de W est muni d'une unique PD-structure, dite canonique. Elle induit une PD-structure canonique sur l'idéal maximal de chaque quotient $W_n = W/p^{n+1}W$. Désignons par R l'anneau W ou un quotient W_n. Soit (A,I) une paire formée d'une R-algèbre et d'un idéal, le foncteur associant

à chaque paire (B,J) formée d'une R-algèbre B et d'un idéal J muni d'une PD-structure compatible avec la PD-structure canonique de pR l'ensemble des homomorphismes de R-algèbres $A \to B$ envoyant I dans J est représenté par une paire $(D_{A/R}(I), \bar{I})$ appelée PD-enveloppe de I relativement à R . On a $D_{A/R}(I)/\bar{I} = A$. Si $I = pA$, on a $(D_{A/R}(I), \bar{I}) = (A,I)$. Cette construction se faisceautise.

1.2 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variété sur k . Une W_n-immersion fermée $i : U \hookrightarrow \bar{U}$, où U est un ouvert de Zariski de X et l'Idéal de i est muni d'une PD-structure compatible avec la structure canonique de pW_n , s'appelle un PD-W_n-épaississement de X . Les PD-W_n-épaississements de X forment de manière évidente une catégorie, sur laquelle on définit une topologie de Grothendieck en prenant pour familles couvrantes les familles $((U_\alpha \hookrightarrow \bar{U}_\alpha) \to (V \hookrightarrow \bar{V}))$ telles que $(\bar{U}_\alpha \to \bar{V})$ soit un recouvrement ouvert de $\bar{V}$. Le site ainsi obtenu s'appelle site cristallin de X relativement à W_n et se note X/W_n . Les $\mathcal{O}_{\bar{U}}$ définissent un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X/W_n}$ sur X/W_n . Les groupes de cohomologie $H^i(X/W_n) \overset{dfn}{=} H^i(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$ sont des W_n-modules, ils forment une algèbre graduée anti-commutative.

Supposons qu'on dispose d'une W_n-immersion fermée $i : X \hookrightarrow Y$, avec Y lisse sur W_n . Alors on peut calculer les $H^i(X/W_n)$ par le procédé suivant. Notons $(\mathcal{D}_X(Y), \bar{I})$ la PD-enveloppe de l'Idéal I de i . $\mathcal{D}_X(Y)$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente, qui est munie naturellement d'une connexion intégrable par rapport à W_n , de sorte qu'on peut former le complexe de De Rham de Y/W_n à coefficients dans $\mathcal{D}_X(Y)$, soit $\Omega^\cdot_{Y/W_n} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_X(Y)$. Comme $\bar{I}$ est un nil-Idéal et que $\mathcal{D}_X(Y)/\bar{I} = \mathcal{O}_X$, ce complexe est à support dans X . Un des résultats principaux de Berthelot est qu'on a alors un isomorphisme canonique

1.2.1 $$H^*(X/W_n) \simeq H^*(X, \Omega^\cdot_{Y/W_n} \otimes \mathcal{D}_X(Y)) .$$

En particulier, si X est la réduction sur k d'un schéma lisse X'/W_n , on a

1.2.2 $$H^*(X/W_n) \simeq H^*_{DR}(X'/W_n) ,$$

vu que $\mathfrak{D}_X(X') = \mathcal{O}_{X'}$ (si $Y \to Z$ est un morphisme de schémas, on note $H^*_{DR}(Y/Z) \overset{dfn}{=} H^*(Y, \Omega^\cdot_{Y/Z})$ la cohomologie de De Rham de Y/Z).

1.3 Pour i fixé et n variable, les $H^i(X/W_n)$ forment un système projectif dont la limite, notée $H^i(X/W)$, est par définition le i-ième groupe de cohomologie cristalline de X par rapport à W . $H^*(X/W) = \oplus H^i(X/W)$ est une W-algèbre graduée anti-commutative, qui dépend fonctoriellement de X/k : tout carré commutatif $X'/k' \to X/k$ induit un homomorphisme $H^*(X/W) \otimes_W W' \to H^*(X'/W')$ ($W' = W(k')$) . En dehors du cas X/k propre et lisse, $H^*(X/W)$ est plutôt pathologique (e.g., si X est la droite affine (resp. la réunion de deux droites projectives se coupant en un point), $H^1(X/W)$ n'est pas de type fini).

2. Cohomologie cristalline des variétés propres et lisses

2.1 Soient k et W comme dans 1.0. Soit X une variété propre et lisse sur k , de dimension d . Les $H^i(X/W)$ sont alors de type fini sur W , nuls pour $i > 2d$ Si X/k est projective ou relevable sur W , le rang de $H^i(X/W)$ est égal au i-ième nombre de Betti ℓ-adique de X , $b^i_\ell(X)$, pour tout $\ell \neq p$ (rappelons que $b^i_\ell(X) = \dim H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, où $\bar{X}$ est déduit par extension des scalaires à une clôture algébrique de k) (*). On le note $b^i(X)$.

La formation de $H^*(X/W)$ commute à toute extension de corps parfaits k'/k : si X'/k' se déduit par extension des scalaires de X/k , on a $H^*(X/W) \otimes_W W' \xrightarrow{\sim} H^*(X'/W')$.

2.2 Pour tout entier i , on a une suite exacte

$$0 \to H^i(X/W) \otimes_W k \to H^i_{DR}(X/k) \to \mathrm{Tor}^W_1(H^{i+1}(X/W), k) \to 0 .$$

Donc $\dim_k H^i_{DR}(X/k) \geq b^i(X)$, avec égalité si et seulement si $H^i(X/W)$ et $H^{i+1}(X/W)$ n'ont pas de torsion.

2.3 Si X/k est la réduction d'un schéma propre et lisse X'/W , on a un isomorphisme canonique

$$H^*(X/W) \simeq H^*_{DR}(X/W)$$

(*) Les conjectures de Weil ([6], [13]) sont en filigrane dans cette assertion.

(déduit de 1.2.2 par passage à la limite). C'est un analogue du théorème d'invariance de Washnitzer et Monsky dans le cas affine [24].

2.4 Pour les variétés propres et lisses sur k, la cohomologie cristalline vérifie un formulaire (Künneth, dualité de Poincaré, morphisme de Gysin) analogue à celui dont on dispose en cohomologie ℓ-adique. La seule différence notable est qu'on ne sait pour l'instant définir la classe de cohomologie $c(Y/W) \in H^{2d}(X/W)$ d'un cycle Y de codimension d sur X que si Y est non singulier.

2.5 Supposons que k soit le corps fini $\mathbf{F}_q$, notons K le corps des fractions de W. Soit X une variété propre et lisse sur k. L'endomorphisme de Frobenius F de X ($x \mapsto x^q$ sur $\mathcal{O}_X$) induit un automorphisme, noté encore F, de $H^*(X/W)_K \overset{\text{dfn}}{=} H^*(X/W) \otimes_W K$. Berthelot montre que la fonction zêta de X/k est donnée par la formule

2.5.1 $\qquad Z(X/k) = \prod P_{2i-1}(t) / \prod P_{2i}(t)$,

où $P_n(t) = \det(\mathrm{Id} - Ft, H^n(X/W)_K)$. A priori, on a $P_n(t) \in K[t]$, mais Katz et Messing [13] ont déduit des conjectures de Weil [6] que si X/k est projective $P_n(t)$ est à coefficients entiers et coïncide, pour tout nombre premier $\ell \neq p$, avec le polynôme caractéristique analogue en cohomologie ℓ-adique.

2.6 Le corps k étant à nouveau un corps parfait quelconque de car. $p > 0$, soit S une variété affine et lisse sur k, et soit S' un schéma formel lisse sur W relevant S et tel que $S' = \varinjlim S'_n$, où $S'_n = S' \otimes W_n$, $W_n = W/p^{n+1}W$. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse. Pour $n \in \mathbb{N}$, f définit un morphisme de sites cristallins $f_n : X/W_n \to S'_n/W_n$. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, la limite des $R^i f_{n*} \mathcal{O}_{X/W_n}$ est un F-cristal cohérent sur S' au sens de Katz [12], qui exprime la variation des i-ièmes groupes de cohomologie cristalline des fibres de f. Pour la comparaison de ce point de vue avec ceux de Dwork et de Washnitzer-Monsky, le lecteur pourra consulter [23] et l'introduction de [2].

3. Polygones de Newton cristallins, d'après Mazur [16], [17], [18]

3.1 Soient k , W , K comme en 2.5, notons $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , et v la valuation sur $\bar{K}$ telle que $v(q) = 1$. Rappelons qu'on appelle polygone de Newton (p-adique) d'un polynôme $f = \Sigma a_i t^i \in \bar{K}[t]$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ des points $(i , v(a_i))$. Si $f = \prod_1^N (1 - \alpha_i t)$, avec $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq N$, les points extrémaux du polygone de Newton de f forment une ligne polygonale convexe $(A_o = (0,0) , A_1, \ldots, A_r)$ dont les pentes des côtés sont les valuations des α_j ; si m_i est la pente de $A_{i-1}A_i$ et s_i le nombre de α_j tels que $v(\alpha_j) = m_i$, on a $A_i = (s_1 + \ldots + s_i , m_1 s_1 + \ldots + m_i s_i = v(a_{s_1 + \ldots + s_i}))$ (et $s_1 + \ldots + s_r = N$).

3.2 Soient n un entier, X une variété projective et lisse sur $k = \mathbb{F}_q$, b_n le rang de $H^n(X/W)$, F et $P_n(t)$ comme en 2.5. Le n-ième polygone de Newton cristallin de X est par définition le polygone de Newton $Cr_n(X/W)$ de $P_n(t)$. D'après un lemme d'algèbre p-linéaire de Dieudonné-Manin [15], les points extrémaux $(0 , A_1, \ldots, A_{b_n})$ de $Cr_n(X/W)$ ont des coordonnées entières [1]. De plus, la dualité de Poincaré (2.4) et le théorème de Lefschetz "fort" en cohomologie cristalline [13] impliquent que $A_{b_n} = (b_n , nb_n/2)$.

Supposons que X soit la réduction sur k d'un schéma projectif et lisse X'/W tel que les W-modules $H^i(X' , \Omega^j_{X'/W})$ soient libres, de rangs notés h^{ji} . On a $b_n = \sum_{i+j=n} h^{ij}$, et $h^{ij} = h^{ji}$. On appelle n-ième polygone de Hodge de X' le polygone de Newton $Hdg_n(X'/W)$ du polynôme (de degré b_n) $\prod_{i=0}^{n} (1 - q^i t)^{h^{i,n-i}}$. Il a pour points extrémaux les $B_i = (h^{0,n} + \ldots + h^{i,n-i} , 0.h^{0,n} + \ldots + ih^{i,n-i})$, et $B_{b_n} = A_{b_n}$. Mazur [17] a démontré le beau résultat suivant, conjecturé par Katz [11] pour les intersections complètes (et prouvé par Dwork pour les hypersurfaces) :

---

[1] $Cr_n(X/W)$ est aussi le polygone de Newton associé par la théorie de [15] à $H^n(X/W)$ muni de l'endomorphisme semi-linéaire induit par l'élévation à la puissance p-ième sur X ; cela permet d'étendre la définition de $Cr_n(X/W)$ au cas où k est un corps parfait quelconque de car. $p > 0$ (voir [3], [16]).

THÉORÈME 3.3. $Cr_n(X/W)$ est au-dessus de $Hdg_n(X'/W)$.

En particulier, si c est le plus petit entier tel que $h^{c,n-c}$ soit non nul, toutes les "racines inverses" de $P_n(t)$ sont divisibles par q^c . Ce résultat de divisibilité - qui généralise le théorème classique de Chevalley-Warning [28] ainsi qu'il est montré dans [11] - avait été obtenu par Katz dans le cas des intersections complètes à l'aide de la théorie de Dwork. Pour des applications de 3.3, ainsi qu'un exposé de diverses variantes et conjectures, nous renvoyons le lecteur à [16], [18]. Signalons que le polygone de Newton cristallin croît par spécialisation (résultat non publié de Grothendieck), d'où l'on déduit, pour une famille propre et lisse paramétrée par une variété T/k , une stratification de T par des strates à polygone cristallin constant : voir [1], [14] pour une analyse de ces stratifications pour certaines familles modulaires.

4. Compléments

4.1 A la suite de Grothendieck [9], Mazur et Messing [19], [20], [21] ont étudié en détail le H^1 cristallin en relation avec la "théorie de Dieudonné" des groupes p-divisibles (= Barsotti-Tate) sur des bases générales S . Toutefois, en dehors du cas où S est le spectre d'un corps parfait, on ne sait pas faire le lien entre cette théorie et la théorie de Cartier des groupes formels [5], [25].

4.2 A l'aide de la cohomologie cristalline (et aussi de la cohomologie fppf), Milne [22] a démontré les analogues pour $\ell = p$ des théorèmes de Tate ([27], 5.1 et 5.2) sur le groupe de Brauer des surfaces projectives lisses sur des corps finis.

4.3 Bloch [4] sait définir, pour X propre et lisse sur un corps k parfait, un complexe de faisceaux zariskiens sur X , formé à l'aide de K_i à la Quillen, dont l'hypercohomologie est $H^*(X/W)$, et qui permet, si $\dim(X) < p$, une interprétation remarquable des "pentes" de $H^*(X/W)$, voir l'exposé de Berthelot [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN - Supersingular K3 surfaces, Ann. Sc. ENS, t. 8, 1975, à paraître

[2] P. BERTHELOT - Cohomologie cristalline, Lecture Notes in Math. 407, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[3] P. BERTHELOT - The slope filtration on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[4] S. BLOCH - Article en préparation.

[5] P. CARTIER - Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967), 50-52, et Modules associés à un groupe formel commutatif, courbes typiques, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967) 129-132.

[6] P. DELIGNE - La conjecture de Weil I, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 43, 1974.

[7] A. GROTHENDIECK - Lettre à J. Tate, mai 1966.

[8] A. GROTHENDIECK - Crystals and the De Rham cohomology of schemes, Notes by I. Coates and O. Jussila, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.

[9] A. GROTHENDIECK - Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes Congrès Intern. Math. 1970, I, 431-436.

[10] L. ILLUSIE - Report on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[11] N. KATZ - On a theorem of Ax, Amer. J. Math., 93 (1971), 485-499.

[12] N. KATZ - Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki, exposé 409 (février 1972), Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag, 1974.

[13] N. KATZ and W. MESSING - Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields, Inv. Math., 23 (1974), 73-77.

[14] N. KOBLITZ - p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields, Thesis, Princeton, 1974.

[15] I. MANIN - The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristics, Russian Math. Surveys, 18 (1963).

[16] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 78, n° 5, 1972.

[17] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, estimates, Ann. of Maths., 98 (1973), 58-95.

[18] B. MAZUR - Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[19] B. MAZUR and W. MESSING - Universal Extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag, 1974.

[20] W. MESSING - The Crystals associated to Barsotti-Tate Groups, Lecture Notes in Math. 264, Springer Verlag, 1972.

[21] W. MESSING - The Universal Extension of an Abelian Variety by a Vector Group, Ist. Nazion. di Alta Mat., Sumposia Math., Vol. XI, 1973.

[22] J. S. MILNE - preprint.

[23] P. MONSKY - p-adic analysis and Zeta functions, 1969

[24] P. MONSKY and G. WASHNITZER - Formal Cohomology I, Ann. of Maths., 88 (1968), 181-217.

[25] D. MUMFORD - Bi-extensions of formal groups, Algebraic Geometry, Bombay Colloquium 1968, p. 307-322, Oxford Univ. Press 1969.

[26] N. ROBY - Les algèbres à puissances divisées, Bull. Soc. Math. France, 89 (1965), 75-91.

[27] J. TATE - On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.

[28] E. WARNING - Bemerkung zur Vorstehenden Arbeit von Herr Chevalley, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 11 (1936), 76-83.