SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS COMBES

Les facteurs de von Neumann de type III

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 461, p. 124-137

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__124_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 461-01
27e année, 1974/75, n° 461 Février 1975

LES FACTEURS DE VON NEUMANN DE TYPE III

[d'après A. CONNES]

par François COMBES

Introduction et rappels

Soit H un espace de Hilbert complexe. On appelle algèbre de von Neumann sur H, toute sous-algèbre involutive unifère M de $\mathcal{L}(H)$ égale à son bicommutant. J. Dixmier a montré que M est le dual d'un espace de Banach M_*, dit prédual de M, qui est unique à isomorphisme près. Dans tout cet exposé, c'est la topologie faible de dual $\sigma(M, M_*)$ que l'on considèrera sur M.

On appelle poids sur M^+ toute application φ de M^+ dans $[0, +\infty]$ qui est linéaire ($\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ en posant $0 . + \infty = 0$). Nous noterons $P(M)$ l'ensemble des poids sur M^+ qui sont s. c. i., semi-finis (la face des $x \in M^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$ est dense dans M^+) et fidèles ($\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Si $\varphi(xx^*) = \varphi(x^*x)$ pour tout $x \in M$, on dit que φ est une trace. Les poids s. c. i. finis (tels que $\varphi(x) < +\infty$ pour tout $x \in M^+$) sont les restrictions à M^+ des éléments de $(M_*)^+$.

Si M est commutative, il existe un espace mesuré (T, ψ) tel que M soit isomorphe à $L^\infty(T, \psi)$ [qui opère par multiplications sur $L^2(T, \psi)$ et dont le prédual est $L^1(T, \psi)$]. Si φ est une autre mesure σ-finie sur l'espace mesurable T, absolument continue par rapport à ψ, l'application $x \longmapsto \int_T x(t)\, d\varphi(t)$ est un poids semi-fini et s. c. i. sur M^+. Il est fidèle si et seulement si φ est équivalente à ψ. Réciproquement, tout élément de $P(M)$ s'obtient ainsi.

A l'opposé du cas commutatif, M est un facteur si son centre $Z(M)$ se réduit aux scalaires. Les facteurs étaient classés par von Neumann de la manière suivante. Si M est isomorphe à $\mathcal{L}(K)$ pour un certain espace de Hilbert K,

on dit qu'il est de type I ou discret. La trace canonique $tr : x \mapsto \sum_{i\in I} (xe_i|e_i)$, où $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de K, est un poids qui joue un rôle important. Les facteurs qui ne sont pas de type I sont dits continus : si $P(M)$ contient une trace, M est alors de type II et si $P(M)$ n'en contient pas, M est de type III.

1. Equivalence extérieure pour certaines représentations de groupes

1.1 Notations. Dans cet exposé M est une algèbre involutive unifère sur $\mathbf{C}$. On notera :

$Z(M)$ le centre de M,

$I(M)$ le groupe des éléments unitaires de M (qui vérifient $u^*u = uu^* = 1$),

Aut M le groupe des automorphismes involutifs de M,

Int M le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs Ad $u : x \mapsto uxu^*$ définis par les éléments de $I(M)$ [Pour $\theta \in$ Aut M, on a $\theta \circ (\text{Ad } u) \circ \theta^{-1} = \text{Ad } \theta(u)$.],

Out M le groupe quotient Aut M / Int M,

ε l'homomorphisme canonique Aut $M \to$ Out M.

Par ailleurs, nous considèrerons un groupe G et nous noterons

Act(G,M) l'ensemble des représentations de G sur l'espace vectoriel M, à valeurs dans Aut M (actions de G par automorphismes).

Soit $U \in \text{Act}(G,M)$. On notera M^U la sous-algèbre involutive des points de M fixes par U_t pour tout $t \in G$.

Enfin, pour tout entier $n \geq 2$, nous aurons à utiliser l'algèbre involutive F_n des matrices carrées complexes de type n, n équipée d'une unité matricielle (e_{ij}) [avec $e_{ij}^* = e_{ji}$ et $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$].

1.2 Remarque.- Soient $U, V \in \text{Act}(G,M)$. On a $\varepsilon \circ U = \varepsilon \circ V$ si et seulement si pour tout $t \in G$, on peut choisir $u_t \in I(M)$ tel que $V_t = \text{Ad } u_t \circ U_t$. Avec un tel choix de $u : t \mapsto u_t$, et du fait que U et V sont des homomorphismes de groupes $v_{t,s} = u_t U_t(u_s) u_{t+s}^{-1}$ est un unitaire de $Z(M)$ pour tous $t, s \in G$. Autrement dit, $t \mapsto u_t$ est un 1-cocycle modulo le groupe $I(Z(M))$, pour

l'action de U sur $I(M)$. Notons que $(t,s) \mapsto v_{t,s}$ est un 2-cocycle de la cohomologie abélienne due à l'action de U sur $I(Z(M))$. Donc, si le groupe $H^2(G, I(Z(M)))$ est trivial, on aura $v = dw$ et $t \mapsto v_t w_t^{-1}$ sera exactement un 1-cocycle, d'où la notion suivante

1.3 DÉFINITION.- On dira que deux éléments U et V de $Act(G,M)$ sont extérieurement équivalents, et on écrira $U \sim V$ s'il existe un 1-cocycle u pour l'action de U dans $I(M)$ tel que $V_t = (Ad\ u_t) \circ U_t$ pour tout $t \in G$, soit

(1) $\qquad V_t(x) = u_t\, U_t(x)\, u_t^* \qquad$ pour tout $t \in G$ et tout $x \in M$.

On dira que le cocycle u relie U à V . Sur $Act(G,M)$ on obtient ainsi une relation d'équivalence. (1)

1.4 PROPOSITION.- Soient U^1 , $U^2 \in Act(G,M)$. On a $U_1 \sim U_2$ si et seulement s'il existe $W \in Act(G, M \otimes F_2)$ tel que pour tous $t \in G$ et $x \in M$

(2) $\qquad W_t(x \otimes e_{11}) = U_t^1(x) \otimes e_{11}$, $\qquad W_t(x \otimes e_{22}) = U_t^2(x) \otimes e_{22}$.

De plus, si cette condition est vérifiée, pour tout $t \in G$, il existe $u_t \in I(M)$ unique tel que $W_t(I \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$ et $u : t \mapsto u_t$ est un 1-cocycle pour l'action de U^1 sur $I(M)$, qui relie U^1 à U^2 .

Si $U^1 \sim U^2$, soit u un 1-cocycle pour U^1 qui relie U^1 à U^2 . Comme (e_{ij}) est une base de F_2 , tout $x \in M \otimes F_2$ a une écriture unique de la forme $x = \sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ où $x_{ij} \in M$. Posons

$W_t(x) = \begin{pmatrix} U_t^1(x_{11}) & U_t^1(x_{12})u_t^* \\ u_t\, U_t^1(x_{21}) & u_t\, U_t^1(x_{22})u_t^* \end{pmatrix}$. On vérifie facilement par le calcul que $W : t \mapsto W_t$ est élément de $Act(G, M \otimes F_2)$ et qu'il vérifie (2).

Réciproquement, soit $W \in Act(G, M \otimes F_2)$ vérifiant (2). Alors $E_{11} = I \otimes e_{11} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = I \otimes e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ sont fixes par $W(G)$. Comme $E_{21} = I \otimes e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$ vérifie les relations

$$E_{21}\, E_{12} = E_{22} \quad , \quad E_{12}\, E_{21} = E_{11} \quad , \quad E_{21}^* = E_{12}$$
$$E_{21}\, E_{11} = E_{12} \quad , \quad E_{22}\, E_{21} = E_{21} \quad ,$$

$a_t = W_t(E_{21})$ vérifie $a_t a_t^* = E_{22}$, $a_t^* a_t = E_{11}$, et a_t est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix} = u_t \otimes e_{21}$ avec $u_t u_t^* = I = u_t^* u_t$. De plus, $u : t \mapsto u_t$ est un 1-cocycle pour U^1 car

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{t+s} & 0 \end{pmatrix} = W_{t+s}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = W_t W_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = W_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_s & 0 \end{pmatrix} =$$

$$W_t\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_t^1(u_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t U_t^1(u_s) & 0 \end{pmatrix} . \quad (2)$$

1.5 Remarques.- a) La cohomologie à coefficients dans $I(M)$ associée ici à $U \in \mathrm{Act}(G,M)$ est non abélienne. Notons que u reliant U à V est un cobord $du_o : s \mapsto u_o^{-1} U_s(u_o)$ lorsque $V_s = (\mathrm{Ad}\, u_o^*) \circ U_s \circ (\mathrm{Ad}\, u_o)$, $\forall\, s \in G$.

b) Dans la suite, G et M seront topologiques. Bien que nous conservions la notation $\mathrm{Act}(G,M)$, nous ne considèrerons que les homomorphismes de G dans $\mathrm{Aut}\, M$ qui sont continus quand $\mathrm{Aut}\, M$ est muni de la topologie de la convergence simple sur M , et nous restreindrons la relation $U \sim V$ en supposant que U est relié à V par un cocycle continu. Les résultats du § 1 sont encore valables.

2. Dérivée de Radon-Nikodym et invariant $T(M)$

Soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids sur M^+ , élément de $P(M)$. Soit $\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M \,;\, \varphi(x^*x) < +\infty\}$. Alors $\mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est une algèbre hilbertienne à gauche (si $M = L^\infty(T,\varphi)$, on a $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi = L^\infty(T,\varphi) \cap L^2(T,\varphi)$; si $M = \mathcal{L}(H)$ et si φ est la trace canonique, on obtient l'algèbre des opérateurs de Hilbert-Schmidt).

La théorie de Tomita associe à $\mathfrak{A}_\varphi$, donc à φ , un élément σ^φ de $\mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$ appelé groupe modulaire de φ , caractérisé par la condition :

(K.M.S.) φ est invariant par σ^φ et pour tous x , $y \in \mathfrak{A}_\varphi$, il existe une fonction $F_{x,y}$ continue et bornée sur la bande $B = \{z \in \mathbf{C} \,;\, 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1\}$, analytique à l'intérieur de B et telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_{x,y}(t) = \varphi[\,\sigma_t^{\varphi}(x)y] \quad , \qquad F_{x,y}(t+i) = \varphi[y\,\sigma_t^{\varphi}(x)] \ .$$

2.1 Lemme.- Supposons que $\varphi \in P(M)$ soit fini sur M^+ et soit $x \in M$. Alors

$$\sigma_t^{\varphi}(x) = x \ , \ \forall\, t \in \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(xy) = \varphi(yx) \ , \ \forall\, y \in M \ .$$

Si $\sigma_t^{\varphi}(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors $F_{x,y}$ est constante sur $\mathbf{R}$, donc sur B , et on a $F(i) = F(0)$, soit $\varphi(xy) = \varphi(yx)$, $\forall\, y \in M$.

Réciproquement, si $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tout $y \in M$, alors $F_{y,x}(t+i) = F_{y,x}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $F_{y,x}$ se prolonge par périodicité en une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbf{C}$. D'après le théorème de Liouville, elle est constante. On a donc $F_{y,x}(t) = F_{y,x}(0)$, soit $\varphi[\,\sigma_t^{\varphi}(y)x] = \varphi[y\,\sigma_{-t}^{\varphi}(x)] = \varphi(yx)$. En prenant $y = (\,\sigma_{-t}^{\varphi}(x) - x)^*$, la fidélité de φ donne $\sigma_{-t}^{\varphi}(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

2.2 COROLLAIRE.- φ est une trace si et seulement si $\sigma_t^{\varphi} = I$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(En effet, φ est une trace lorsque $\varphi(yx) = \varphi(xy)$ pour tous $x, y \in M$.)

Précisons que ce corollaire reste valable si $\varphi \in P(M)$ n'est pas fini.

2.3 Lemme.- Soient N une sous-algèbre involutive fermée de M et $\varphi \in P(M)$. Si $\varphi|N^+$ est semi-fini (élément de $P(N)$ donc) et si $\sigma_t^{\varphi}(N) = N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors $t \longmapsto \sigma_t^{\varphi}|N$ est le groupe modulaire de $\varphi|N^+$ sur N .

En effet, $t \longmapsto \sigma_t^{\varphi}|N$ vérifie la condition (K.M.S.) sur N pour $\varphi|N^+$.

2.4 THÉORÈME.- Si φ décrit $P(M)$, alors σ^{φ} décrit toute une classe de conjugaison extérieure dans $\mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$. (Voir [1], lemme 1.2.2 et théorème 1.2.4.)

a) Montrons d'abord que $\sigma^{\varphi} \sim \sigma^{\psi}$ pour tout couple φ, ψ d'éléments de $P(M)$. Pour simplifier légèrement, supposons φ et ψ finis. D'après 1.4, il suffit de construire $W \in \mathrm{Act}(\mathbf{R}, M \otimes F_2)$ telle que pour $x \in M$ et $t \in \mathbf{R}$

$$(3) \qquad W_t(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^{\varphi}(x) \otimes e_{11} \quad , \quad W_t(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^{\psi}(x) \otimes e_{22} \ .$$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \Sigma\, x_{ij} \otimes e_{ij} \in M \otimes F_2$ positif. On a $x_{11} \geq 0$,

$x_{22} \geq 0$, donc $x \mapsto \theta(x) = \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22})$ est un élément de $P(M \otimes F_2)$.

Avec $E_{11} = I \otimes e_{11}$, on a

$$E_{11}\, x = x_{11} \otimes e_{11} + x_{12} \otimes e_{12} \quad , \quad x\, E_{11} = x_{11} \otimes e_{11} + x_{21} \otimes e_{21}$$

d'où $\theta(E_{11}\, x) = \varphi(x_{11}) = \theta(x\, E_{11})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le lemme 2.1 donne $\sigma_t^{\theta}(E_{11}) = E_{11}$, et de même $\sigma_t^{\theta}(E_{22}) = E_{22}$. Le lemme 2.3 montre que (3) est vérifié avec $W = \sigma^{\theta}$.

b) La surjectivité de $\varphi \mapsto \sigma^{\varphi}$ est plus difficile à établir. Donnons une idée de la démonstration. Soient $U \in \mathrm{Act}(\mathbb{R}, M)$ et $\varphi \in P(M)$ tels que $U \sim \sigma^{\varphi}$ et soit u un 1-cocycle pour σ^{φ} tel que

$$U_t(x) = u_t\, \sigma_t^{\varphi}(x) u_t^* \qquad \text{pour } x \in M \text{ et } t \in \mathbb{R} .$$

Sur $K = L^2(\mathbb{R})$, le groupe à un paramètre des translations a un générateur infinitésimal h auto-adjoint non borné (dérivation des fonctions). Sur $B = \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, le poids $\omega : x \mapsto \mathrm{tr}[(\exp h)x]$ est élément de $P(B)$. Posons $\bar{\omega} = \varphi \otimes \omega$ sur $M \otimes B$. Sur l'espace hilbertien $H \otimes L^2(\mathbb{R}) \simeq L^2_H(\mathbb{R})$ de $M \otimes B$ l'opérateur de multiplication par $u : t \mapsto u_t$ est un unitaire v et $t \mapsto u_t \otimes I$ est le 1-cobord $t \mapsto v\, \sigma_t^{\bar{\omega}}(v^*)$. Considérons alors le poids $\psi_o : x \mapsto \bar{\omega}(v^* x\, v)$. Pour une "restriction" convenable $\psi : x \mapsto \psi_o(x \otimes a)$ de ψ_o à M^+ , on obtient $\sigma^{\psi} \sim \sigma^{\varphi}$ avec σ^{φ} relié à σ^{ψ} par u , d'où $\sigma^{\psi} = U$.

2.5 DÉFINITIONS.- Le cocycle u tel que $\sigma_t^{\theta}(I \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, canoniquement défini par φ et ψ et reliant σ^{φ} à σ^{ψ} (voir 1.4) est appelé la dérivée de Radon-Nikodym de ψ par rapport à φ et se note $(D\psi : D\varphi)$.

Quand φ décrit $P(M)$, la classe d'équivalence extérieure Mod M décrite par σ^{φ} dans $\mathrm{Act}(\mathbb{R}, M)$ est canoniquement attachée à M . Si α est un isomorphisme de M sur N , il transporte $P(M)$ sur $P(N)$ et Mod M sur Mod N car

$$\sigma_t^{\varphi} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \sigma_t^{\varphi} \circ \alpha^{-1} \quad , \quad \forall\, t \in \mathbb{R} . \tag{4}$$

Le noyau $T(M)$ de l'homomorphisme $\delta_M = \varepsilon \circ \sigma^{\varphi}$ de $\mathbb{R}$ dans Out M défini par cette classe, est donc un sous-groupe de $\mathbb{R}$, invariant algébrique de M .

2.6 Quelques propriétés de la dérivée de Radon-Nikodym, de δ_M et $T(M)$

1) $\sigma^{\varphi} = \sigma^{\psi} \Leftrightarrow \psi = \varphi(h\cdot)$ avec h auto-adjoint positif affilié à $Z(M)$. ([3])

2) En particulier, si $M = L^{\infty}(T,\varphi)$, soit $\psi \in P(M)$ une mesure équivalente à φ et soit $h = \frac{d\psi}{d\varphi}$ la dérivée de Radon-Nikodym usuelle. Alors $(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) $(D\varphi : D\psi)_t = (D\psi : D\varphi)_t^{-1}$ (cf. démonstration du théorème 2.4).

4) Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in P(M)$ alors $(D\varphi_3 : D\varphi_1)_t = (D\varphi_3 : D\varphi_2)_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (sur $M \otimes F_3$, considérer $\theta(x) = \Sigma \varphi_i(x_{ii})$).

5) $\delta_M = \varepsilon \circ \sigma^{\varphi}$ prend ses valeurs dans le centre de Out M (d'après (4)).

6) Si $P(M)$ contient une trace φ (M de type I ou II), on a $\sigma_t^{\varphi} = I$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (corollaire 2.2), d'où $\delta_M(t) = I$. L'invariant $T(M) = \mathbf{R}$ est peu intéressant.

7) Réciproquement, supposons $\delta_M \equiv I$ (soit $T(M) = \mathbf{R}$) et soit $\psi \in P(M)$. Supposons que M opère sur un espace hilbertien séparable H. Un théorème de Kallmann (basé sur un théorème de sections boréliennes de J. Dixmier) donne un groupe à un paramètre continu $u : t \mapsto u_t = h^{it}$ d'unitaires de M tels que $\sigma_t^{\psi}(x) = u_t x u_t^*$ pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in M$. Alors $\varphi = \psi(h^{-1}\cdot)$ est une trace (car $\sigma^{\varphi} \equiv I$). Donc si H est séparable

$$\delta_M \equiv I \Leftrightarrow T(M) = \mathbf{R} \Leftrightarrow \text{type}(M) = I \text{ ou } II .$$

En particulier, si M est de type III, le centre de Out M est non trivial.

8) $T(M \otimes N) = T(M) \cap T(N)$. En effet, si $\varphi \in P(M)$ et $\psi \in P(N)$, alors $\sigma_t^{\varphi\otimes\psi} = \sigma_t^{\varphi} \otimes \sigma_t^{\psi}$ est intérieur si et seulement si σ_t^{φ} et σ_t^{ψ} le sont.

2.7 Calcul de $T(M)$ pour les facteurs d'Araki-Woods et de Powers

a) Soit (n_k) une suite d'entiers ≥ 2. Pour tout k, soit $a_k \in F_{n_k}$ positif dont les valeurs propres $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n_k}$ ont pour somme 1. Pour $x \in F_{n_k}$, posons $\varphi_k(x) = \mathrm{tr}(xa_k)$ et soit $M = \bigotimes_{k=0}^{\infty} (F_{n_k}, \varphi_k)$.

b) En particulier, pour tout $\lambda > 0$, notons R_λ le facteur obtenu en prenant $n_k = 2$ et $\lambda_{k,1} = (1+\lambda)^{-1}$, $\lambda_{k,2} = \lambda(1+\lambda)^{-1}$ pour tout k .

THÉORÈME.- Soit M le facteur d'Araki-Woods décrit en a). Alors

(i) $T_o \in T(M) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p}^{1+iT_o}|) < +\infty$.

(ii) L'invariant $\rho(M) = \{\lambda \; ; \; M \otimes R_\lambda \simeq R_\lambda\}$ d'Araki-Woods est image de $T(M)$ par l'application $T \mapsto \exp(-2\pi/T)$.

On retrouve donc la classification donnée par $\rho(M)$. En particulier, on a $T(R_\lambda) = \mathbb{Z}a$ avec $a = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Donc pour $\lambda \in]0,1[$, les facteurs R_λ sont non isomorphes (et de type III puisque $T(M) \neq R$).

COROLLAIRE.- Soit $U(G_2)$ le facteur engendré par la représentation régulière gauche du groupe libre à deux générateurs G_2 . Les facteurs $R_\lambda \otimes U(G_2)$ forment une famille de facteurs de type III, non hyperfinis et non isomorphes (pour $\lambda \in]0,1[$).

Comme G_2 est unimodulaire, $N = U(G_2)$ possède une trace donc $T(N) = R$. D'après 2.6,8), on a $T(R_\lambda \otimes N) = T(R_\lambda)$. On sait par ailleurs que $R_\lambda \otimes U(G_2)$ est non hyperfini (et de type III car $T(R_\lambda \otimes N) \neq R$).

2.8 Calcul de $T(M)$ pour les facteurs de Krieger en théorie ergodique

Soient μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable T et G un groupe de bijections bi-mesurables de T sur T tel que $g\cdot\mu$ soit équivalente à μ , pour tout $g \in G$. On suppose que G opère presque librement dans T . Soit M l'algèbre de von Neumann produit croisé de $L^\infty(T,\mu)$ par G .

THÉORÈME.- (i) $T(M) = \{T_o \in R \; ; \; \exists\, \nu \sim \mu \, , \, [d\nu(g\cdot t)/d\nu(t)]^{iT_o} = 1 \, , \, \forall\, t \, , \, \forall\, g\}$.

(ii) L'invariant $\rho(M)$ de Krieger est image de $T(M)$ par $t \mapsto \exp(-2\pi/t)$.

3. Invariant $\Gamma(M)$

Soient M un facteur, G un groupe localement compact commutatif, c une classe d'équivalence extérieure dans $\mathrm{Act}(G,M)$. Outre le noyau T_c de l'homo-

morphisme $\delta_c = \varepsilon \circ U$ (où $U \in c$), on associe à c la partie $\Gamma_c = \bigcap_{V \in c} \mathrm{Sp}\, V$ du groupe dual $\hat{G}$ de G.

Le support spectral $\mathrm{Sp}\cdot V$ de V est l'ensemble des caractères du spectre $\hat{G}$ de l'algèbre de Banach commutative $L^1(G)$ nuls sur le noyau de l'homomorphisme $\bar{V} : f \mapsto \int_G f(t)\, V_t\, dt$ de $L^1(G)$ dans $\mathcal{L}(M)$ obtenu par intégration de V (cette intégration est possible car M dual de M_* est quasi-complet).

3.1 THÉORÈME.- Γ_c est un sous-groupe fermé non vide de $\hat{G}$ inclus dans l'orthogonal du sous-groupe T_c de G. Pour tout représentant U de c, on a

$$\Gamma_c = \bigcap_{e \in P} \mathrm{Sp}\, U^e = \bigcap_{e \in Q} \mathrm{Sp}\, U^e ,$$

où l'on note P (resp. Q) l'ensemble des projecteurs orthogonaux éléments de M^U (resp. du centre de M^U) et U^e l'action $t \mapsto U_t | eMe$ de G sur la sous-algèbre globalement invariante eMe de M.

La démonstration difficile de cet énoncé occupe un chapitre de la thèse de A. Connes.

3.2 Propriétés de $\mathrm{Sp}\, U$ et de Γ_c

1) $\mathrm{Sp}\, U$ est symétrique par rapport à zéro qu'il contient.

2) $\Gamma_c + \mathrm{Sp}\, U \subset \mathrm{Sp}\, U$ pour tout $U \in c$ (d'où $\Gamma_c + \Gamma_c = \Gamma_c$ et le fait que Γ_c est un sous-groupe de $\hat{G}$).

3) Si $[\mathrm{Sp}\, U]/\Gamma_c$ est compact, Γ_c est exactement l'orthogonal de T_c.

4) Si $\hat{G}/\Gamma_c$ est compact, il existe $V \in c$ tel que $\mathrm{Sp}\, V = \Gamma_c$.

3.3 DÉFINITIONS.- Notons $\Gamma(M)$ le sous-groupe fermé Γ_c de R associé à la classe d'équivalence extérieure modulaire c dans $\mathrm{Act}(R, M)$. C'est un invariant algébrique pour le facteur M.

Si $P(M)$ contient une trace φ (type I ou II), on a $\sigma_t^\varphi = I$ pour tout $t \in R$, d'où $\mathrm{Sp}\, \sigma^\varphi = \{0\}$. Dans ce cas, $\Gamma(M) = \{0\}$ et $T(M) = R$ sont sans intérêt.

Supposons désormais que M est de type III. Selon que $\Gamma(M) = \{0\}$, ou $\mathbb{Z}\alpha$ avec $\alpha > 0$, ou $\mathbb{R}$, on dit que M est de type III_0 , ou III_λ avec $\lambda = e^{-2\pi\alpha} \in]0,1[$, ou III_1 . Par ailleurs, A. Connes considère deux propriétés algébriquement invariantes. On dit que M est plein si Int M est fermé dans Aut M . On dit que M est presque-périodique si l'ensemble $Pp(M)$ des $\varphi \in P(M)$ tels que $\sigma^\varphi(R)$ soit relativement compact dans Aut M est non vide.

3.4 Propriétés des facteurs des divers types

1) La relation $\Gamma(M) \subset T(M)^\perp$ montre que si $\Gamma(M) = \mathbb{R}$ (type III_1), alors $T(M) = \{0\}$ ne permet pas de classer les facteurs.

2) De même, si $T(M)$ est partout dense dans $\mathbb{R}$, alors $\Gamma(M) = \{0\}$ (type III_0). Pour tout sous-groupe dénombrable G de $\mathbb{R}$, A. Connes construit un facteur dont c'est l'invariant $T(M)$ de la façon suivante. Soient N un facteur de type III_1 sur un espace de Hilbert séparable et $\varphi \in P(N)$. On a $T(N) = \{0\}$ d'après 1). On restreint à G l'action σ^φ de $\mathbb{R}$ sur N . Alors le produit croisé discret $M = W^*(G,N)$ convient. Si N est hyperfini, alors M l'est aussi. D'où une infinité non dénombrable de facteurs hyperfinis de type III_0 . Signalons qu'un facteur de type III_0 n'est jamais plein et qu'il est toujours presque-périodique.

3) Si M est de type III_λ avec $0 < \lambda < 1$, alors $\Gamma(M) = \mathbb{Z}\alpha$ et 3.2,3) montre que $T(M) = \mathbb{Z}T_0$ avec $T_0 = -2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Pour tout $\lambda \in]0,1[$, le facteur R_λ de Powers est de type III_λ . De même pour certains facteurs P_λ construits par Pukanszky à partir du groupe libre G_2 à deux générateurs. Notons que P_λ est plein et que R_λ ne l'est pas.

4) Pour les facteurs d'Araki-Woods et pour les facteurs de Krieger, le ratio-set $r(M)$, deuxième invariant considéré par ces auteurs, est la fermeture de l'image de $\Gamma(M)$ par $x \mapsto \exp(-2\pi x)$. La classification de A. Connes redonne donc celle qui existait pour ces exemples.

5) Pour les facteurs de type III_1 , les invariants $T(M) = \{0\}$ et $\Gamma(M) = \mathbb{R}$ sont sans effet classifiant. A. Connes pousse son analyse en construisant un facteur de type III_1 non presque périodique (les facteurs de type I, II, III_0, III_λ pour $0 < \lambda < 1$ étant presque périodiques, c'est le seul facteur non presque périodique connu). Par ailleurs, pour les facteurs presque périodiques et pleins

sur un espace de Hilbert séparable, il introduit l'invariant $\Gamma d(M)$ suivant. Notons $\mathbb{B}$ le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$. Si $\varphi \in Pp(M)$, il existe $\bar{\sigma}^{\varphi} \in Act(\mathbb{B},M)$ unique prolongeant σ^{φ}. Si φ décrit $Pp(M)$, alors $\bar{\sigma}^{\varphi}$ décrit une classe d'équivalence extérieure c dans $Act(\mathbb{B},M)$. Alors $\Gamma d(M) = \Gamma_c$ est un sous-groupe discret de $\hat{\mathbb{B}} = \mathbb{R}$, dénombrable et tel que $\Gamma(M) = \overline{\Gamma d(M)}$.

Pour tout sous-groupe dénombrable partout dense de $\mathbb{R}$, A. Connes construit un facteur plein et presque périodique M dont c'est l'invariant $\Gamma d(M)$, d'où une infinité non dénombrable de facteurs de type III_1 non isomorphes.

6) Soit M un facteur plein, presque périodique de type III_1. Alors $\delta_M(\mathbb{R})$ est distinct du centre Z de Out M. En effet, si $\varphi \in Pp(M)$, $\varepsilon \circ \bar{\sigma}^{\varphi}(\mathbb{B})$ est un sous-groupe compact de Z, car Out M est séparé, et contenant $\delta_M(\mathbb{R})$. Si on avait $\delta_M(\mathbb{R}) = Z$, on voit que $\delta_M(\mathbb{R})$ serait compact et que $T(M)$ serait $\neq \{0\}$.

4. Structure des facteurs de type III

Depuis von Neumann, la théorie ergodique a donné des facteurs de tous les types connus, soit comme produit croisé $W^*(L^\infty(T,\mu),\theta)$, où θ est un automorphisme de $L^\infty(T,\mu)$ induit par un automorphisme de (T,μ) (bijection bimesurable de T transformant μ en une mesure équivalente), soit comme produit croisé continu $W^*(L^\infty(T,\mu),U)$, où $U \in Act(\mathbb{R}, L^\infty(T,\mu))$ est induit par un flot continu d'automorphismes de (T,μ).

En sens inverse, A. Connes (resp. M. Takesaki) décompose tout facteur de type III_λ avec $\lambda < 1$ (resp. de type III) comme produit croisé $W^*(N,\theta)$ avec $\theta \in Aut\ M$ (resp. $W^*(N,U)$ avec $U \in Act(\mathbb{R}, N)$) et N de type II.

4.1 THÉORÈME (A. Connes).- *Soit M un facteur de type III_λ $(0 < \lambda < 1)$.*

(i) Il existe $\varphi \in P(M)$ non fini tel que l'algèbre N des points fixes pour σ^{φ} dans M soit un facteur et tel que $\varphi_o = \varphi|N^+$ soit une trace semi-finie.

(ii) Si ψ est un autre tel élément de $P(M)$, pour tout $\alpha \in \Gamma(M)$, il existe $u \in I(M)$ tel que $\psi(x) = e^{2\pi\alpha}\varphi(uxu^*)$ pour tout $x \in M$.

(iii) Prenant $\alpha = \text{Log } \lambda / 2\pi$ et $\psi = \varphi$, alors $\theta = \text{Ad } u|N$ est un automorphisme de N qui multiplie la trace φ_o par λ.

(iv) M est isomorphe au produit croisé $W^*(N,\theta)$ et N est de type II muni de la trace φ_o non finie.

(v) Soit N_1 un facteur de type II muni d'une trace non finie et soit $\theta_1 \in \text{Aut } N_1$. Pour que $W^*(N_1,\theta_1)$ soit isomorphe à M, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme J de N_1 sur N tel que l'automorphisme $J^{-1}\theta_1 J\theta^{-1}$ de N soit intérieur.

4.2 Remarques.- a) Evidemment, si N est un facteur de type II muni d'une trace non finie φ et si $\theta \in \text{Aut } N$ multiplie φ par un scalaire $\lambda \in]0,1[$, alors $W^*(N,\theta)$ est de type III_λ.

b) A. Connes caractérise de manière voisine les facteurs de type III_0 comme produits croisés $W^*(N,\theta)$ où N est une algèbre de von Neumann à centre diffus, de type II, munie d'une trace $\tau \in \underset{\cdot}{P}(N)$ et où $\theta \in \text{Aut } N$ est tel qu'il existe $\alpha < 1$ vérifiant $\tau(\theta(x)) \leq \alpha\tau(x)$ pour tout $x \in N^+$.

4.3 THÉORÈME (M. Takesaki).- Soit M une algèbre de von Neumann de type III.
(i) Il existe une algèbre de von Neumann N de type II, $U \in \text{Act}(R, N)$, une trace $\varphi \in P(N)$ vérifiant $\varphi \circ U_t = e^{-t}\varphi$ pour tout $t \in R$, tels que M soit isomorphe à $W^*(N,U)$.

(ii) Soient N_1, φ_1, U^1 comme ci-dessus. Pour que $W^*(N_1,U^1)$ soit isomorphe à M, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme J de N sur N_1 tel que $t \mapsto J \circ U_t \circ J^{-1}$ soit extérieurement équivalent à U_1.

4.4 Remarques (Quelques résultats de W. Krieger).- 1) Pour $i = 1, 2$, soient (T_i, μ_i) un espace mesuré et θ_i un automorphisme ergodique de (T_i, μ_i). Pour que les deux facteurs $W^*(L^\infty(T_i, \mu_i), \theta_i)$ soient isomorphes, il faut et il suffit que θ_1 et θ_2 soient faiblement équivalents (autrement dit, qu'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés α de (T_1,μ_1) sur (T_2,μ_2) échangeant pour presque tout $x \in T_1$ les orbites $\{\theta_1^n \cdot x ; n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\theta_2^n \cdot \alpha(x) ; n \in \mathbb{Z}\}$).

2) Les classes d'équivalence faible de systèmes dynamiques (T,μ,θ) de type III_0 sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de flots ergodiques, apériodiques et conservatifs sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, résultat à rapprocher des théorèmes 4.1 et 4.3.

(^{1}) Rappelons que $U \sim V$ signifie que les deux extensions du groupe $I(M)$ par G obtenues en effectuant les produits semi-directs $I(M) \times_U G$ et $I(M) \times_V G$ sont congrues.

(^{2}) En appliquant W_t à $x \otimes e_{22} = (I \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(I \otimes e_{12})$, on voit que u relie U_1 à U_2.

(^{3}) On a alors $(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES - Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., t. 6, 1973, p. 133-252.

[2] A. CONNES - Almost periodic states and factors of type III_1, J. Funct. Anal., t. 6, 1974, p. 415-445.

[3] W. KRIEGER - On ergodic flows and the isomorphism of factors, à paraître.

[4] M. TAKESAKI - Duality for cross-products and the structure of von Neumann algebras of type III, à paraître.