SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

Travaux de S. S. Chern et J. Simons sur les classes caractéristiques

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 440, p. 69-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__69_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 440-01
26e année, 1973/74, n° 440 Novembre 1973

TRAVAUX DE S. S. CHERN ET J. SIMONS SUR LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES

par Jean-Louis KOSZUL

Il s'agit d'un prolongement de la Théorie de Chern-Weil. Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $I(G)$ l'algèbre graduée des fonctions polynômiales à valeurs réelles sur $\mathfrak{g}$ qui sont invariantes par l'action adjointe de G. Soit $\pi : E \to M$ une fibration principale $\mathcal{C}^\infty$ de base M et de groupe G. Le choix d'une forme de connexion γ sur E détermine un homomorphisme W_γ de $I(G)$ dans l'algèbre $\mathfrak{D}(M)$ des formes différentielles sur M. Cet homomorphisme double les degrés ; pour tout $P \in I^\ell(G)$, $W_\gamma P$ est une forme fermée de degré 2ℓ. Les classes de cohomologie des images de W_γ sont les classes caractéristiques réelles de la fibration. Pour $\ell > 0$ et $P \in I^\ell(G)$, l'image réciproque de $W_\gamma P$ par π est une forme exacte sur E. Il existe en fait un homomorphisme $T_\gamma : I^\ell(G) \to \mathfrak{D}^{2\ell-1}(E)$, ne dépendant que de la connexion γ tel que $\pi^*(W_\gamma P) = d\, T_\gamma P$. Lorsque $W_\gamma P = 0$, $T_\gamma P$ est donc une forme fermée qui détermine une classe de cohomologie appartenant à $H^{2\ell-1}(E, \mathbb{R})$. Les classes qui s'obtiennent ainsi ont été étudiées pour la première fois par Chern et Simons dans [3]. Ils ont montré que si $E \to M$ est le fibré des repères de M muni de la connexion γ définie par une structure riemannienne sur M, la classe de cohomologie de $T_\gamma P$ est un invariant de la structure conforme de M. Ces invariants conduisent à des obstructions cohomologiques à l'existence d'une immersion conforme de M dans un espace euclidien. Dans la recherche de ces obstructions interviennent des propriétés d'intégralité des classes définies par les formes $T_\gamma P$ correspondant à

certains polynômes P liés aux classes de cohomologie entière du classifiant. Guidé par ces propriétés, Simons a montré dans [10] que l'objet qu'il convient d'associer à un tel polynôme P n'est pas une classe de cohomologie de degré $2\ell - 1$ de E, mais un caractère à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur le groupe des cycles de degré $2\ell - 1$ de la base. Ce caractère peut être défini même si $W_\gamma P \neq 0$. On s'écarte là sensiblement des constructions qui conduisent aux invariants du type Godbillon-Vey d'un feuilletage. Dans ces dernières, on doit supposer que $T_\gamma P$ est une forme fermée basique par rapport à un sous-groupe compact maximal de G et on déduit de $T_\gamma P$ une classe de cohomologie réelle de la base.

Les caractères que Simons associe à une fibration principale munie d'une connexion ont rarement une signification géométrique simple. Lorsque $G = SO(2)$, ils décrivent l'holonomie de la fibration. Leur étude a débouché notamment sur de nouveaux résultats concernant les immersions conformes et la cohomologie de certains espaces classifiants [1], [4], [7], [10].

1. Les homomorphismes W_γ et T_γ

Comme plus haut, $\pi : E \to M$ désigne une fibration principale de groupe G et γ désigne une (forme de) connexion sur E. La forme γ est une forme différentielle de degré 1 sur E à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui est G-équivariante et vérifie la condition $\gamma(ya) = a$ quels que soient $y \in E$ et $a \in \mathfrak{g}$. La forme de courbure de γ est la forme $\Omega = d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma]$. Pour tout entier $\ell > 0$, on identifie $I^\ell(G)$ à l'espace des formes linéaires symétriques sur $\overset{\ell}{\otimes}\mathfrak{g}$ qui sont invariantes par G. L'homomorphisme W_γ est alors défini par

$$W_\gamma P = P(\overbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}^{\ell}) \tag{1.1}$$

pour $P \in I^\ell(G)$. Noter que dans cette formule, la puissance extérieure

$\Omega^\ell = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ de Ω s'obtient en considérant Ω comme une forme différentielle à valeurs dans l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$. Pour tout $P \in I^\ell(G)$, $W_\gamma P$ est une forme différentielle de degré 2ℓ sur E. Puisque P est invariante par G, c'est une forme basique. On notera encore $W_\gamma P$ la forme différentielle sur M qui lui correspond par l'injection $\pi^* : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(E)$.

L'homomorphisme de transgression T_γ est défini pour $P \in I^\ell(G)$ par

$$(1.2) \qquad T_\gamma P = \ell \int_0^1 P(\overbrace{\gamma \wedge \Omega_t \wedge \ldots \wedge \Omega_t}^{\ell-1}) \, dt$$

où $\Omega_t = t(d\gamma) + \frac{t^2}{2}[\gamma,\gamma]$. On a $T_\gamma P \in \mathcal{D}^{2\ell-1}(E)$ et

$$(1.3) \qquad dT_\gamma P = W_\gamma P .$$

Si $\gamma(s)$ est une famille différentiable de connexions sur E, on a pour toute valeur du paramètre s :

$$(1.4) \qquad \frac{d}{ds} W_{\gamma(s)} P = \ell \, d(P(\Delta(s) \wedge \overbrace{\Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s)}^{\ell-1})) ,$$

où $\Delta(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$ et où $\Omega(s)$ est la forme de courbure de $\gamma(s)$ (cf. [5]). Les formes $\Delta(s)$ étant G-équivariantes et nulles sur les vecteurs verticaux, la forme $P(\Delta(s) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots)$ est basique quel que soit s. La relation (1.4) montre donc que la classe de cohomologie de $W_\gamma P$ est un élément de $H^{2\ell}(M, \mathbb{R})$ indépendant du choix de la connexion γ. On obtient ainsi un homomorphisme $w : I(G) \to H^*(M, \mathbb{R})$ qui double les degrés ; c'est l'homomorphisme de Weil de la fibration $E \to M$.

2. Anneau $K(G)$

On désigne par B_G un espace classifiant pour les fibrations de groupe G et par U_G un fibré principal universel de groupe G et de base B_G. Soit ξ une fibration principale $\mathcal{C}^\infty$ de groupe G et de base M. Soit w_ξ l'homomor-

phisme de Weil de ξ . Tous les morphismes de ξ dans la fibration $U_G \to B_G$ sont homotopes et définissent le même homomorphisme "caractéristique" $b_\xi : H^*(B_G, \ ) \to H^*(M, \ )$. On montre qu'il existe un homomorphisme canonique $w : I(G) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$ tel que, pour toute fibration ξ de groupe G , $b_\xi \circ w = w_\xi$.

Dans la suite, on supposera que le nombre des composantes connexes de G est fini. L'homomorphisme w est alors surjectif. De plus, pour ℓ impair, $H^\ell(B_G, \mathbb{R}) = 0$.

On note $K(G)$ le sous-anneau de $I(G) \times H^*(B_G, \mathbb{Z})$ formé par les couples (P,u) tels que

$$w(P) = r(u) ,$$

où r est l'homomorphisme canonique $H^*(B_G, \mathbb{Z}) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$. Cet anneau est gradué par les sous-groupes $K^\ell(G) = K(G) \cap (I^\ell(G) \times H^{2\ell}(B_G, \mathbb{R}))$.

Remarques.- Puisque $w : I(G) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$ est surjective, la projection de $K(G)$ dans $H^*(B_G, \mathbb{Z})$ est surjective. Si G est compact, alors w est un isomorphisme et $K(G)$ est isomorphe à $H^*(B_G, \mathbb{Z})$. Dans le cas général, si H est un sous-groupe compact maximal de G , w se factorise en $w = w' \circ \lambda$ où λ est l'homomorphisme canonique de $I(G)$ dans $I(H)$ et où w' est un isomorphisme de $I(H)$ sur $H^*(B_G, \mathbb{R})$. Le noyau de la projection $K(G) \to H^*(B_G, \mathbb{Z})$ est alors $\mathrm{Ker}(\lambda) \times 0$.

Soient ξ une fibration principale de groupe G et w_ξ son homomorphisme de Weil. Pour tout $(P,u) \in K^\ell(G)$, on a $w_\xi P = b_\xi(wP) = b_\xi(ru) = r(b_\xi u)$. Quelle que soit la connexion γ sur ξ , $W_\gamma P$ est donc une forme fermée à périodes entières appartenant à la classe $r(b_\xi u)$. C'est le point de départ de la construction qui sera faite au numéro 4.

3. Caractères différentiels

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$. On utilisera dans la suite le complexe $C(M)$ des chaînes singulières cubiques $\mathcal{C}^\infty$ dans M. On note $Z_\ell(M)$ le groupe des cycles de degré ℓ dans $C(M)$ et $B_\ell(M)$ le groupe des bords $\partial C_{\ell+1}(M)$.

Soit ω une forme différentielle fermée de degré ℓ sur M. On l'identifie à une cochaîne singulière à valeurs dans R en posant $\omega(c) = \int_c \omega$ pour tout $c \in C_\ell(M)$. Supposons que les périodes de ω soient entières. Il existe alors une classe $u \in H^\ell(M, \mathbb{Z})$ telle que ω appartienne à la classe $r(u)$. La classe u étant choisie, soit a un cocycle singulier à valeurs entières appartenant à u. Considéré comme cochaîne à valeurs réelles, $\omega - a$ est un cobord. Soit φ une cochaîne de degré $\ell - 1$ à valeurs dans R telle que $\omega - a = d\varphi$. Notons $t \mapsto \bar{t}$ le passage au quotient $R \to R/\mathbb{Z}$. L'application $\bar{\varphi}$ est un caractère du groupe $C_{\ell-1}(M)$ dont la restriction à $B_{\ell-1}(M)$ est donnée par $\bar{\varphi}(\partial c) = \overline{d\varphi(c)} = \bar{\omega}(c)$ quel que soit $c \in C_\ell(M)$. Cette restriction est donc déterminée par ω. Pour le reste $\bar{\varphi}$ dépend des choix de u, a et φ.

Dans [1], Cheeger et Simons appellent caractère différentiel (de degré ℓ) sur M un caractère χ du groupe $Z_{\ell-1}(M)$ ayant la propriété suivante : il existe une forme différentielle ω_χ de degré ℓ sur M telle que

$$\chi \circ \partial = \bar{\omega}_\chi \quad \text{sur } C_\ell(M). \tag{3.1}$$

Les caractères différentiels de degré ℓ sur M forment un sous-groupe $S^\ell(M)$ du groupe $\mathrm{Hom}(Z_{\ell-1}(M), R/\mathbb{Z})$ et S^ℓ est un foncteur contravariant sur la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$.

La relation (3.1) détermine ω_χ à partir de χ. En effet, une forme différentielle ω telle que $\omega(c) \in \mathbb{Z}$ pour tout $c \in C_\ell(M)$ est nécessairement la forme nulle. Pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, ω_χ est une forme fermée à périodes entières.

L'application $\chi \longmapsto \omega_\chi$ est un homomorphisme. Pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, il existe une cochaîne réelle f de degré $\ell - 1$ telle que $\bar{f}(\bar{z}) = \chi(z)$ quel que soit $z \in Z_{\ell-1}(M)$. La cochaîne $\omega_\chi - df$ est un cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Sa classe $u_\chi \in H^\ell(M, \mathbb{Z})$ est indépendante du choix de f. En effet, si g est une autre cochaîne réelle de degré $\ell - 1$ telle que $\bar{g}(\bar{z}) = \chi(z)$, $f - g$ prend des valeurs entières sur $Z_{\ell-1}(M)$ et on peut donc l'écrire $f - g = h + db$ où $h \in C^{\ell-1}(M, \mathbb{Z})$ et où $b \in C^{\ell-2}(M, \mathbb{R})$. On a alors $\omega_\chi - df = \omega_\chi - dg - dh$. L'application $\chi \longmapsto u_\chi$ est un homomorphisme de $S^\ell(M)$ dans $H^\ell(M, \mathbb{Z})$.

Il est clair que pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, la classe de cohomologie de ω_χ est $r(u_\chi)$. Le raisonnement fait plus haut montre que $\chi \longmapsto (\omega_\chi, u_\chi)$ est un homomorphisme du groupe $S^\ell(M)$ sur le sous-groupe de $\mathcal{D}^\ell(M) \times H^\ell(M, \mathbb{Z})$ formé par les couples (ω, u) tels que $d\omega = 0$ et $\omega \in r(u)$. Cet homomorphisme n'est en général pas injectif. Le caractère χ n'est qu'en partie déterminé par ω_χ et u_χ. La forme ω_χ donne la restriction du caractère χ aux bords. Pour la suite, il est important de remarquer que le couple (ω_χ, u_χ) détermine χ sur le groupe $Z^{tor}_{\ell-1}(M)$ des cycles de torsion de degré $\ell - 1$. Soient en effet $z \in Z^{tor}_{\ell-1}(M)$, m un entier > 0 et $y \in C_\ell(M)$ tels que $mz = \partial y$. Choisissons un cocycle c de la classe u_χ et une cochaîne réelle f telle que $\bar{\bar{f}} = \chi$ sur $Z_{\ell-1}(M)$. Pour tout $z \in Z_{\ell-1}(M)$, on a

$$\chi(z) = \bar{f}(z) = \frac{1}{m} \bar{f}(mz) = \frac{1}{m} \bar{f}(dy) = \frac{1}{m} \overline{(df)}(y) .$$

Puisque $\omega_\chi - df$ est un cocycle de la classe u_χ, il existe une cochaîne b de degré $\ell - 1$ à valeurs entières telle que $\omega_\chi - df = c + db$. On a donc

$$\chi(z) = \frac{1}{m} \overline{(\omega_\chi(y) - c(y) - b(dy))} = \frac{1}{m} \overline{(\omega_\chi(y) - c(y))} .$$

Exemple.- Soient $E \to M$ une fibration principale de groupe $SO(2)$ munie d'une

connexion et Ω la forme de courbure. Pour tout chemin fermé c dans M, soit $\chi(c)$ l'élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que l'holonomie le long de c soit une rotation d'angle $2\pi\chi(c)$. La fonction χ se prolonge d'une manière et d'une seule en un caractère de $Z_1(M)$ de sorte que $\chi(\partial x) = \frac{1}{2\pi}\int_x \Omega$ pour tout $x \in C_2(M)$ On obtient ainsi un caractère différentiel. Si M est un cercle, on a $\omega_\chi = u_\chi = 0$. Si la connexion n'est pas globalement plate, on a $\chi \neq 0$.

Les caractères différentiels sont invariants par subdivision. Si $\Delta : C(M) \to C(M)$ est l'endomorphisme de subdivision, il existe un opérateur d'homotopie ψ tel que $I - \Delta = \partial\psi + \psi\partial$. On peut choisir ψ de sorte que pour tout cube singulier σ l'image de $\psi(\sigma)$ soit contenue dans celle de σ. Si $\chi \in S^\ell(M)$, pour tout cycle z de degré $\ell - 1$, on a $\chi(\Delta z) = \chi(z) - \chi(\partial\psi(z)) = \chi(z) - \overline{\omega_\chi(\psi(z))}$. Or $\omega_\chi(\psi(\sigma)) = 0$ pour tout cube singulier σ de dimension $\ell - 1$. Par conséquent $\chi(\Delta z) = \chi(z)$.

Pour qu'un caractère différentiel $\chi \in S^\ell(M)$ soit nul sur les bords de degré $\ell - 1$, il faut et il suffit que $\omega_\chi = 0$. Si $\omega_\chi = 0$, χ définit une classe appartenant à $H^{\ell-1}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$; on voit facilement que cette classe a pour Bokstein $-u_\chi \in H^\ell(M, \mathbb{Z})$.

Dans [1], Cheeger et Simons définissent sur $\oplus S^\ell(M)$ une structure d'algèbre graduée anticommutative telle que $\chi \mapsto \omega_\chi$ et $\chi \mapsto u_\chi$ soient des homomorphismes d'algèbres. Pour tout sous-anneau propre Λ de $\mathbb{R}$, ils définissent aussi des caractères différentiels à valeurs dans $\mathbb{R}/\Lambda$ qui jouissent des mêmes propriétés que ceux dont il est question plus haut.

4. Caractères différentiels associés aux éléments de $K(G)$

On désigne par $\mathfrak{C}(G)$ la catégorie des fibrations principales de groupe G munies d'une connexion. Si ξ est un objet de $\mathfrak{C}(G)$, on note respectivement E_ξ, M_ξ et γ_ξ l'espace fibré, la base et la forme de connexion de ξ. Un morphisme $\varphi : \xi \to \eta$ est une application différentiable G-équivariante $\varphi_E : E_\xi \to E_\eta$ telle que $\gamma_\eta \circ \varphi_E^T = \gamma_\xi$. On note φ_M l'application de M_ξ dans M_η qui s'en déduit par passage aux quotients. Les homomorphismes W_{γ_ξ} et T_{γ_ξ} définis au numéro 1 seront notés W_ξ et T_ξ. Si $\varphi : \xi \to \eta$ est un morphisme on a $\varphi_M^* \circ W_\eta = W_\xi$ et $\varphi_E^* \circ T_\eta = T_\xi$.

Soient $(P,u) \in K^\ell(G)$ et ξ un objet de $\mathfrak{C}(G)$. On pose $u(\xi) = b_\xi(u) \in H^{2\ell}(M_\xi, \mathbf{Z})$. Puisque $w_\xi P = b_\xi(wP) = b_\xi(r(u)) = r(u(\xi))$, il existe des caractères différentiels $\chi \in S^{2\ell}(M_\xi)$ tels que $\omega_\chi = W_\xi P$ et $u_\chi = u(\xi)$. Tous ces caractères coïncident sur les cycles de torsion.

4.1 THÉORÈME (Simons [10]).- *Soit $(P,u) \in K^\ell(G)$. Il existe pour tout $\xi \in \mathfrak{C}(G)$ un caractère différentiel $\chi(\xi) \in S^{2\ell}(M_\xi)$ et un seul tel que*

a) $\omega_{\chi(\xi)} = W_\xi P$,

b) $u_{\chi(\xi)} = u(\xi)$,

c) *si $\varphi : \xi \to \eta$ est un morphisme, $\chi(\xi) = \chi(\eta) \circ \varphi_M$.*

La démonstration repose sur l'existence pour tout entier N d'un objet η de $\mathfrak{C}(G)$ qui est " N-classifiant " dans le sens suivant (cf. Narashiman-Ramanan [9]) : 1) quel que soit $\xi \in \mathfrak{C}(G)$ avec $\dim M < N$, il existe un morphisme $\varphi : \xi \to \eta$,

2) si φ et ψ sont deux morphismes de ξ dans η, les applications

φ_E et ψ_E sont homotopes dans l'espace des applications G-équivariantes de E_ξ dans E_η . Pour N est assez grand, si η est N-classifiant, on a $H^{2\ell-1}(M_\eta, R) = H^{2\ell-1}(B_G, R) = 0$, donc $Z_{2\ell-1}(M_\eta) = Z^{tor}_{2\ell-1}(M_\eta)$. Le caractère $\chi(\eta)$ est donc déterminé par les conditions a) et b). Cela étant, soit $\xi \in \mathfrak{C}(G)$; on choisit un objet N-classifiant η tel que $N > \dim M_\xi$ et $Z_{2\ell-1}(M_\eta) = Z^{tor}_{2\ell-1}(M_\eta)$. On pose $\chi(\xi) = \chi(\eta) \circ \varphi_M$ où φ est un morphisme de ξ dans η . On montre que le caractère ainsi obtenu est indépendant des choix de φ et de η . Le comportement des formes $W_\xi P$ et des classes $u(\xi)$ vis à vis des morphismes permet alors de vérifier les conditions a), b) et c).

On note dans la suite $S_{P,u}(\xi)$ le caractère appartenant à $S^\ell(M_\xi)$ qui est défini par le théorème 4.1. Il détermine la forme $W_\xi P$, et la classe caractéristique $u(\xi)$.

4.2 La valeur de $S_{P,u}(\xi)$ sur la projection πz d'un cycle z de E se calcule au moyen de la forme $T_\xi P$. Plus précisément,

$$S_{P,u}(\xi) \circ \pi = \overline{T_\xi P} \qquad \text{sur } Z_{2\ell-1}(E_\xi) .$$

En utilisant un morphisme de ξ dans un objet N-classifiant convenable, on se ramène au cas où z est le bord d'une chaîne $y \in C_{2\ell}(E_\xi)$. Dans ce cas,

$$(S_{P,u}(\xi))(\pi z) = (S_{P,u}(\xi))(\partial \pi y) = \overline{(W_\xi P)(y)} = \overline{(dT_\xi P)(y)} = \overline{(T_\xi P)(z)} .$$

Si la connexion γ_ξ est globalement plate, la fibration ξ est trivialisable et il existe un morphisme de ξ dans un objet de $\mathfrak{C}(G)$ dont la base est réduite à un point. Par suite $S_{P,u}(\xi) = 0$ quel que soit $(P,u) \in K(G)$.

La manière dont $S_{P,u}(\xi)$ dépend de la connexion γ_ξ est décrite par le résultat suivant ([1]) :

4.3 THÉORÈME (Simons, [10]).- Soit $\xi(s)$ une famille d'objets de $\mathcal{C}(G)$ ayant même fibration principale sous-jacente $E \to M$ et dépendant différentiablement d'un paramètre réel s . Soit $\gamma(s)$ la connexion de $\xi(s)$ et $\Omega(s)$ la forme de courbure de $\gamma(s)$. Pour tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, on a sur $Z_{2\ell-1}(M)$:

$$S_{P,u}(\xi(1)) - S_{P,u}(\xi(0)) = \ell \int_0^1 P\left(\frac{d}{ds}\gamma(s) \wedge \Omega(s) \ldots \Omega(s)\right) ds .$$

Sur les cycles de torsion, l'égalité résulte de la relation (1.4). Le cas général s'en déduit en montrant qu'il existe une fibration principale $E' \to M'$ avec $H^{2\ell-1}(M', \mathbb{R}) = 0$, une famille différentiable $\gamma'(s)$ de connexions sur E' et un morphisme φ de $E \to M$ dans $E' \to M'$ tels que $\gamma(s) = \gamma'(s)\varphi^T$ pour tout s .

5. Caractères associés aux classes de Pontrjagin et invariants conformes

Soient M une variété différentielle de dimension n et $\mathcal{R}$ le fibré des repères de TM . On note $\theta : T\mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ la forme différentielle canonique de $\mathcal{R}$. Soient γ_0 et γ_1 deux connexions sur $\mathcal{R}$. Puisque $\gamma_1 - \gamma_0$ est nulle sur les vecteurs verticaux qui sont les vecteurs annulés par θ , on peut factoriser $\gamma_1 - \gamma_0$ et écrire $\gamma_1 - \gamma_0 = 2\rho \circ \theta$ où ρ est une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$. On suppose maintenant que γ_0 et γ_1 ont même torsion. On a alors $d\theta + [\gamma_0, \theta] = d\theta + [\gamma_1, \theta]$, donc $[\gamma_1 - \gamma_0, \theta] = 0$. Ceci signifie que

$$(\rho(a)\theta(u))(\theta(v)) - (\rho(a)\theta(v))(\theta(u)) = 0$$

quel que soit $a \in \mathcal{R}$ et $u, v \in T_a\mathcal{R}$. Considérée comme forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\rho(a)$ est donc une forme symétrique.

Soient G un sous-groupe fermé de $G\ell(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et E un sous-fibré principal différentiable de groupe G dans $\mathcal{R}$. Supposons que les connexions γ_0 et γ_1 soient les prolongements à $\mathcal{R}$ de connexions sur E . Dans

ce cas, $\gamma_1(u) - \gamma_0(u) \in \mathfrak{g}$ pour tout vecteur u dont l'origine est dans E. Ceci montre que, pour tout $a \in E$, $\rho(a)$ appartient au premier prolongement $\mathfrak{g}^{(1)}$ de $\mathfrak{g}$.

On va appliquer ces remarques au cas où γ_0 et γ_1 sont les connexions de torsion nulle définies par deux métriques riemanniennes conformes g^0 et g^1 sur M. Soit E le sous-fibré principal de groupe $CO(n) \subset G\ell(n, \mathbb{R})$ formé par les repères conformes pour g^0 ou g^1. Les formes γ_0 et γ_1 sont les prolongements de formes de connexion sur E. Par conséquent, sur E, on a $\gamma_1 - \gamma_0 = 2\rho\theta$ où ρ est une application différentiable de E dans le premier prolongement $\mathfrak{co}(n)^{(1)}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}(n)$ de $CO(n)$. Cela signifie que, sur E, la matrice de ρ est de la forme

$$(5.1) \qquad \rho^k_{ij} = \tfrac{1}{2}(c_j \delta_{ik} + c_i \delta_{jk} - c_k \delta_{ij}),$$

où (c_i) est la matrice d'une application différentiable de E dans $\mathbb{R}^n$.

5.2 Lemme (Chern-Simons, [2]).- *Pour tout entier $\ell > 0$, soit Q_ℓ l'élément de $I^\ell(G\ell(n, \mathbb{R}))$ défini par $Q_\ell(X) = \mathrm{Tr}\, X^\ell$. Si $\Omega(s)$ est la courbure de la connexion $\gamma(s) = (1 - s)\gamma_0 + s\gamma_1$, on a pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout ℓ pair :*

$$Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_0) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s)) = 0 .$$

Puisque $Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_0) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s))$ est une forme basique, il suffit de démontrer l'égalité sur E. D'après (5.1), la restriction de $\gamma_1 - \gamma_0$ à E a une matrice de la forme $(\Sigma c_i \theta^i)\delta_{jk} + c_j \theta^k - c_k \theta^j$. Dans le calcul de $Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_0) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s))$, les termes provenant de $(\Sigma c_i \theta^i)\delta_{jk}$ sont nuls du fait que $\Omega(s)$ est à valeurs dans $\mathfrak{o}(n)$ et que par suite $Q_{\ell-1}(\Omega(s)) = 0$. Les autres donnent 0 du fait que $\theta \wedge \Omega(s) = 0$ (identité de Bianchi).

Kobayashi et Ochiai démontrent le Lemme (5.2), ainsi que des résultats analogues s'appliquant aux connexions projectivement équivalentes, par un procédé qui

explique mieux les choses (cf. [6]). Ils considèrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n) \oplus \mathfrak{co}(n)^{(1)}$; c'est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynômiaux sur $\mathbb{R}^n$ qui est isomorphe à $\mathfrak{o}(n+1,1)$. Ils observent que $2\rho \circ \theta$ peut s'écrire en utilisant le crochet de $\mathfrak{h}$ sous la forme $[\rho,\theta]$. Par suite, si Q est une fonction polynômiale sur $\mathfrak{h}$ invariante par la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$, l'identité de Bianchi donne tout de suite $Q((2\rho \circ \theta)\wedge\Omega(s)\wedge \ldots \wedge \Omega(s)) = 0$ (sur E). Il suffit donc de vérifier que, pour ℓ pair, Q_ℓ coïncide sur $\mathfrak{co}(n)$ avec la restriction d'une fonction polynômiale invariante sur $\mathfrak{h}$.

5.3 THÉORÈME (Simons, [10]).- *Soit* M *une variété de dimension* n . *Soient* g^0 *et* g^1 *deux métriques riemanniennes conformes sur* M *et* ξ_0 (resp. ξ_1) *le fibré des repères de* TM *muni de la connexion définie par* g^0 (resp. g^1) . *Pour tout* $(P,u) \in K(G\ell(n,\mathbb{R}))$, *on a*

$$S_{P,u}(\xi_0) = S_{P,u}(\xi_1) .$$

Supposons que $(P,u) \in K^\ell(G\ell(n,\mathbb{R}))$. Si ℓ est impair, on a $S_{(P,u)}(\xi_0) = S_{(P,u)}(\xi_1)$ parce que, les connexions étant riemanniennes, $W_{\xi_0}(P) = W_{\xi_1}(P) = 0$. Supposons ℓ pair. Puisque P est un polynôme en les Q_i , on déduit de (5.2) que

$$P((\gamma_1 - \gamma_0)\wedge \Omega(s)\wedge \ldots \wedge \Omega(s)) = 0 .$$

L'assertion résulte alors du théorème 4.3.

Pour $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, on note p_i la i-ème classe de Pontrjagin de $B_{G\ell(n,\mathbb{R})}$. Si $P_i(X)$ est le coefficient de λ^{n-2i} dans $\det(\lambda - X)$ pour $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, alors $P_i \in I^{2i}(G\ell(n,\mathbb{R}))$ et $w(P_i) = r(p_i)$. On a donc $(P_i, p_i) \in K^{2i}(G\ell(-n,\mathbb{R}))$. Le théorème 5.3 montre que les S_{P_i, p_i} , appliqués aux fibrés de repères des variétés riemanniennes, donnent des invariants conformes.

6. Caractères et fibrations vectorielles inverses

On désigne par n et k deux entiers > 0 . Soit $G_{n,k}$ la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^{n+k}$. On identifie $G_{n,k}$ et $G_{k,n}$ par la bijection qui associe à un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+k}$ le sous-espace orthogonal pour la structure euclidienne canonique. Soit $V_{n,k}$ le sous-fibré vectoriel de rang k du fibré trivial $\mathbb{R}^{n+k} \times G_{n,k}$ ensemble des couples (x,a) avec $x \in a$. Le fibré $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^{n+k} \times G_{n,k}$. Cette trivialisation de $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ définit une connexion linéaire globalement plate qui induit des connexions linéaires canoniques dans $V_{n,k}$ et $V_{k,n}$. Le groupe $O(n+k)$ opère dans $\mathbb{R}^{n+k} \times G_{n,k}$ par action simultanée dans les deux facteurs. La connexion plate et les sous-fibrés $V_{n,k}$, $V_{k,n}$ sont invariants par $O(n+k)$. Par conséquent $O(n+k)$ laisse invariantes les connexions linéaires canoniques de $V_{n,k}$ et $V_{k,n}$. Soit η (resp. ξ) l'objet de $\mathcal{E}(G\ell(k,\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{E}(G\ell(n,\mathbb{R}))$) défini par $V_{n,k}$ (resp. $V_{k,n}$) et sa connexion canonique. La forme de connexion γ_ξ est invariante par l'action de $O(n+k)$ dans le fibré des repères de $V_{k,n}$. Par suite, pour tout $P \in I(G\ell(n,\mathbb{R}))$, $W_\xi P$ est une forme sur $G_{k,n}$ qui est invariante par $O(n+k)$.

Puisque $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ est trivialisable, on a

$$(6.1) \qquad (1 + p_1(\xi) \ldots p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi))(1 + p_1(\eta) \ldots p_{\left[\frac{k}{2}\right]}(\eta)) = 1 .$$

Pour tout entier $i \geq 0$, on définit $p_i^\perp \in H^{4i}(B_{G\ell(n,\mathbb{R})}, \mathbb{Z})$ par la condition

$$(1 + p_1 + \ldots + p_{\left[\frac{n}{2}\right]})(p_o^\perp + p_1^\perp + \ldots) = 1 .$$

De même, on définit pour tout $i \geq 0$ un polynôme $P_i^\perp \in I^{2i}(G\ell(n,\mathbb{R}))$ par la condition

$$(1 + P_1 + \ldots + P_{\left[\frac{n}{2}\right]})(P_o^\perp + P_1^\perp + \ldots) = 1 .$$

Pour tout i, on a alors $(P_i^\perp, p_i^\perp) \in K^{2i}(G\ell(n,\mathbb{R}))$ et la relation (6.1) montre que $p_i^\perp(\xi) = p_i(\eta)$ pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et que $p_i^\perp(\xi) = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Il en résulte que $W_\xi P_i^\perp - W_\eta P_i$ est une forme exacte pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et que $W_\xi P_i^\perp$ est exacte pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Comme ces formes sont invariantes par $O(n+k)$ et que $G_{k,n}$ est un espace symétrique de groupe $O(n+k)$, ceci entraîne que $W_\xi P_i^\perp = W_\eta P_i$ pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et $W_\xi P_i^\perp = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Tous les cycles de degré impair sur $G_{k,n}$ étant de torsion, il en résulte que

$$(6.2) \qquad S_{P_i^\perp, p_i^\perp}(\xi) = S_{P_i, p_i}(\eta) \qquad 1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right],$$

$$S_{P_i^\perp, p_i^\perp}(\xi) = 0 \qquad i > \left[\frac{k}{2}\right].$$

On va passer de ce résultat à un résultat sur les caractères de deux fibrés vectoriels inverses. Deux fibrés vectoriels V et $V^\perp$, munis de connexions ∇ et $\nabla^\perp$ sont dits inverses s'ils ont même base et s'il existe sur $V \oplus V^\perp$ une connexion linéaire globalement plate induisant respectivement par projection ∇ et $\nabla^\perp$ sur V et $V^\perp$.

Si V est un fibré vectoriel de rang n muni d'une connexion linéaire ∇, le fibré des repères de V et la forme de connexion définie par ∇ constituent un objet ξ de $\mathcal{E}(G\ell(n,\mathbb{R}))$. On posera pour alléger :

$$S_{P_i, p_i}(\xi) = S_{p_i}(\nabla) \quad , \quad S_{P_i^\perp, p_i^\perp}(\xi) = S_{p_i^\perp}(\nabla) .$$

6.3 THÉORÈME (Cheeger, Simons, [1]).- Soit V (resp. $V^\perp$) un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire ∇ (resp. $\nabla^\perp$). Si (V,∇) et $(V^\perp,\nabla^\perp)$ sont inverses et si $V^\perp$ est de rang k, on a

$$S_{p_i}(\nabla) = S_{p_i}(\nabla^\perp) \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right],$$

$$S_{p_i^\perp}(\nabla) = 0 \qquad \text{pour } i > \left[\frac{k}{2}\right].$$

On fera la démonstration dans le cas particulier suivant qui suffit pour les principales applications (cf. [10]) : on suppose que sur $V \oplus V^{\perp}$, en plus de la connexion globalement plate induisant ∇ et $\nabla^{\perp}$, il existe une structure euclidienne dans les fibres, invariante par transport parallèle et telle que en tout point a de la base M, V_a et $V_a^{\perp}$ soient orthogonales. Soit n le rang de V. Le choix d'une base orthonormale de sections plates de $V \oplus V^{\perp}$ définit une application f de M dans $G_{k,n}$ telle que $V = f^*V_{k,n}$ et $V^{\perp} = f^*V_{n,k}$. La connexion ∇ (resp. $\nabla^{\perp}$) est l'image réciproque de la connexion linéaire canonique de $V_{k,n}$ (resp. $V_{n,k}$). Le théorème s'obtient donc en transportant sur M les relations (6.2).

La démonstration du cas général (cf. [1]) repose sur des formules explicitant les caractères S_{p_i} de la somme directe de deux fibrés vectoriels munis de connexions. Ces formules mettent en jeu la structure multiplicative de l'espace des caractères différentiels.

7. Obstructions aux immersions conformes

7.1 THÉORÈME (Simons, [10]).- *Soient M une variété riemannienne de dimension n et ∇ la connexion linéaire riemannienne dans TM. Pour qu'il existe une immersion conforme de M dans $\mathbb{R}^{n+k}$, il faut que $S_{p_i^{\perp}}(\nabla) = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$.*

Soit en effet ζ la fibration principale définie par les repères de TM. Elle est munie d'une forme de connexion correspondant à ∇. Si l'immersion $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ est isométrique, elle définit un morphisme de ζ dans la fibration ξ des repères de $V_{k,n}$ munie de la connexion canonique (cf. n° 6). Le théorème résulte dans ce cas de (6.2). Le cas général s'en déduit en observant que si $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ est une immersion conforme, c'est une immersion isomé-

trique pour une métrique riemannienne sur M conformément équivalente à la métrique donnée. Les caractères S_{p_i} étant des invariants conformes, le résultat subsiste.

7.2 Avec les hypothèses du théorème, les formes $T_\zeta P_i^\perp$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$ sont des formes fermées à périodes entières sur le fibré des repères de TM. En effet, puisque $S_{p_i^\perp}(\nabla) = 0$, on a $W_\zeta P_i^\perp = 0$, donc $dT_\zeta P_i^\perp = 0$ d'après (1.3). On a d'autre part $(T_\zeta P_i^\perp)(z) \in \mathbb{Z}$ pour tout cycle z de degré $4i - 1$ d'après (4.2).

Millson a appliqué ce résultat aux espaces lenticulaires de dimension $4k-1$, munis de leur métrique canonique ([7]). Il a calculé la valeur des caractères S_{p_k} sur le cycle fondamental et a montré notamment qu'il existe une infinité d'espaces lenticulaires de dimension $4k - 1$ qui sont différentiablement immergeables dans $\mathbb{R}^{4k}$ mais ne peuvent être immergés de manière conforme dans $\mathbb{R}^{6k-1}$.

L'énoncé 7.2 est une forme affaiblie d'un résultat obtenu par Chern et Simons dans [3]. Avec les hypothèses du théorème, pour $\left[\frac{k}{2}\right] < i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, la forme $\frac{1}{2} T_\zeta P_i^\perp$ est une forme fermée à périodes entières.

Si M est l'espace projectif de dimension 3 avec sa métrique riemannienne canonique, on montre que pour toute section σ du fibré des repères de TM, on a $\int_{\sigma M} T_\zeta P_1^\perp = 1$. Par conséquent, il n'existe pas d'immersion conforme de M dans $\mathbb{R}^4$.

8. Cas plat

Avec les notations du numéro 4, si $\xi \in \mathfrak{C}(G)$ est plat, c'est-à-dire si la courbure de la connexion θ_ξ est nulle, on a $W_\xi P = 0$ pour tout $P \in I(G)$ de degré > 0. Si ξ est plat, pour tout $\ell > 0$ et tout $(P,u) \in K^\ell(G)$, le caractère $S_{P,u}(\xi)$ est nul sur les bords de degré $2\ell - 1$; on peut donc identifier $S_{P,u}(\xi)$ à une classe appartenant à $H^{2\ell-1}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Le théorème 4.3 montre que, si $\xi(s)$ est une famille différentiable d'objets plats de $\mathfrak{C}(G)$ ayant même fibration principale sous-jacente, alors pour tout $\ell > 1$ et tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, le caractère $S_{P,u}(\xi(s))$ est indépendant de s.

Soit G^{o} le groupe G muni de la topologie discrète et soit μ l'homomorphisme canonique de $H^{*}(B_{G}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans $H^{*}(B_{G^{o}}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ défini par l'injection $G^{o} \to G$. Si $\xi \in \mathfrak{C}(G)$ est plat, sa connexion définit dans E_{ξ} une structure de fibré principal de groupe G^{o} de base M_{ξ}, d'où un homomorphisme $b^{o}_{\xi} : H^{*}(B_{G^{o}}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to H^{*}(M_{\xi}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tel que $b_{\xi} = b^{o}_{\xi} \circ \mu$. On montre qu'il existe pour tout ℓ un homomorphisme $(P,u) \longmapsto s_{P,u}$ de $K^{\ell}(G)$ dans $H^{2\ell-1}(B_{G^{o}}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tel que, pour tout objet plat ξ de $\mathfrak{C}(G)$ et pour tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, on ait

$$S_{P,u}(\xi) = b^{o}_{\xi}(s_{P,u}) .$$

Ceci permet dans certain cas d'obtenir des informations sur $H^{*}(B_{G^{o}}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Caractère d'Euler. Soit $u \in H^{2n}(B_{SO(2n)}, \mathbb{Z})$ la classe d'Euler de $B_{SO(2n)}$ et soit $P \in I^{n}(SO(2n))$ le polynôme tel que $w(P) = r(u)$. Pour tout objet ξ de $\mathfrak{F}(SO(2n))$, on appelle caractère d'Euler de ξ le caractère $\chi_{\xi} = S_{P,u}(\xi)$. Pour $n = 2$, c'est le caractère différentiel décrit au n° 3 (exemple).

Lorsque ξ est plat, le caractère d'Euler peut se calculer comme suit. Soit $S^{2n-1}\xi$ le fibré en sphères associé à ξ. Notons ω la forme volume invariante par $SO(2n)$ sur la sphère S^{2n-1} telle que $\int_{S^{2n-1}} \omega = 1$. La connexion de ξ permet de projeter les vecteurs de $S^{2n-1}\xi$ sur les vecteurs verticaux et par conséquent définit une forme $\tilde{\omega}$ sur $S^{2n-1}\xi$ telle que, pour toute application $\alpha : S^{2n-1} \to S^{2n-1}\xi$ associée à un élément de E_{ξ}, on ait $\omega = \alpha^{*}\tilde{\omega}$. Puisque la projection $\pi : S^{2n-1}\xi \to M_{\xi}$ définit un homomorphisme surjectif $H_{2n-1}(S^{2n-1}\xi) \to H_{2n-1}(M_{\xi})$, pour tout cycle $z \in Z_{2n-1}(M_{\xi})$, il existe un cycle $y \in Z_{2n-1}(S^{2n-1}\xi)$ tel que $z \sim \pi y$. On vérifie que l'on a $\chi_{\xi}(z) = \int_{y} \tilde{\omega}$. Par ce

procédé, on peut du reste définir un caractère de degré m pour tout objet plat de $\mathfrak{G}(SO(m))$, même si m est impair (cf. [1]).

Soit χ l'élément $s_{P,u}$ de $H^{2n-1}(B_{SO(2n)^o}, R/\mathbb{Z})$. On peut le considérer comme un homomorphisme de $H_{2n-1}(B_{SO(2n)^o})$ dans $R/\mathbb{Z}$. Pour $n = 1$, χ est l'isomorphisme canonique de $H_1(B_{SO(2)^o}) = SO(2)^o$ sur $R/\mathbb{Z}$.

8.1 THÉORÈME.- Pour tout n, l'image de $\chi : H_{2n-1}(B_{SO(2n)^o}) \to R/\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Soit en effet Γ un sous-groupe fini de $SO(2n)$ opérant librement dans S^{2n-1}. Soit ξ la fibration principale de groupe $SO(2n)$ définie par $SO(2n) \times_\Gamma S^{2n-1} \to \Gamma\backslash S^{2n-1}$. Elle est munie d'une connexion plate canonique. La méthode de calcul indiquée plus haut donne $\chi_\xi(M_\xi) = \frac{1}{\text{Card } \Gamma} \mod \mathbb{Z}$. Puisque Card Γ est arbitraire et que χ_ξ se factorise en $\chi \circ b^o_\xi$, ceci démontre le théorème.

On sait que $H^*(B_{SO(2n)^o}, R/\mathbb{Z})$ est la cohomologie du complexe des cochaînes standard sur $SO(2n)$ à valeurs dans $R/\mathbb{Z}$. Dans [1], Cheeger et Simons indiquent comment on obtient des cocycles standard appartenant à la classe χ. Soit e un point de S^{2n-1}. Une suite $\sigma = (s_0, \ldots, s_{2n-1}) \in SO(2n)^{2n}$ est dite générique si les $s_i e$ forment une base de R^{2n}. Pour toute suite générique $\sigma = (s_0, \ldots, s_{2n-1})$, on note $\hat{\sigma}$ le simplexe géodésiquement convexe de S^{2n-1} ayant pour sommets les points $s_i e$. On définit une fonction v à valeurs dans $R/\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des suites génériques en posant $v(\sigma) = \overline{\omega(\hat{\sigma})}$ (c'est-à-dire que $v(\sigma)$ est le volume normalisé de $\hat{\sigma}$ modulo $\mathbb{Z}$). On a $v(h\sigma) = v(\sigma)$ pour tout $h \in SO(2n)$. Si la suite $(s_0, \ldots, s_{2n}) \in SO(2n)^{2n+1}$ est telle que, pour tout i, la suite $\sigma_i = (s_0 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_{2n})$ soit générique, alors $\Sigma (-1)^i \widehat{\sigma_i}$ est un cycle de degré $2n - 1$ dans S^{2n-1} et par suite

$\Sigma (-1)^i v(\sigma_i) = 0$. D'après un résultat de C. Moore ([8]), il existe des $(2n - 1)$-cocycles à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ayant v pour restriction à l'ensemble des suites génériques et tous les cocycles qui prolongent v sont cohomologues. On montre que leur classe de cohomologie est χ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CHEEGER - J. SIMONS - Differential characters and geometric invariants, (preprint).

[2] S. S. CHERN - J. SIMONS - Some cohomology classes in principal fiber bundles and their application to riemannian geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68 (1971), 791-794.

[3] S. S. CHERN - J. SIMONS - Characteristic formes and geometric invariants, Annals of Math., (à paraître).

[4] J. L. HEITSCH - H. BLAINE LAWSON - Transgressions, Chern-Simons invariants and the classical groups, (preprint).

[5] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU - Foundations of differential geometry II, Interscience, N. Y. 1969.

[6] S. KOBAYASHI - T. OCHIAI - G-structures of order two and transgression opetors, J. of Diff. Geometry, 6 (1971), 213-230.

[7] J. MILLSON - Ph. D. thesis, Berkeley (1973).

[8] C. MOORE - Extension and low dimensional cohomology of locally compact groups, Trans. Am. Math. Soc., 113 (1964), 40-63.

[9] M. S. NARASHIMAN - S. RAMANAN - Existence of universal connections, Am. J. Math., 83 (1961), 563-572 ; 85 (1963), 223-231.

[10] J. SIMONS - Characteristic forms and transgression II : Characters associated to a connection, (preprint).