SÉMINAIRE N. BOURBAKI

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 439, p. 58-68

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__58_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 439-01
26e année, 1973/74, n° 439 Novembre 1973

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR SUR UNE VARIÉTÉ COMPACTE

[d'après P. GILKEY]

par Y. COLIN DE VERDIÈRE

Soient M une variété riemannienne compacte sans bord, C^∞ et de dimension d, Δ le laplacien sur les fonctions $M \to \mathbb{R}$ qui est un opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0 (par rapport à l'élément de volume riemannien v_M). Δ admet des valeurs propres $\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ (chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité). Minakshisundaram et Pleijel [MP] ont montré l'existence d'un développement asymptotique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t) \underset{t \to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-d/2} \left(\sum_{\ell = 0}^{\infty} a_\ell t^\ell \right) \qquad \text{avec} \quad a_0 = \mathrm{vol}(M) .$$

La démonstration consiste à étudier l'équation de la chaleur

$$(H) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 \\ u\big|_{t=0} = f . \end{cases}$$

Si $e(t,x,y)$ désigne la solution fondamentale de (H), i.e. $u(t,x) = \int_M e(t,x,y) f(y) v_M(y)$, on construit des paramétrix $p_k(t,x,y)$ qui vérifient $|e(t,x,y) - p_k(t,x,y)| \leq C t^{k+1}$, avec p_k de la forme :

$$p_k(t,x,y) = (4\pi t)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t} \right) \cdot (U_0(x,y) + \ldots + t^k U_k(x,y)).$$

Il n'est pas difficile de voir que si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base orthonormée de fonctions propres, on a : $e(t,x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n) \varphi_n(x) \varphi_n(y)$, on en déduit le

développement asymptotique cherché sous la forme :

$$\Big| \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n) - (4\pi t)^{-d/2} \cdot \Big(\sum_{\ell=0}^{k} t^{\ell} \int_M U_\ell(x,x) v_M(x) \Big| \leq C t^{k+1} \ .$$

Mac-Kean et Singer [MS] ont repris cette question et calculé les coefficients a_1 et a_2 en utilisant des considérations algébriques a priori et en identifiant les coefficients à l'aide de cas particuliers. Ils montrent que les a_ℓ sont de la forme $a_\ell = \int_M P_\ell(R) v_M$, où P_ℓ sont des polynômes universels de la courbure et de ses dérivées covariantes. En coordonnées locales les P_ℓ peuvent donc s'écrire : $P_\ell(R)v_M = |\text{dét } g^{ij}|^{-\frac{1}{2}} . Q_\ell((\text{dét } g^{ij})^{-1}, D^\alpha g^{ij}) |dx|$, où les Q_ℓ sont des polynômes universels. Notamment, on a :

$$P_1(R) = \frac{1}{6}\tau \quad ; \quad P_2(R) = \frac{1}{360}(2|R|^2 - 2|\rho|^2 + 5\tau^2) \ .$$

[Pour des démonstrations détaillées voir [BGM].]

Ces développements asymptotiques existent pour les opérateurs elliptiques auto-adjoints ≥ 0 , A opérant sur les sections d'un fibré hermitien. Cela résulte essentiellement des travaux de Seeley [S_1] et [S_2] et se fait à l'aide de techniques d'opérateurs pseudo-différentiels qui permettent de construire dans ce cas général des paramétrix jouant le rôle des p_k . Nous résumons ici la présentation que donne Gilkey [G] de cette démonstration, ainsi que certaines propriétés générales des coefficients.

I. Exposé des résultats et exemples

Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes de dimension p sur une variété compacte M de dimension d (tout est C^∞). Un (E,F)-opérateur différentiel A d'ordre m s'écrit au moyen de trivialisation de E et F au-dessus d'une carte U de M : $Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha f(x)$, $f \in C^\infty(U ; \mathbb{R}^p)$;

où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\ldots(\frac{\partial}{\partial x_d})^{\alpha_d}$ et $A_\alpha(x) \in L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$. Le symbole d'ordre k de A dans ces cartes est défini par $\sigma_k(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x)\xi^\alpha$ $(\xi \in \mathbb{R}^d)$. Le symbole principal σ_m a une interprétation intrinsèque à l'aide du fibré cotangent : $\sigma_m(x,\xi)$ s'interprète comme un élément de $L(E_x, F_x)$ que l'on peut décrire de la manière suivante si $g \in C^\infty(E)$, avec $g(x_o) = e$ et $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ avec $df(x_o) = \xi_o$, on a

$$\lim_{t\to\infty} (t^{-m}.e^{-itf(x_o)}.A(e^{itf(x)}\, g(x))(x_o) = \sigma_m(x_o, \xi_o)(e) .$$

Exemple.- Pour le laplacien Δ , on a $\sigma_2(\Delta)(x,\xi) = \|\xi\|^2$.

L'opérateur A est dit elliptique si $\forall\ (x,\xi) \in T^*(X)\setminus 0$, $\sigma_m(x,\xi) \in GL(E_x, F_x)$. On supposera ici E et F muni de structures hermitiennes $\langle\ ,\ \rangle_{E_x}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{F_x}$, et M d'une densité $v(x)$. On a alors des produits scalaires globaux pour les sections de E : $(f,g)_E = \int_M \langle f(x), g(x)\rangle_{E_x} v(x)$ et de même pour F . Soit A un (E,E)-opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0 (i.e. $(Af,g)_E = (f,Ag)_E$ et $(Af,f)_E \geq 0$), il admet une résolution spectrale $(\lambda_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $0 \leq \lambda_o \leq \lambda_1 \leq \ldots$ et φ_n un système orthonormé complet de sections propres (i.e. $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$). La solution f de l'équation de la chaleur (H_A) associée à A :

$$(H_A)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + Af = 0 \\ f\big|_{t=0} = g \qquad\qquad (\text{i.e. } f = \exp(-tA).g\ ) \end{cases}$$

peut s'écrire $f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n)(g,\varphi_n)_E\varphi_n(x)$, ou encore

$$f(t,x) = \int_M E_A(t,x,y)g(y)v(y)$$

avec $E_A(t,x,y)\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t).(\eta,\varphi_n(y))_{E_y}.\varphi_n(x)$ $(\eta \in E_y)$ et donc :

$$Tr_x(E_A(t,x,x)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)\|\varphi_n(x)\|^2 .$$

Notre but est de montrer comment on peut trouver le comportement asymptotique quand $t \to 0^+$ de la mesure $Tr_x(E_A(t,x,x)).v(x)$ et par suite de sa masse totale $h_A(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)$.

Exemple 1.- E est le fibré $\Lambda^k(T^*M)$ sur M , A est le laplacien sur les k-formes. Le développement asymptotique a été trouvé par Gaffney [GA] et précisé par MacKean et Singer [MS], puis par Patodi [P] qui a montré que les relations faciles :

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_\ell^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \frac{d}{2} \\ (4\pi)^{d/2} \chi(M) & \text{si } \ell = \frac{d}{2} \end{cases}$$

proviennent de relations locales déjà vérifiées par les $U_i^k(x,x)$; ce qui donne une expression de $\chi(M)$ sous forme d'une intégrale qui généralise la formule de Gauss-Bonnet en dimension 2 .

Exemple 2.- D un (E,F)-opérateur elliptique, $A_1 = D^*D$, $A_2 = DD^*$ sont des opérateurs elliptiques auto-adjoints ≥ 0 sur E et F respectivement. Posant $\Gamma_\lambda(A_i) = \{f | A_i f = \lambda f\}$; pour $\lambda \neq 0$, D est un isomorphisme de $\Gamma_\lambda(A_1)$ sur $\Gamma_\lambda(A_2)$, pour $\lambda = 0$, on a $\Gamma_0(A_1) = \mathrm{Ker}(D)$, $\Gamma_0(A_2) = \mathrm{Ker}(D^*)$. On a donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{Indice}(D) = \dim(\Gamma_0(A_1)) - \dim(\Gamma_0(A_2))$ et $h_{A_1}(t) - h_{A_2}(t) = \mathrm{Indice}(D)$. Le comportement asymptotique des h_{A_i} permet donc théoriquement un calcul de l'indice de D . L'idée de Gilkey a été de trouver des propriétés algébriques de ces coefficients pour pouvoir ensuite les calculer dans le cas d'opérateurs géométriques.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THÉORÈME.- Sous les hypothèses précédentes (A un (E,E)-opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0) :

(i) La série $h_A(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n)$ converge pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et admet quand $t \to 0^+$ un développement asymptotique qui s'écrit

$$h_A(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{\frac{k-d}{m}} . U_k(A) .$$

(ii) $U_k(A) = \int_M \mu_k(A)$ où la mesure $\mu_k(A)$ ne dépend que localement de A .

(iii) Si $m = 2$ et que $\sigma_2(A)(x,\xi) = a(x,\xi).1_{E_x}$, où $a : T^*(M) \setminus 0 \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction polynome homogène de degré 2 , on peut écrire $\mu_k(A)$ dans une carte locale $U \times \mathbb{R}^p$:

$$\mu_k(A)(x) = |\text{dét}(a)|^{-\frac{1}{2}} P_{p,d,k}(A , (\text{dét}(a))^{-1}) |dx| ,$$

où $P_{p,d,k}$ est un polynôme universel par rapport aux coefficients de A , à leurs dérivées partielles et à $(\text{dét } a)^{-1}$ avec $\text{dét}(a) = |a^{ij}|$ où $a(x,\xi) = \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$. De plus $\mu_k(A)$ est nulle pour k impair.

Remarques.- 1) On peut en déduire le comportement asymptotique des valeurs propres par un théorème taubérien : $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} C_{m,d} . \left(\frac{n}{U_o(A)}\right)^{\frac{m}{d}}$.

2) Au lieu d'étudier la fonction $h_A(t)$, on peut étudier après s'être ramené à un opérateur injectif la série $\zeta_A(s) = \Sigma (\lambda_n)^{-s}$. On montre à l'aide du développement asymptotique de $h_A(t)$ que cette fonction qui n'est définie a priori que pour Re(s) assez grand se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et que la fonction $\Gamma(s)\zeta_A(s)$ a des pôles simples aux points $-\frac{k}{m}$ $(k \geq -d)$ avec

$\text{Rés}(\Gamma(s)\zeta_A(s))\Big|_{-\frac{k}{m}} = U_{\frac{k+d}{m}}(A)$ et en particulier $\zeta_A(0) = U_{\frac{d}{m}}(A)$.

II. Principe de la démonstration

Nous supposons connue l'unicité (évidente) et l'existence de la solution de l'équation de la chaleur (H_A) . Nous nous intéressons à un procédé de calcul du développement asymptotique.

On utilise le calcul fonctionnel pour l'opérateur A , i.e. on écrit $\exp(-tA) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}(A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda$ où γ est un chemin qui entoure $\mathbb{R}^+$ et donc le spectre de A . Plus précisément $\varepsilon > 0$ étant donné, on pose $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \varepsilon \text{ et } |\text{Im}(z)| > \varepsilon\, \text{Re}(z)\}$ et $\gamma = \gamma_\varepsilon = b\Omega_\varepsilon$. Dans la suite, on pose $\Omega = \Omega_{\varepsilon/2}$. On va approcher $(A - \lambda I)^{-1}$ dans Ω en utilisant un calcul des opérateurs pseudo-différentiels dépendant du paramètre complexe λ qui donne une approximation d'autant meilleure que $|\lambda|$ est grand.

1. Les symboles S^k_Ω et les opérateurs Ψ^k_Ω

a) Cas d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$

On pose $S^k_\Omega(U) = \{a(x,\xi,\lambda) : U \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to L(\mathbb{C}^p)$, C^∞ en x et ξ , analytique en λ , et tels que, pour $x \in K \subset\subset U$, on ait :

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a(x,\xi,\lambda)| \le C^{\alpha,\beta}_K (1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{k - |\alpha|}\}.$$

On dira que $A(\lambda) \in \Psi^k_\Omega(U)$ si $A(\lambda)$ peut s'écrire :

$$A(\lambda)f(x) = \int e^{i\langle \xi, x-y\rangle} . a(x,\xi,\lambda) f(y)\, dy\, \text{đ}\xi$$

avec $a \in S^k_\Omega(U)$, $\text{đ}\xi = (2\pi)^{-d}\, d\xi$ et l'intégrale est prise au sens des intégrales oscillantes. On note $a = \sigma(A)$.

On a les propriétés suivantes :

(i) $A(\lambda) \in \Psi^k_\Omega$ et de symbole à support x-compact, alors pour $k < k(n,s,s')$,

on a : $\|A(\lambda)u\|_s \leq C.(1 + |\lambda|)^{-n}\|u\|_{s'}$, où $\|u\|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$.

(ii) Si $A \in \Psi_\Omega^k$, $B \in \Psi_\Omega^{k'}$, $AB \in \Psi_\Omega^{k+k'}$ et $\sigma(AB) \sim \sum_\alpha D_\xi^\alpha a D_x^\alpha . b/\alpha!$ ($a = \sigma(A)$ et $b = \sigma(B)$). [$a \sim \sum_m a_m$, $a_m \in S_\Omega^{-k_m}$, $k_m \nearrow$, signifie $\forall N$, pour M assez grand $a - \sum_1^M a_m \in S_\Omega^{-N}$.]

(iii) La classe $\Psi_\Omega^k(U)$ est invariante par difféomorphisme.

b) Cas d'une variété compacte M

A cause de (iii), on peut définir $\Psi_\Omega^k(M)$ comme la classe d'opérateurs qui peuvent s'écrire dans un atlas fini $(U_i)_{i\in I}$, $Af = \sum_i \psi_i P_i \varphi_i f_i$ avec f_i = expression de f dans la carte locale U_i , φ_i et $\psi_i \in \mathcal{D}(U_i)$, $P_i \in \Psi_\Omega^k(U_i)$.

2. Approximation de $(A - \lambda I)^{-1}$ et de $\exp(-tA)$

On cherche à construire des $A_k(\lambda) \in \Psi_\Omega^{-m}(M)$ tels que :

(2.1) $\quad A_k(\lambda) \circ (A - \lambda I) - I \in \Psi_\Omega^{-k-1}(M)$.

Il suffit de faire la construction dans des cartes locales U . En effet, si on a : $A_k^U(\lambda) \circ (A - \lambda I) - I \in \Psi_\Omega^{-k-1}(U)$, on prendra : $A_k(\lambda) = \Sigma \psi_U A_k^U(\lambda)\varphi_U$ où ψ_U et $\varphi_U \in \mathcal{D}(U)$, $\sum_U \psi_U = 1$ et $\varphi_U = 1$ dans un voisinage du support de φ_U . En construisant de manière analogue une paramétrix à droite, on montrerait l'unicité de $A_k(\lambda)$ mod. $\Psi_\Omega^{-k-1-m}(M)$. On va construire par récurrence le symbole de A_k^U sous la forme $d_0 + \ldots + d_k$ avec $d_j \in S_\Omega^{-j-m}(U)$. En utilisant la formule

de composition des symboles, on obtient les équations :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} d_o(\sigma_m - \lambda I) = I \\ \sum_{j = r + |\alpha| + m - i} D_\xi^\alpha d_r D_x^\alpha \sigma'_i / \alpha! = 0 \quad , \qquad j > 0 \ , \end{cases}$$

où $\sigma'_i = \sigma_i$ pour $i < m$ et $\sigma'_m = \sigma_m - \lambda I$.

Les équations se résolvent et donnent dans le cas plus facile où

$\sigma_m(x,\xi) = a(x,\xi).\mathbb{1}_{E_x}$

$$(2.3)\qquad d_j(x,\xi,\lambda) = \sum_{s=1}^{k_j} d_{j,s}(x,\xi) d_o^s(x,\xi,\lambda) \ ,$$

où $d_{j,s}$ est homogène de degré $ms - j - m$ en ξ et est un polynôme par rapport aux coefficients de A et à leurs dérivées.

Remarque.- A elliptique auto-adjoint ≥ 0 implique que $\sigma_m(x,\xi)$ est hermitien > 0 , cela permet de montrer que $d_o \in S_\Omega^{-m}$.

En multipliant (2.1) par $(A - \lambda I)^{-1}$ à droite qui vérifie $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{s,s} \leq C.|\lambda|^{-1}$, on obtient, pour $k < k(n,s,s')$,

$$\|A_k(\lambda) - (A - \lambda I)^{-1}\|_{s,s'} \leq C.(1 + |\lambda|)^{-n} \ .$$

On pose $E_{t,k} = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma e^{-t\lambda}.A_k(\lambda)d\lambda$, on a alors $\|E_{t,k} - \exp(-tA)\|_{s,s'} \leq C.t^{n-1}$. (En effet, $\int_\gamma e^{-t\lambda}(A_k(\lambda) - (A - \lambda I)^{-1})d\lambda = \int_\gamma e^{-\lambda}.(A_k(\frac{\lambda}{t}) - (A - \frac{\lambda}{t})^{-1})d\lambda$, car A_k analytique en λ .) A l'aide des lemmes de Sobolev, on a donc des estimations analogues pour les noyaux.

Pour $k > k(n)$, et $0 < t \leq 1$, $\|E_{t,k}(x,x) - E_A(t,x,x)\|_{L(E_x)} \leq C.t^n$.

3. Calcul du développement asymptotique

Nous voulons maintenant évaluer $Tr_x(E_{t,k}(x,x))v(x)$. Soit U une carte locale en x et $\psi_U = 1$ dans un voisinage de x , pour f à support contenu dans

celui de ψ_U , on a :

$$E_{t,k}f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}\{\int_{U\times R^p} e^{i\langle\xi,x-y\rangle}\cdot\sum_{j=0}^{k} d_j(x,\xi,\lambda)\,f(y)\,dy\,\bar{d}\xi\}\,d\lambda \ .$$

Soit en posant, pour $u \in L(E)$, $\underline{u}(x) = Tr_x u$:

$$Tr_x(E_{t,k}(x,x))v(x) = (\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}\int_{R^p}\sum_{j=0}^{k}\underline{d}_j(x,\xi,\lambda)\,\bar{d}\xi\,.\,d\lambda\,)|dx| \ .$$

On est donc amené à évaluer les intégrales :

$$I_{j,s}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}\cdot\int_{R^p}\underline{d}_{j,s}(x,\xi)(a(x,\xi)-\lambda)^{-s}\,\bar{d}\xi.d\lambda \ .$$

Un passage en coordonnées polaires ($\xi = r\xi_o$, $|\xi_o| = 1$) donne :

$$I_{j,s}(t) = C(j,s,m,d,p).t^{\frac{j-d}{m}}\cdot\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{1-s+(j-d)/m}.\underline{d}_{j,s}(x,\xi_o)d\xi_o \ .$$

En particulier pour $j = 0$ (alors $s = 1$) :

$$I_{0,1}(t) = C(m,d,p).t^{-\frac{d}{m}}\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{-d/m}.d\xi_o \ .$$

L'expression de $I_{j,s}(t)$ donne le développement cherché avec :

$$(3.1)\quad \mu_k(A)(x) = \left[\sum_{s=1}^{N_k} C(k,s,m,d,p).\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{1-s+(k-d)/m}.\underline{d}_{k,s}(x,\xi_o)d\xi_o\right]|dx| .$$

On en déduit les (i) et (ii) du théorème énoncé en I.

Dans le cas où $m = 2$, on trouve des intégrales du genre :

$$(3.2)\qquad \left(\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{-\ell/2}\cdot\underline{d}_{j,s}(x,\xi_o)d\xi_o\right)|dx| \ ,$$

avec $\underline{d}_{j,s}$ polynôme homogène de degré $\ell - d$ ($\equiv j \pmod 2$) en ξ_o . De plus, $\underline{d}_{j,s}$ est un polynôme par rapport aux coefficients de A et à leurs dérivées partielles. L'intégrale (3.2) n'a aucune raison <u>a priori</u> d'être de la forme indiquée dans le (iii) du théorème de I. Un argument dû à [ABP] permet cependant de rendre cette intégrale rationnelle. La nullité pour k impair se voit facilement par

symétrie. Soient p un polynôme homogène de degré $\ell - d$ en ξ et a une forme quadratique > 0 ; posons $P(a,\xi) = p(\xi)a(\xi)^{-\ell/2}\,\omega(\xi)$, avec $\omega(\xi) =$

$i(\xi)\,d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_d$ et $f(a) = \int_{|\xi_o|=1} P(a,\xi)$. Il suffit de montrer que $f(a) = |\det a|^{-\frac{1}{2}}$. polynôme$(a^{ij}, (\det a)^{-1})$. Soit $\pi : GL(d,\mathbb{R}) \to Q$ défini par $\pi(g) = {}^t g.g$ et considérons $\hat{f}(g) = f(\pi(g))$.

$$\hat{f}(g) = \int_{|\xi_o|=1} p(\xi).\langle g\xi\,,\,g\xi\rangle^{-\ell/2}\,\omega(\xi) \ .$$

$P(a,\xi)$ est une forme fermée dans $\mathbb{R}^d \setminus 0$, donc :

$$\hat{f}(g) = \int_{\langle g\xi, g\xi\rangle=1} p(\xi)\omega(\xi) = |\det g|^{-1}.\int_{S^{d-1}} p(g^{-1}\xi)\omega(\xi) \ .$$

Or $\int_{S^{d-1}} p(g^{-1}\xi)d\xi = (\det g)^{-2(\ell-d)}.\text{Polynôme}(g^{ij})$.

On a $\hat{f}(\omega g) = \hat{f}(g)$ pour tout $\omega \in O(d)$, donc ce dernier polynôme des g^{ij} est invariant par l'action de $O(d)$, il résulte alors d'un théorème classique de la théorie des invariants que c'est un polynôme par rapport aux coefficients de $a = {}^t g.g$. Le résultat en découle en remarquant que $(\det g)^2 = \det a$.

BIBLIOGRAPHIE

[ABP] M. ATIYAH, R. BOTT et V. K. PATODI - Inventiones Math., 19 (1973), 279-330.

[BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET - Lecture notes in Math., 194 (1971), Springer-Verlag.

[G] P. GILKEY - A paraître dans Advances in Mathematics.

[GA] M. P. GAFFNEY - Comm. Pure and Applied Math., XI (1958), p. 535-545.

[MS] H. P. McKEAN et I. M. SINGER - Journal of differential geometry, 1 (1967), p. 43-69.

[MP] S. MINAKSHISUNDARAM et A. PLEIJEL - Canad. J. Math., 1 (1949), p. 242-256.

[P] V. K. PATODI - J. of differential geometry, 5 (1971), p. 233-249.

[S_1] R. T. SEELEY - Proc. of Symp. in pure math., X (1967), p. 288-307.

[S_2] R. T. SEELEY - Amer. J. of Math., 91 (1969), p. 963-983.