SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ GRAMAIN

Sphères d'homologie rationnelle

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 455, p. 35-52

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__35_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 455-01
27e année, 1974/75, n° 455 Novembre 1974

SPHÈRES D'HOMOLOGIE RATIONNELLE

[d'après J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL]

par André GRAMAIN

1. Introduction

Classifier les variétés, c'est décrire l'ensemble des classes, à difféomorphisme près, des variétés différentielles. Si deux variétés sont difféomorphes, elles ont même type d'homotopie et d'homologie. En dimension 2 , une variété compacte sans bord est caractérisée par son type d'homotopie ; plus précisément, deux surfaces connexes ayant des groupes fondamentaux isomorphes sont difféomorphes [11]. Le problème de l'existence de structures différentiables sur un type d'homotopie donné est étudié avec succès depuis plusieurs années (cf. [6]) ; nous n'avons pas à nous en occuper ici.

Pour les variétés de dimension > 2 , le premier résultat est dû à Milnor [13] qui, en 1956, prouva l'existence de 7 structures différentiables non difféomorphes sur la sphère (topologique) S_7 . En 1962, Kervaire et Milnor [12] donnaient une classification des variétés ayant le type d'homotopie de la sphère S_n . Pour $n \geq 0$, soit θ_n l'ensemble des classes, à h-cobordime près, des variétés compactes orientées de dimension n ayant le type d'homotopie de la sphère S_n . Kervaire et Milnor calculent θ_n (sauf θ_3 complètement inconnu, et une indétermination à un facteur près dans θ_{4k-2}) ; le résultat fait intervenir les groupes d'homotopie stables des sphères et l'homomorphisme J de Hopf-Whitehead ; la démonstration utilise la technique de la chirurgie et les résultats d'Adams sur l'homomorphisme J . D'après un théorème de Smale [16], deux variétés simplement connexes et h-cobordantes, de dimension $n \neq 3, 4$, sont difféomorphes. On a donc une classification à difféomorphisme près des sphères d'homotopie de dimension $\neq 3, 4$; on constate d'ailleurs, d'après le théorème de Smale, qu'une sphère d'homotopie est homéomorphe à la sphère S_n $(n > 5)$. Pour les dimensions 3 et 4 , le problème est entier.

Nous exposons ici les résultats de [3]. Pour un anneau A de fractions rationnelles $(\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Q})$ et pour $n \neq 3$, les auteurs calculent l'ensemble θ_n^A des classes de H_A-cobordisme des variétés qui ont l'homologie, à coefficients dans A, de la sphère S_n. On exprime θ_n^A en fonction de $\theta_n^{\mathbb{Q}}$ qui est complètement calculé et de $\theta_n^{\mathbb{Z}}$ qui est égal à θ_n pour $n \neq 3$ (th. 1 et th. 4). Le calcul de $\theta_n^{\mathbb{Q}}$ fait intervenir les groupes de cobordisme Ω^{SO} et les relations entre nombres de Pontrjagin.

2. Enoncé du résultat

Pour abréger, on dira variété au lieu de variété compacte orientée. On appelle cobordisme entre deux variétés V_0 et V_1 de dimension n une variété à bord W de dimension $n+1$ dont le bord soit difféomorphe à la somme disjointe $(-V_0) \cup V_1$ (difféomorphisme orienté). On dit qu'un cobordisme (W, V_0, V_1) est un h-cobordisme si l'injection de V_i dans W est une équivalence d'homotopie $(i = 0, 1)$. Soit A un anneau, on dit que (W, V_0, V_1) est un H_A-cobordisme si $H_*(W, V_i ; A) = 0$.

On note Ω_n^{SO} l'ensemble des classes de variétés (compactes, orientées, sans bord) de dimension n à cobordisme (orienté) près. L'opération de somme connexe induit une loi de composition pour laquelle Ω_n^{SO} est un groupe commutatif.

On dit qu'une variété V de dimension n est une sphère d'homologie à coefficients dans A (ou une A-sphère) si $\tilde{H}_i(V ; A) = 0$ pour tout $i \neq n$. On note θ_n^A l'ensemble des classes de H_A-cobordisme de A-sphères. La somme connexe de deux A-sphères est une A-sphère, et l'on obtient une structure de groupe sur θ_n^A. Les représentants de 0 sont les A-sphères qui bordent un A-disque.

Notons T_n^A le groupe de cobordisme relatif de θ_n^A modulo Ω_n^{SO}. Les éléments de T_n^A sont les variétés à bord, de dimension n, dont le bord est une A-sphère, modulo cobordisme (à coins) induisant un H_A-cobordisme au bord. On a une suite exacte :

$$(1) \qquad \ldots \to T_{n+1}^A \to \theta_n^A \to \Omega_n^{SO} \to T_n^A \to \ldots \quad .$$

THÉORÈME 1.- Pour $n \not\equiv 0 \mod 4$, on a $T_n^{\mathbb{Q}} = 0$. Pour $k \neq 1$, $T_{4k}^{\mathbb{Q}}$ est isomorphe à $W(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}^{\pi(k)-1}$, où $W(\mathbb{Q})$ est le groupe de Witt des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{Q}$ et $\pi(k)$ le nombre de partitions de l'entier k.

On a donc des isomorphismes $\theta_{4k+i}^{\mathbb{Q}} \to \Omega_{4k+i}^{SO}$ pour $i = 1, 2$ et une suite exacte :

$$0 \to \theta_{4k}^{\mathbb{Q}} \to \Omega_{4k}^{SO} \to W(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}^{\pi(k)-1} \to \theta_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \to \Omega_{4k-1}^{SO} \to 0 .$$

L'image de $\theta_{4k}^{\mathbb{Q}}$ est la torsion de Ω_{4k}^{SO}.

On précisera plus loin le noyau de $\theta_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \to \Omega_{4k-1}^{SO}$ lorsqu'on aura décrit l'isomorphisme entre $T_{4k}^{\mathbb{Q}}$ et $W(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}^{\pi(k)-1}$. Les groupes de cobordisme Ω_n^{SO} étant connus [18], le th. 1 décrit entièrement les groupes $\theta_n^{\mathbb{Q}}$. Pour $A = \mathbb{Z}$, la suite exacte (1) dégénère car toute sphère d'homotopie est un bord.

3. Formes bilinéaires et quadratiques (cf. [3], [14] et [10])

3.1 Soit A un anneau commutatif. On appelle b-module sur A un couple (M,f) où M est un A-module projectif de type fini et $f : M \times M \to A$ une forme bilinéaire symétrique non-singulière (c'est-à-dire que $A \to \mathrm{Hom}_A(M,A)$ est bijective). On dit qu'un b-module (M,f) est neutre si M possède un facteur direct qui soit son propre orthogonal.

Par exemple, A^2 muni de la forme bilinéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est neutre (plan hyperbolique). Inversement, supposons que tout A-module projectif de type fini soit libre (c'est le cas si A est un anneau de fractions) et que $1/2 \in A$, alors, si (M,f) est un b-module neutre, M possède une base (base symplectique) telle que la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Soit $\mathcal{B}(A)$ le monoïde (pour la somme directe orthogonale) des classes d'isomorphisme de b-modules sur A et $\mathcal{N}(A)$ le sous-monoïde engendré par les b-modules neutres. On note $W(A)$ le quotient $\mathcal{B}(A)/\mathcal{N}(A)$. C'est un groupe : la somme directe $(M,f) \oplus (M,-f)$ est neutre. On peut munir $W(A)$ d'une structure d'anneau avec la multiplication induite par le produit tensoriel et pour élément

unité la classe de A muni de $(x,y) \mapsto xy$. L'application $\sigma : W(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ définie par l'indice est un isomorphisme. Le groupe $W(\mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$; pour p premier impair, $W(\mathbb{Z}/p)$ est un groupe à quatre éléments.

3.3 Supposons désormais que A soit un anneau de Dedekind, et soit K le corps des fractions de A . On appelle e-module sur A un couple (M,g) où M est un A-module de torsion de type fini et $g : M \times M \to K/A$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, appelée forme d'enlacement. Un e-module est neutre s'il contient un sous-module qui soit son propre orthogonal. On note $W(K,A)$ le quotient du monoïde des classes d'isomorphisme des e-modules par le sous-monoïde engendré par les classes des e-modules neutres. L'hypothèse sur A permet de démontrer que $W(K,A)$ est un groupe et que tout e-module stablement neutre est neutre.

3.4 Soit P un A-module projectif de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $b : P \times P \to A$ (non-dégénérée signifie que l'application canonique $P \to \mathrm{Hom}_A(P,A)$ est injective). Alors P s'identifie à un réseau de $K \otimes_A P$, la forme b s'étend en forme non-singulière sur $K \otimes_A P$ à valeurs dans K . Soit $P^{\#}$ le réseau dual de P par rapport à b ; l'injection $P \to \mathrm{Hom}_A(P,A)$ se prolonge en un isomorphisme $P^{\#} \to \mathrm{Hom}_A(P,A)$. L'hypothèse sur A permet de démontrer que $(P^{\#})^{\#} = P$. Par suite, la forme b induit sur le conoyau $P^{\#}/P$ une forme d'enlacement.

Soit maintenant E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soit P un A-réseau de E contenu dans son dual, la classe dans $W(K,A)$ du e-module $P^{\#}/P$ ne dépend pas du choix de P , elle ne dépend même que de la classe de (E,b) dans $W(K)$. L'homomorphisme $\delta : W(K) \to W(K,A)$ ainsi défini a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.- <u>On a une suite exacte</u> :

$$0 \to W(A) \to W(K) \xrightarrow{\delta} W(K,A) .$$

<u>Si A est un anneau euclidien, δ est surjective.</u>

Le groupe $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ est isomorphe à la somme directe des $W(\mathbb{Z}/p)$ (p premier). Lorsque $A = \mathbb{Z}$, la suite exacte de la prop. 1 est scindée par l'indice.

3.5 Soit M un A-module, on appelle forme quadratique sur M une application $q : M \to A$ telle que l'on ait $q(ax) = a^2 q(x)$ pour $a \in A$, $x \in M$, et que l'application $b : M \times M \to A$, définie par $b(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$, soit une forme bilinéaire symétrique. Si $1/2 \in A$, toute forme bilinéaire symétrique b provient de la forme quadratique $x \mapsto \frac{1}{2} b(x,x)$; sinon, seules les formes paires proviennent d'une forme quadratique.

Pour les anneaux où 2 n'est pas inversible, on doit définir les groupes de Witt quadratiques $W_q(A)$ et $W_q(K,A)$ de façon analogue à 3.1 et 3.3. Un module quadratique (M,q) est neutre s'il possède un sous-module isotrope égal à son propre orthogonal.

On a une suite exacte :

$$0 \to W_q(A) \to W_q(K) \to W_q(K,A)$$

et la dernière flèche est surjective si A est un anneau de fractions.

3.6 Soit $V(K,A)$ le noyau de la surjection $W_q(K,A) \to W(K,A)$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & V(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \to & W_q(\mathbb{Z}) & \to & W_q(\mathbb{Q}) & \to & W_q(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \\
0 & \to & W(\mathbb{Z}) & \to & W(\mathbb{Q}) & \to & W(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) & \to & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & & .
\end{array}$$

On en déduit une suite exacte :

$$0 \to W_q(\mathbb{Z}) \to W(\mathbb{Z}) \to V(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to 0 .$$

On voit alors, caractérisant les éléments de $W(\mathbb{Z})/W_q(\mathbb{Z})$ par la classe de Wu, que $V(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ est cyclique d'ordre 8. En particulier, l'indice induit un isomorphisme de $W_q(\mathbb{Z})$ sur $8\mathbb{Z}$.

3.7 Désignons par $W(A,\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ engendré par les e-modules M tels que $A \otimes M$ soit neutre ; le conoyau d'un élément de $W_q(A)$ est dans $W(A,\mathbb{Z})$, on note $\delta : W_q(A) \to W(A,\mathbb{Z})$ l'homomorphisme ainsi défini. On a, si

$\frac{1}{2} \in A$, une suite exacte :

$$0 \to W(\mathbb{Z}) \to W(A) \to W(A, \mathbb{Z}) \to 0 .$$

Si $\frac{1}{2} \notin A$, avec une définition analogue pour $W_q(A, \mathbb{Z})$, on a la suite exacte :

$$0 \to W_q(\mathbb{Z}) \to W_q(A) \to W_q(A, \mathbb{Z}) \to 0 .$$

4. Formes d'intersection et d'enlacement d'une variété

4.1 Soit W une variété compacte connexe orientée de dimension $4k$ (avec ou sans bord). L'intersection des cycles de dimension $2k$ définit une forme bilinéaire symétrique à valeurs entières sur le quotient libre

$L_{2k}(W ; \mathbb{Z}) = H_{2k}(W ; \mathbb{Z}) / \mathrm{Tors}(H_{2k}(W ; \mathbb{Z}))$; on la note $(x,y) \mapsto x.y$. Soit $D : H_{2k}(W) \to H^{2k}(W , bW)$ l'isomorphisme de la dualité de Poincaré. L'intersection $x.y$ est la valeur sur la classe d'orientation de (W , bW) du cup-produit $D(x) \cup D(y)$. Par ce procédé, on peut définir pour tout anneau A la forme d'intersection sur $L_{2k}(W ; A)$ à valeurs dans A .

4.2 Si le bord bW est une A-sphère (ou est vide), la forme d'intersection sur $L_{2k}(W ; A)$ est non-singulière. En effet, $H^{2k}(W , bW ; A)$ est isomorphe à $H^{2k}(W ; A)$ et l'isomorphisme $D : H_{2k}(W ; A) \to H^{2k}(W , bW ; A)$ induit un isomorphisme $L_{2k}(W ; A) \to \mathrm{Hom}_A(L_{2k}(W ; A) , A)$ qui est précisément l'homomorphisme associé à la forme d'intersection.

Pour tout $x \in L_{2k}(W ; \mathbb{Z})$, on a $x.x \equiv v_{2k}.x \mod 2$, où v_{2k} est la classe de Wu. Si W est stablement parallélisable, la forme d'intersection sur $L_{2k}(W ; \mathbb{Z})$ est paire et provient donc d'une forme quadratique. Plus généralement, si W est A-trivialisable (n° 6.1), il en est de même sur $L_{2k}(W ; A)$.

4.3 Supposons que $bW = \emptyset$ et que W soit le bord d'une variété compacte, on démontre alors que la forme d'intersection sur $L_{2k}(W ; A)$ est neutre. Plus généralement, si W est équivalente dans T^A_n à un A-disque, le résultat est encore valable. En effet, il existe une variété U de dimension $4k + 1$ dont le bord est égal à la variété W' obtenue en collant à W un A-disque le long de bW ; on a $L_{2k}(W') = L_{2k}(W)$ et les formes d'intersection coïncident.

4.4 Soit V une variété sans bord de dimension $4k-1$. Décomposons son homologie $H_{2k-1}(V;\mathbb{Z})$ en torsion et quotient libre :

$$0 \to T_{2k-1}(V;\mathbb{Z}) \to H_{2k-1}(V;\mathbb{Z}) \to L_{2k-1}(V;\mathbb{Z}) \to 0 .$$

De même, la cohomologie se décompose (formule de Künneth) en :

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{2k-1}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^{2k}(V;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_{2k}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0 ,$$

où $\mathrm{Ext}(H_{2k-1}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ $(= \mathrm{Ext}(T_{2k-1}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(T_{2k-1}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ est la partie de torsion et où $\mathrm{Hom}(H_{2k}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ $(= \mathrm{Hom}(L_{2k}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}))$ est le quotient libre. L'isomorphisme de Poincaré $D : H_{2k-1}(V;\mathbb{Z}) \to H^{2k}(V;\mathbb{Z})$ induit un isomorphisme $T_{2k-1}(V;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(T_{2k-1}(V;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, d'où une forme bilinéaire non-singulière sur $T_{2k-1}(V;\mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont on vérifie qu'elle est symétrique. On appelle cette forme la <u>forme d'enlacement</u> de V. Elle jouit des propriétés suivantes (cf. [3]) :

PROPOSITION 2.- (a) <u>La classe dans</u> $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ <u>de la forme d'enlacement est invariante par</u> $H_{\mathbb{Q}}$<u>-cobordisme</u>.

(b) <u>Soit</u> W <u>une variété à bord de dimension</u> $4k$ <u>telle que</u> bW <u>soit une</u> $\mathbb{Q}$<u>-sphère. Dans</u> $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, <u>la classe du conoyau de la forme d'intersection de</u> W <u>est l'opposé de la classe de la forme d'enlacement de</u> bW.

5. Les résultats de Kervaire-Milnor

5.1 Indiquons brièvement le calcul de θ_n d'après [12]. Soit $\mathcal{P}_n$ l'"ensemble" des couples (W,u) où W est une variété à bord de dimension n, dont le bord est une sphère d'homotopie, et u une trivialisation du fibré tangent stable à W. On dit que deux éléments (W_o, u_o), (W_1, u_1) de $\mathcal{P}_n$ sont équivalents s'il existe un cobordisme U reliant W_o à W_1, induisant un h-cobordisme entre bW_o et bW_1, et tel qu'il existe une trivialisation de $T(U)$ prolongeant u_o et u_1. On désigne par P_n le quotient de $\mathcal{P}_n$ par cette relation d'équivalence. On munit P_n de la loi de composition induite par la somme connexe au bord ; P_n est alors un groupe commutatif.

On définit A_n, de façon analogue, comme groupe de cobordisme des variétés V sans bord, de dimension n, munies d'une trivialisation u de la restriction

de $T(V)$ au complémentaire d'un point $x \in V$, modulo les cobordismes stablement parallélisés au-dessus du complémentaire d'un chemin joignant les deux points exceptionnels du bord. C'est un groupe commutatif pour la somme connexe.

On a alors une suite d'homomorphismes :

$$(2) \qquad \ldots \to A_n \xrightarrow{a} P_n \xrightarrow{b} \theta_{n-1} \xrightarrow{c} A_{n-1} \to \ldots .$$

L'application a associe à la classe de (V, u, x) la classe de $(V-D, u|V-D)$, où D est un disque ouvert de centre x dans V. L'application b consiste à prendre le bord. Enfin, si V est une sphère d'homotopie et x un point de V, $V - \{x\}$ est un disque d'homotopie et le fibré $T(V)|V-\{x\}$ possède une unique trivialisation (à homotopie près), ce qui permet de définir l'application c. L'exactitude de la suite (2) résulte immédiatement des définitions.

5.2 THÉORÈME 2.- On a $P_n = 0$ pour n impair,

$P_{4k} \simeq \mathbb{Z}$ pour $k \neq 1$,

$P_{4k+2} \simeq \mathbb{Z}/2$.

La démonstration de ce théorème utilise la technique de chirurgie ; elle est longue et délicate. Si $(W,u) \in \mathcal{P}_{4k}$, la forme d'intersection de W est paire et non-singulière. On en déduit une application $P_{4k} \to W_q(\mathbb{Z})$; le calcul de P_{4k} consiste à démontrer que, pour $k \neq 1$, c'est un isomorphisme. De même, le calcul de P_{4k+2} consiste à construire un isomorphisme de P_{4k+2} sur $W(\mathbb{Z}/2)$, mais ici même la définition de l'application $P_{4k+2} \to W(\mathbb{Z}/2)$ est délicate.

5.3 Pour calculer A_n, considérons la suite exacte :

$$(3) \qquad \ldots \to \pi_n(SO) \xrightarrow{J_n} \Pi_n \to A_n \to \pi_{n-1}(SO) \to \ldots$$

où Π_n est le groupe de cobordisme des variétés stablement parallélisées. On sait (construction de Thom-Pontrjagin) que Π_n s'identifie au groupe d'homotopie stable $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$, et J_n est alors l'homomorphisme de Hopf-Whitehead. Les groupes $\pi_n(SO)$ sont connus (périodicité de Bott [4]), l'homomorphisme J_n est pratiquement connu (Adams [1]) ; en particulier, pour $n \not\equiv -1 \mod 4$, J_n est injectif ; le groupe $\pi_{4k-1}(SO)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et le noyau de J_{4k-1} est le sous-groupe engendré par j_n ou $2j_n$, où j_n désigne le dénominateur de $b_k/4k$ (b_k est le k-ième nombre de Bernoulli). La suite exacte (3) se décompose ainsi :

(4) $\quad 0 \to \pi_{4k}(SO) \to \Pi_{4k} \to A_{4k} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{J} \Pi_{4k-1} \to A_{4k-1} \to 0$

(5) $\quad 0 \to \Pi_{4k-2} \to A_{4k-2} \to 0$

(6) $\quad 0 \to \pi_{4k-3}(SO) \to \Pi_{4k-3} \to A_{4k-3} \to 0$,

(où $\pi_{4k}(SO)$ et $\pi_{4k+1}(SO)$ sont les groupes 0 ou $\mathbb{Z}/2$ suivant que k est impair ou pair).

5.4 D'où pour la suite exacte (2) :

(7) $\quad 0 \to \theta_{4k} \to A_{4k} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \to \theta_{4k-1} \to A_{4k-1} \to 0 \qquad (k \neq 1)$

(8) $\quad 0 \to \theta_{4k-2} \to A_{4k-2} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/2 \to \theta_{4k-3} \to A_{4k-3} \to 0$.

L'image de l'application φ est calculée à l'aide de la formule de l'indice ([9], p. 85) : c'est le sous-groupe des multiples de $\sigma_k = 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)\ \mathrm{num}\left(\frac{4b_k}{k}\right)$. La suite (7) est donc entièrement connue. Dans la suite (8), l'application ψ (invariant de Kervaire) est nulle pour $k \neq 2^s$; elle est non nulle pour $k = 2^s$, $2 \leq s \leq 6$ (cf. [5]).

Remarquons que la finitude de Π_n (J.-P. Serre) implique la finitude de θ_n $(n \neq 3)$. Pour être complet, la suite (7) s'écrit, pour $k = 1$:

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to P_4 \to \theta_3 \to 0 .$$

On ne sait rien de P_4 ni de θ_3 .

6. La suite exacte des A-sphères

6.1 Soit A un anneau de fractions. On construit pour θ_n^A une suite exacte analogue à la suite (2). La notion de trivialisation d'un fibré est adaptée de la façon suivante. Soit $\ell : BSO \to BSO_A$ une localisation de BSO par rapport à la famille des nombres premiers non inversibles dans A . C'est une application telle que $\pi_n(BSO) \otimes A \to \pi_n(BSO_A) \otimes A$ et $\pi_n(BSO_A) \to \pi_n(BSO_A) \otimes A$ soient des isomorphismes et universelle pour ces propriétés. Cela existe d'après [19] puisque BSO est un espace simple. Soient E_A la fibre de l'application ℓ (considérée comme une fibration) et $p : E_A \to BSO$ l'application canonique. L'espace E_A est un disque d'homologie à coefficients dans A .

Soit γ^A l'image réciproque par p du SO-fibré universel de base BSO . Une E_A-orientation d'un SO-fibré ξ de base X est un SO-morphisme

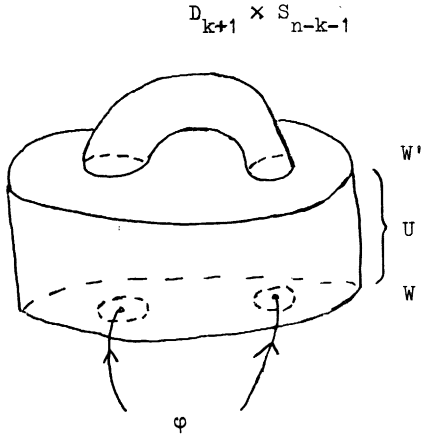
$\psi : \xi \to \gamma^A$, à homotopie fibrée près. Il revient au même de dire que c'est un relèvement $g : X \to E_A$ d'une application classifiante $f : X \to BSO$ de ξ , à homotopie de relèvement près. Nous appellerons A-normalisation d'une variété une E_A-orientation du fibré normal stable.

Définissons P_n^A comme ensemble des couples (W,u) d'une variété W de bord une A-sphère et d'une A-normalisation u de W , modulo cobordisme A-normalisé induisant un H_A-cobordisme au bord. On définit A_n^A de façon analogue et on obtient une suite exacte :

$$(2_A) \qquad \ldots \to A_n^A \xrightarrow{a} P_n^A \xrightarrow{b} \theta_{n-1}^A \xrightarrow{c} A_{n-1}^A \to \ldots$$

où l'on peut définir l'application c car, si V est une A-sphère, $V - \{x\}$ est un A-disque et tout fibré de base $V - \{x\}$ possède une unique A-trivialisation (théorie des obstructions).

6.2 Le calcul de P_n^A est analogue à celui de Kervaire-Milnor. Etant donné un représentant (W,u) d'un élément de P_n^A , faire une <u>modification sphérique</u> associée à un plongement $\varphi : S_k \to W$ consiste à découper dans W un voisinage tubulaire de $\varphi(S_k)$, isomorphe à $S_k \times D_{n-k}$, et à recoller le long de son bord un exemplaire de $D_{k+1} \times S_{n-k-1}$. La variété W' obtenue est cobordante à W par un cobordisme U trivial au bord. Pour obtenir un représentant du même élément de P_n^A , il faut pouvoir prolonger la A-normalisation u de W à U .



Lemme.- Tout élément de P^A_n possède un représentant (W,u) tel que $\widetilde{H}_i(W;A) = 0$ pour $i \leq [n/2] - 1$ (et même $\pi_1(W) = 0$ si $n \geq 4$).

On tue $\widetilde{H}_i$ par chirurgie, pour les i croissant. Supposons $\widetilde{H}_i(W;A) = 0$ pour $i < k$ et $\pi_1(W) = 0$, soit $x \in H_k(W;A)$, il existe une application $\varphi : S_k \to W$ telle que $\varphi_*([S_k]) = ax$, avec $a \in A^*$. Les hypothèses de A-normalisation permettent, quitte à changer a , de supposer que la normalisation induite sur S_k est triviale. Alors, φ est homotope à une immersion ayant un voisinage tubulaire trivial (classification des immersions [8]) et même à un plongement si $2k + 1 \leq n$. La chirurgie est alors possible et la A-normalisation se prolonge à U . On a $\widetilde{H}_i(W';A) = 0$ pour $i < k$, $H_k(W';A) = H_k(W;A)/(x)$.

THÉORÈME 3.- (a) Pour n impair, on a $P^A_n = 0$.

(b) Pour $k \neq 1$, P^A_{4k} est isomorphe à $W_q(A)$.

(c) Si $\frac{1}{2} \in A$, on a $P^A_{4k+2} = 0$.

(d) Si $\frac{1}{2} \notin A$, P^A_{4k+2} est isomorphe à $W_q(\mathbb{Z}/2)$.

(a) Soit $n = 2k + 1$. Il s'agit de tuer l'homologie $H_k(W;A)$. En cette dimension, la chirurgie est possible, mais en tuant un élément de $H_k(W)$, la chirurgie risque d'en introduire un nouveau. Un argument analogue à celui de Kervaire-Milnor (14 pages), montrant qu'on peut effectivement tuer $H_k(W)$, s'applique à coefficients dans A . Au bout de ces chirurgies, la variété obtenue est un A-disque, c'est-à-dire $0 \in P^A_n$.

(b) Soit $\tau : P^A_{4k} \to W_q(A)$ l'application qui, à (W,u) , associe la classe de la forme d'intersection sur $L_{2k}(W;A)$. On sait que τ est bien définie (n° 4.3) et c'est un homomorphisme. Le procédé de Whitney, applicable pour $4k \geq 5$, permet de trouver un plongement de S_k représentant un multiple ax $(a \in A^*)$ de $x \in H_{2k}(W;A)$ si et seulement si l'intersection $x.x$ est nulle. Supposons que W est $(k-1)$-connexe (à coefficients dans A) et que la forme d'intersection est stablement neutre. Après l'adjonction d'anses triviales, il existe une base de $L_{2k}(W;A)$ composée d'éléments x_i , y_i $(1 \leq i \leq r)$ tels que $x_i.y_j = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), $x_i.x_j = 0$, $y_i.y_j = 0$. Les chirur-

gies associées aux x_i tuent toute l'homologie de W . La surjectivité de τ est assurée par un exemple (même pour $k = 1$) .

(c) Mettons à part $k = 0$ qui se traite directement. Pour $4k + 2 \geq 5$, si une immersion de S_{k+1} dans W n'est pas régulièrement homotope à un plongement, son double l'est et on peut conclure.

(d) L'homomorphisme $\tau : P^A_{4k+2} \to W_q(\mathbb{Z}/2)$, analogue à l'invariant de Kervaire, est délicat à définir (cf. [7] et [15]). Il permet une démonstration analogue à celle de (b). La surjectivité de τ résulte de la surjectivité pour $A = \mathbb{Z}$.

Remarque.- Comparant les théorèmes 2 et 3, on voit que P_n et $P^{\mathbb{Z}}_n$ sont isomorphes pour $n \neq 4$. D'autre part A_n est égal à $A^{\mathbb{Z}}_n$ et la flèche $A_4 \to P_4$ est injective. Donc $\theta^{\mathbb{Z}}_n$ est isomorphe à θ_n pour $n \neq 3$. On a la suite exacte :

$$0 \to A^{\mathbb{Z}}_4 \to P^{\mathbb{Z}}_4 \to \theta^{\mathbb{Z}}_3 \to 0 \ ;$$

l'application $\tau : P^{\mathbb{Z}}_4 \to W_q(\mathbb{Z})$ est surjective ; d'après un théorème de Rohlin, l'image de $A^{\mathbb{Z}}_4$ est $2W_q(\mathbb{Z})$, donc $\theta^{\mathbb{Z}}_3$ a un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2$. Ceci ne donne aucun renseignement sur θ_3 .

6.3 PROPOSITION 3.- Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P^A_{4k} & \xrightarrow{b} & \theta^A_{4k-1} \\ \downarrow \tau & & \downarrow e \\ W_q(A) & \xrightarrow{\delta} & W(A, \mathbb{Z}) \end{array}$$

est anticommutatif.

L'application e associe à la classe d'une A-sphère V la classe de la forme d'enlacement. La prop. 3 résulte de la prop. 2.

Posons $\widetilde{P}^A_{4k} = \ker(\delta \circ \tau)$; $\widetilde{P}^A_{4k}$ est isomorphe à $W(\mathbb{Z})$ ou $W_q(\mathbb{Z})$. Posons $\widetilde{\theta}^A_{4k-1} = \ker(e)$. Pour $n \not\equiv 0 \mod 4$, posons $\widetilde{P}^A_n = P^A_n$, $\widetilde{\theta}^A_n = \theta^A_n$. Alors la suite exacte (2_A) induit une suite exacte :

$$(\widetilde{2}_A) \qquad \ldots \to A^A_n \to \widetilde{P}^A_n \to \widetilde{\theta}^A_n \to A^A_{n-1} \to \ldots \ .$$

6.4 THÉORÈME 4.- Soit A' le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ tel que $A \cap A' = \mathbb{Z}$, $A + A' = \mathbb{Q}$. Supposons $n \neq 3$.

(a) Les applications canoniques induisent des isomorphismes :

$$\tilde{\theta}_n^A \otimes A' \to \tilde{\theta}_n^{\mathbb{Q}} \otimes A' \quad \text{et} \quad \theta_n^{\mathbb{Z}} \otimes A \to \tilde{\theta}_n^A \otimes A .$$

(b) $\tilde{\theta}_n^A$ est isomorphe à $(\tilde{\theta}_n^{\mathbb{Q}} \otimes A') \oplus (\theta_n^{\mathbb{Z}} \otimes A)$.

L'assertion (b) résulte de (a) et du fait que $\tilde{\theta}_n^A$ est de torsion. En effet, $\tilde{\theta}_n^A \otimes \mathbb{Q} \simeq \theta_n^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ et $\theta_n^{\mathbb{Z}}$ est fini pour $n \neq 3$.

Pour démontrer (a), il suffit de montrer qu'on a des isomorphismes analogues pour $\tilde{P}_n$ et A_n . Pour $\tilde{P}_n$, cela résulte du calcul de $\tilde{P}_n$ (6.3 et th. 3). Pour A_n , on considère la deuxième suite exacte :

$$(3_A) \qquad \ldots \to \pi_n(SO) \otimes A \to \Omega_n^A \to A_n^A \to \pi_{n-1}(SO) \otimes A \to \ldots$$

où Ω_n^A désigne le groupe de cobordisme des variétés de dimension n munies d'une A-normalisation. On a évidemment des isomorphismes analogues à ceux de (a) pour $\pi_n(SO) \otimes A$. Il reste à démontrer la même chose pour Ω_n^A . Pour cela, on interprète Ω_n^A comme n-ième groupe d'homotopie stable de l'espace de Thom du fibré γ^A de base E_A ; on déduit alors le résultat des propriétés d'un espace localisé.

7. Calcul de $A_n^{\mathbb{Q}}$ et $\theta_n^{\mathbb{Q}}$

Les démonstrations sont longues, techniques et délicates. Indiquons sans démonstration quelques ingrédients.

7.1 Lemme.- Pour $n \not\equiv 0 \mod 4$, on a $\Omega_n^{SO,\mathbb{Q}} = 0$.

Le groupe $\Omega_n^{SO,\mathbb{Q}}$ est le groupe relatif des cobordismes Ω^{SO} et $\Omega^{\mathbb{Q}}$. On déduit du lemme que, pour $n \equiv 1, 2 \mod 4$, la flèche $\Omega_n^{\mathbb{Q}} \to \Omega_n^{SO}$ est un isomorphisme, puis que les applications $A_n^{\mathbb{Q}} \to \Omega_n^{SO}$ sont des isomorphismes car, dans la suite exacte $(3_{\mathbb{Q}})$, $\pi_n(SO) \otimes \mathbb{Q}$ est nul pour $n \not\equiv 3 \mod 4$. Enfin, d'après le th. 3 et la suite exacte $(2_{\mathbb{Q}})$, on a des isomorphismes $\theta_n^{\mathbb{Q}} \to \Omega_n^{SO}$ pour $n \equiv 1$ ou $2 \mod 4$.

7.2 Soit W une variété de dimension $4k$ sans bord. Soit $\pi(k)$ l'ensemble des partitions $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$ de l'entier k. A tout $\omega \in \pi(k)$, on associe le nombre de Pontrjagin $p_\omega(W) = (p_{\omega_1} \cup p_{\omega_2} \cup \ldots \cup p_{\omega_n})[W]$. On appelle nombres de Pontrjagin décomposables les nombres de Pontrjagin correspondant aux partitions autres que la partition triviale $\omega = (k)$.

Plus généralement, soit W une variété de dimension $4k$ à bord, dont le bord bW est $E_{\mathbb{Q}}$-orienté. Alors, les classes de Pontrjagin rationnelles $p_i \in H^{4i}(W;\mathbb{Q})$ se relèvent en classes $\bar{p}_i \in H^{4i}(W, bW;\mathbb{Q})$. Les nombres de Pontrjagin correspondants ne dépendent que de la classe de W dans $\Omega_{4k}^{SO,\mathbb{Q}}$. En réalité, il est inutile de supposer que bW soit $E_{\mathbb{Q}}$-orientable pour définir les nombres de Pontrjagin décomposables ; il suffit que les classes de Pontrjagin de bW soient de torsion. Ces nombres de Pontrjagin rationnels sont invariants par cobordisme induisant un $H_{\mathbb{Q}}$-cobordisme au bord.

Lemme.- Pour $k \neq 1$, on a une suite exacte :

$$(9) \qquad 0 \to A_{4k}^{\mathbb{Q}} \to \Omega_{4k}^{SO} \xrightarrow{P} \mathbb{Q}^{\pi(k)-1} \xrightarrow{\gamma} A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\theta} \Omega_{4k-1}^{SO} \to 0$$

où P est définie par les nombres de Pontrjagin décomposables.

En particulier, la torsion de $A_{4k}^{\mathbb{Q}}$ est isomorphe à la torsion de Ω_{4k}^{SO}.

7.3 Pour interpréter le calcul de $A_{4k-1}^{\mathbb{Q}}$ résultant de la suite exacte (9), on introduit les enlacements de Pontrjagin. Soit V une variété de dimension $4k-1$ dont les classes de Pontrjagin sont de torsion. Pour tout i, il existe $\bar{p}_i \in H^{4i-1}(V;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que $\delta(\bar{p}_i) = p_i$. Pour tout $j \neq 0$, $\bar{p}_i \cup p_j \in H^{4i+4j-1}(V;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est indépendant du choix de $\bar{p}_i$. On peut donc, pour toute partition non triviale $\omega \in \pi(k)$, définir un nombre

$$e_\omega(V) = (\bar{p}_{\omega_1} \cup p_{\omega_2} \cup \ldots \cup p_{\omega_n})[V] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qu'on appelle enlacement de Pontrjagin. Les enlacements de Pontrjagin sont invariants par un cobordisme dont les classes de Pontrjagin sont de torsion. Les nombres de Pontrjagin permettent de définir une application

$$e_P : A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\pi(k)-1}.$$

PROPOSITION 4.- Le diagramme suivant (où r est l'application canonique) est anti-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{SO,\mathbb{Q}}_{4k} & \longrightarrow & A^{\mathbb{Q}}_{4k-1} \\ \downarrow P & & \downarrow e_P \\ \mathbb{Q}^{\pi(k)-1} & \xrightarrow{r} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\pi(k)-1} \end{array} .$$

La démonstration, d'algèbre homologique, est analogue à celle du (b) de la prop. 2.

La suite exacte (9) donne la suite exacte :

$$(10) \qquad 0 \to \mathbb{Q}^{\pi(k)-1}/\mathcal{L} \xrightarrow{\gamma} A^{\mathbb{Q}}_{4k-1} \xrightarrow{\theta} \Omega^{SO}_{4k-1} \to 0$$

où $\mathcal{L}$ est le réseau des nombres de Pontrjagin décomposables des variétés de dimension $4k$.

7.4 PROPOSITION 5.- L'homomorphisme $\sigma : A^{\mathbb{Q}}_{4k} \to \mathbb{Z}$ défini par l'indice, a pour image le sous-groupe engendré par

$$\sigma^{\mathbb{Q}}_k = 2^{2k-v_2((2k)!)-1}(2^{2k-1}-1)\,\mathrm{num}\left(\frac{b_k}{k}\right) .$$

En particulier, l'application composée $A^{\mathbb{Q}}_{4k} \xrightarrow{a} P^{\mathbb{Q}}_{4k} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}$ n'est pas nulle ; son noyau est la torsion de $A^{\mathbb{Q}}_{4k}$, d'où un isomorphisme de $\theta^{\mathbb{Q}}_{4k}$ sur la torsion de Ω^{SO}_{4k} (n° 7.2).

De la prop. 5, de la suite exacte (9) et de (7.1), il résulte :

THÉORÈME 5.- L'homomorphisme $\theta^{\mathbb{Q}}_n \to \Omega^{SO}_n$ a pour image la torsion de Ω^{SO}_n . Pour $n \not\equiv -1 \pmod 4$, il est injectif. Pour $k \neq 1$, soit $\theta'^{\mathbb{Q}}_{4k-1}$ son noyau, on a la suite exacte :

$$0 \to b\widetilde{P}^{\mathbb{Q}}_{4k} \to \theta'^{\mathbb{Q}}_{4k-1} \to W(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Q}^{\pi(k)-1}/\mathcal{L} \to 0$$

et l'homomorphisme $\sigma : A^{\mathbb{Q}}_{4k} \to \mathbb{Z}$ induit (par passage aux conoyaux) un isomorphisme $b\widetilde{P}_{4k} \to \mathbb{Z}/(\sigma^{\mathbb{Q}}_k)$.

8. Remarques complémentaires

8.1 Le th. 1 (que nous n'avons pas démontré) se déduit des calculs esquissés ci-dessus. L'isomorphisme $T^{\mathbb{Q}}_{4k} \to W(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}^{\pi(k)-1}$ est défini par la forme d'intersection sur $L_{2k}(W ; \mathbb{Q})$ d'une part (4.2), et les nombres de Pontrjagin décomposables (7.2) d'autre part.

8.2 Soit $V \in \theta_7^{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{\theta}_7^{\mathbb{Q}}$. Soit W une variété dont V soit le bord. Les nombres de Pontrjagin décomposables de W sont, modulo $\mathcal{C}$, indépendants de W . D'autre part, pour une variété sans bord M de dimension 8 , on a la relation :

$$\sigma(M) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)[M] .$$

En chassant le dénominateur et en prenant les restes mod 7 , on élimine l'influence de p_2 . Ainsi, le reste mod 7 de $2p_1^2 - \sigma$ (pour W) ne dépend que de la classe de V dans $\theta_7^{\mathbb{Q}} \cap \widetilde{\theta}_7^{\mathbb{Q}}$. C'est cet invariant qu'a utilisé Milnor [13] pour prouver l'existence de 7 structures différentiables sur S_7 .

8.3 Une sphère d'homotopie est un bord. En dimension $4k - 1$, sa forme d'enlacement et ses enlacements de Pontrjagin sont nuls. L'application naturelle $\alpha : \theta_{4k-1} \to \theta^{\mathbb{Q}}_{4k-1}$ se factorise à travers $b\widetilde{P}_{4k}$ (th. 5). Dans [12] (resp. [3]), on décrit un générateur X (resp. Y) du groupe bP_{4k} (resp. $b\widetilde{P}^{\mathbb{Q}}_{4k}$) qui est cyclique d'ordre σ_k (resp. $\sigma^{\mathbb{Q}}_k$). On démontre que $\alpha(X) = 8Y$.

Soit V une $\mathbb{Q}$-sphère de dimension $4k - 1$ et Σ une sphère d'homotopie de même dimension. La somme connexe $V \# \Sigma$ est une $\mathbb{Q}$-sphère qui est PL-équivalente à V, mais pas $H_{\mathbb{Q}}$-cobordante à V si $\alpha(\Sigma) \neq 0$. On en déduit qu'il existe au moins s_k variétés distinctes qui sont PL-équivalentes à V , où $s_k = \sigma^{\mathbb{Q}}_k$ / p.g.c.d. $(\sigma^{\mathbb{Q}}_k , 8)$.

8.4 Soient p un nombre premier, T un difféomorphisme de S_n d'ordre p , et supposons que l'ensemble F des points fixes de T soit une variété. D'après la théorie de P. A. Smith [17], F est une sphère d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$, donc aussi à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et en particulier dans $\mathbb{Q}$. La classe caractéristique dans $W(\mathbb{Q} , \mathbb{Z})$ de la $\mathbb{Q}$-sphère F est un invariant modulo cobordisme de T (cf. [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ADAMS - On the group J(X) (IV), Topology, 4 (1966), 21-72.

[2] J. ALEXANDER, G. HAMRICK, J. VICK - Bilinear forms and cyclic group actions, Bull. A.M.S., 80 (1974), 730-734.

[3] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR, P. VOGEL - Λ-sphères, Ann. Sc. E.N.S., 7 (1974), p. 463-506.

[4] R. BOTT - The stable homotopy of classical groups, Ann. of Maths., 70 (1959), 313-337.

[5] W. BROWDER - On the Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, Ann. of Maths., 90 (1969), 157-186.

[6] W. BROWDER - Manifolds and homotopy theory, in Manifolds Amsterdam 1970, Lecture Notes in Math. 197, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[7] W. BROWDER - Surgery on simply connected manifolds, Ergebnisse, Springer-Verlag, 1972.

[8] M. HIRSCH - Immersions of manifolds, Trans. A.M.S., 93 (1959), 242-276.

[9] F. HIRZEBRUCH - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, Berlin, 1962.

[10] F. HIRZEBRUCH, W. NEUMANN, S. KOH - Differentiable manifolds and quadratic forms, Dekker, New York, 1971.

[11] B. KEREKJARTO - Vorlesungen über Topologie, Springer-Verlag, Berlin, 1923.

[12] M. KERVAIRE, J. MILNOR - Groups of homotopy spheres (I), Ann. of Maths., 77 (1963), 504-507.

[13] J. MILNOR - On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Maths., 64 (1956), 339-405.

[14] J. MILNOR, D. HUSEMOLLER - Symmetric bilinear forms, Ergebnisse, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[15] C. ROURKE, D. SULLIVAN - On the Kervaire obstruction, Ann. of Maths., 94 (1971), 397-413.

[16] S. SMALE - On the structure of manifolds, Amer. J. of Math., 84 (1962), 387-399.

[17] P. A. SMITH - Fixed points of periodic transformations, Appendix B in Algebraic Topology de S. Lefschetz, A.M.S., 1942.

[18] R. STONG - Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[19] D. SULLIVAN - Geometric topology, Part I : Localization, periodicity and Galois symmetry, Preprint available from M.I.T., Cambridge, Mass. U.S.A. Voir aussi : Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, Ann. of Maths, 100 (1974), 1-79.