SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JOSEPH LE POTIER

Le problème des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$-analytiques compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 449, p. 255-272

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__255_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 449-01
26e année, 1973/74, n° 449 Juin 1974

LE PROBLÈME DES MODULES LOCAUX POUR LES ESPACES $\mathbb{C}$-ANALYTIQUES COMPACTS

[d'après A. DOUADY et J. HUBBARD]

par Joseph LE POTIER

1. Introduction

Tous les espaces analytiques considérés sont complexes et peuvent avoir des éléments nilpotents.

Soient X_o un espace analytique compact et (S,s) un germe d'espace analytique. On appelle déformation de X_o paramétrée par (S,s) un espace analytique $X \to S$ propre et plat au-dessus de S, muni d'un isomorphisme

$$i : X(s) \xrightarrow{\sim} X_o .$$

On considère le foncteur $(S,s) \mapsto F(S,s)$ défini sur la catégorie des germes d'espaces analytiques et à valeurs dans Ens qui au germe (S,s) associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de X_o paramétrées par (S,s). Même si X_o est lisse, ce foncteur n'est pas en général représentable ; cependant, dans ce dernier cas, il est semi-représentable au sens suivant :

Il existe un germe d'espace analytique (H,h) et une déformation Ξ de X_o paramétrée par (H,h) tels que pour toute déformation X de X_o paramétrée par (S,s) il existe un morphisme $f : (S,s) \to (H,h)$ tel que $f^*(\Xi)$ soit isomorphe à X (comme déformation de X_o) ; de plus, l'application linéaire tangente à f en s est déterminée de façon unique par cette condition [3].

Dans [1], A. Douady et J. Hubbard donnent une méthode pour montrer que cet énoncé reste vrai même si X_o a des singularités. Les détails de la démonstration ont été exposés au Séminaire Douady-Verdier, 1973/74, à l'E.N.S. Signalons que H. Grauert a lui aussi donné une démonstration.

2. La variété des polycylindres $P(K,X)$

2.1 Soit K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$; on note $\underline{B}_K$ le faisceau qui associe à un ouvert U de K l'algèbre des fonctions continues sur U et holomorphes sur $\overset{\circ}{K} \cap U$, et $B(K) = H^0(K,\underline{B}_K)$.

DÉFINITION.- On appelle sous-espace privilégié de K un couple (Y,A) formé d'un sous-espace topologique de K et d'une algèbre de Banach A quotiente de $B(K)$ par un idéal direct (*) I admettant une résolution finie directe

$$0 \to B(K)^{r_n} \to B(K)^{r_{n-1}} \to \dots \to B(K)^{r_1} \to I \to 0$$

et dont le support soit Y .

Dans la suite, on notera $A = B(Y)$.

DÉFINITION.- Soient Y un sous-espace privilégié de K, et $L \subset K$ un autre polycylindre. On dit que L est Y-privilégié s'il existe une résolution finie directe

$$0 \to B(K)^{r_n} \to \dots \to B(K)^{r_1} \to B(K) \to B(Y) \to 0$$

telle que la suite

$$0 \to B(L)^{r_n} \to \dots \to B(L)^{r_1} \to B(L)$$

obtenue en appliquant $. \otimes_{B(K)} B(L)$ soit encore exacte directe.

Si $L \subset K$ est un polycylindre Y-privilégié, alors la propriété énoncée est vraie pour n'importe quelle résolution de $B(Y)$. L'espace $Y \cap L$, muni de l'algèbre $B(Y \cap L) = B(Y) \otimes_{B(K)} B(L)$ est alors un sous-espace privilégié de L .

PROPOSITION 1.- Tout point $x \in K$ a un système fondamental de voisinages dans K qui sont des polycylindres Y-privilégiés.

(*) Le mot direct se rapporte toujours à la structure de Banach sous-jacente.

Si $x \in \overset{\circ}{K}$, cette proposition n'est autre que le théorème des voisinages privilégiés de Douady ; si $x \notin \overset{\circ}{K}$, la démonstration est due à G. Pourcin (cf. [2], [4]).

Soit Y un sous-espace privilégié de K ; il sera muni du faisceau d'algèbres

$$\underline{B}_Y = B(Y) \otimes_{B(K)} \underline{B}_K .$$

2.2 Etant donné un espace analytique X, on désigne par Mor(Y,X) l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de Y dans X.

PROPOSITION 2.- Mor(Y,X) peut être muni naturellement d'une structure d'espace analytique banachique.

Démonstration. Si X est un ouvert U de $\mathbb{C}^p$, Mor(Y,X) s'identifie à un ouvert de l'espace de Banach $B(Y)^p$. Si X est défini par une équation $f(x) = 0$, où $f : U \longmapsto \mathbb{C}^q$ est une application analytique d'un ouvert U de $\mathbb{C}^p$ à valeurs dans $\mathbb{C}^q$, f induit une application analytique

$$f_* : \mathrm{Mor}(Y,U) \longmapsto \mathrm{Mor}(Y,\mathbb{C}^q)$$

et alors Mor(Y,X) s'identifie au modèle $f_*^{-1}(0)$ d'espace analytique banachique défini par f_*.

Supposons maintenant X quelconque. Alors $\mathrm{Mor}^o(Y,X)$, ensemble des "petits" morphismes de Y dans X, c'est-à-dire des morphismes dont l'image tombe dans un ouvert de carte, est naturellement muni d'une structure d'espace analytique. Pour mettre sur Mor(Y,X) tout entier une telle structure, la construction, identique à celle de [2], fait appel à la notion de cuirasse.

DÉFINITION.- Une 1-cuirasse sur K est la donnée

1) de deux familles finies de polycylindres $(K_i)_{i\in I}$ et $(K'_i)_{i\in I}$ contenus dans K et tels que

$$K = \bigcup \overset{\circ}{K}'_i \quad ; \qquad K'_i \subset \overset{\circ}{K}_i$$

2) pour chaque $(i,j) \in I \times I$, une famille finie de polycylindres $K_{ij\alpha}$ tels que

$$K'_i \cap K'_j \subset \bigcup_\alpha \overset{\circ}{K}_{ij\alpha} \quad ; \qquad \bigcup_\alpha K_{ij\alpha} \subset \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j$$

où $\overset{\circ}{K}_i$ (resp. $\overset{\circ}{K}_{ij\alpha}$) désigne l'intérieur de K_i (resp. $K_{ij\alpha}$) dans K .

Une telle cuirasse est dite Y-privilégiée si les polycylindres K_i et $K_{ij\alpha}$ sont Y-privilégiés.

Soient $Q = \{K_i , K'_i , K_{ij\alpha}\}$ une cuirasse Y-privilégiée, et $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ la partie de $\mathrm{Mor}(Y,X)$ constituée des morphismes $f : Y \to X$ tels que, pour tout i , $f|Y \cap K_i$ soit petit. $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ apparaît comme une partie de l'espace analytique Z noyau de la double flèche naturelle

$$\prod_i \mathrm{Mor}^0(Y_i , X) \rightrightarrows \prod_{i,j,\alpha} \mathrm{Mor}^0(Y_{ij\alpha} , X)$$

où l'on a posé $Y_i = Y \cap K_i$ et $Y_{ij\alpha} = Y \cap K_{ij\alpha}$.

Soit $\theta : Z \to Z$ le morphisme d'espaces analytiques banachiques qui à $f = (f_i)_{i\in I} \in Z$ associe le morphisme f' de Y dans X qui recolle les $f_i|\overset{\circ}{K}'_i$. Alors $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ s'identifie au noyau de la double flèche $Z \overset{1}{\underset{\theta}{\rightrightarrows}} Z$, ce qui le munit d'une structure d'espace analytique banachique. D'autre part, il résulte de la proposition 1 que lorsque Q varie, les $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ recouvrent $\mathrm{Mor}(Y,X)$; on peut voir que ces espaces se recollent comme ouverts d'un espace analytique banachique.

DÉFINITIONS.- Soit $G(K)$ l'espace analytique banachique des sous-espaces privilégiés de K : il s'identifie à un ouvert de la grassmannienne des idéaux directs de $B(K)$. Si S est un espace analytique banachique, on appelle sous-espace privilégié S-anaplat de $S \times K$ un morphisme $Y : S \to G(K)$.

Un espace analytique $X \to S$ au-dessus de S est dit relativement de présentation finie, si, localement, on peut le réaliser comme sous-espace de

$S' \times U$ (S' ouvert de S et U ouvert de $\mathbb{C}^p$) dans lequel il est défini par une équation à valeurs dans $\mathbb{C}^q$.

La proposition 2 s'étend au cadre relatif : soient Y un sous-espace privilégié S-anaplat de $S \times K$, $X \to S$ un espace analytique relativement de présentation finie, et $\mathrm{Mor}_S(Y,X)$ l'ensemble des couples (s,f) , où $s \in S$ et $f : Y(s) \to X(s)$ un morphisme. Alors la méthode ci-dessus permet de montrer que $\mathrm{Mor}_S(Y,X)$ porte une structure naturelle d'espace analytique banachique au-dessus de S . Ceci s'applique en particulier si l'on prend $S = G(K)$ et pour Y le sous-espace "universel" $\underline{Y}$ de $G(K) \times K$ correspondant à l'identité de $G(K)$ [4].

2.3 Soit X un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

DÉFINITION.- On dit qu'un morphisme $f : K \to U$ est transverse à X s'il existe, au voisinage de $f(K)$, une résolution

$$0 \to L_n \to \dots \to L_o \to \underline{O}_X \to 0$$

de $\underline{O}_X$ par des $\underline{O}_U$-modules libres et de type fini, telle que le complexe $H^o(K , f^*(L.))$ soit exact direct.

Si $f : K \to U$ est un morphisme transverse à X , alors $f^{-1}(X)$, muni de l'algèbre $H^o(K , f^*(\underline{O}_X))$ est un sous-espace privilégié de K . L'ensemble des morphismes de K dans U transverses à X forme un ouvert que nous désignerons par $\mathrm{Mor}_{\pitchfork X}(K,U)$.

PROPOSITION 3.- Le morphisme naturel

$$\Phi : \mathrm{Mor}_{\pitchfork X}(K,U) \to \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y} , G(K) \times X)$$

d'application sous-jacente $\hat{f} \mapsto (\hat{f}^{-1}(X) , \hat{f}|Y)$ est lisse. De plus, en un point (Y,f) de l'image, l'espace tangent est un $B(Y)$-module libre de rang n .

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(K,U) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{G(K)}(G(K)\times K\,,\, G(K)\times U) \\ \Phi\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\, G(K)\times X) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\, G(K)\times U)\ . \end{array}$$

Il induit un plongement ouvert de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(K,U)$ dans le produit fibré associé à ce diagramme : en effet, un élément du produit fibré est un triplet $(Y,f,\hat{f})$, où $Y \in G(K)$, $f \in \mathrm{Mor}(Y,X)$, $\hat{f} \in \mathrm{Mor}(K,U)$, tel que $\hat{f}|Y = f$; au voisinage de l'image d'un point $\hat{f}_o \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(K,U)$, on a $\hat{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(K,U)$; alors $\hat{f}^{-1}(X) \supset Y$ dans $G(K)$; comme l'égalité $\hat{f}^{-1}(X) = Y$ est vraie au point $(\Phi(\hat{f}_o)\,,\hat{f}_o)$, elle sera encore vraie au voisinage, ce qui montre que $(Y,f,\hat{f}) = (\Phi(\hat{f})\,,\hat{f})$.

Or, le morphisme vertical de droite est lisse ; il en est donc de même de Φ. Il en résulte que l'image de Φ, que nous noterons $P^o(K\,;X,U)$, est un ouvert lisse. Si (Y,f) est un point de cette image, soient I_Y l'idéal de $B(K)$ défini par Y, et $\hat{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(K,U)$ tel que $\Phi(\hat{f}) = (Y,f)$; on a $\mathrm{Ker}\, T_{\hat{f}}\Phi = (I_Y)^n$; il en résulte que $T_{\hat{f}}\Phi$ induit un isomorphisme

$$B(Y)^n \simeq T_{(Y,f)}\, P^o(K\,;X,U)$$

qui dépend bien entendu du choix de $\hat{f}$. On vérifie cependant que la structure de $B(Y)$-module obtenue sur $T_{(Y,f)}\, P^o(K\,;X,U)$ est indépendante de f.

Supposons maintenant que X soit un espace analytique quelconque. On pose

$$P^o(K,X) = \bigcup_{(X',U')} P^o(K\,;X'\,,U') \subset \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\, G(K)\times X)$$

où X' est un ouvert de X se réalisant comme sous-espace de l'ouvert U' de $\mathbb{C}^n$; $P^o(K,X)$ est une variété dont l'espace tangent au point (Y,f) est un $B(Y)$-module libre de rang n. De plus, si $L \subset K$ est un deuxième polycylindre, soit $P^o_L(K,X)$ l'ouvert de $P^o(K,X)$ des couples (Y,f) tels que L soit

Y-privilégié ; la restriction

$$P^{o}_{L}(K,X) \to P^{o}(L,X)$$

est analytique et son application linéaire tangente au point (Y,f) est $B(Y)$-linéaire.

DÉFINITION.- Désignons par $P(K,X)$ l'ouvert de $\mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}, G(K) \times X)$ des couples (Y,f) possédant la propriété suivante : il existe un recouvrement fini de Y par des intérieurs de polycylindres K_i de K Y-privilégiés et tels que $(Y \cap K_i , f|Y \cap K_i) \in P^{o}(K_i , X)$. $P(K,X)$ s'appelle <u>variété des polycylindres de</u> X .

PROPOSITION 4.- $P(K,X)$ <u>est un ouvert lisse de</u> $\mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}, G(K) \times X)$.

La démonstration utilise deux lemmes.

LEMME 1.- <u>Soit</u> $(Y,f) \in P(K,X)$. <u>Il existe un fibré vectoriel</u> $\mathcal{Q}_{Y,f}$ <u>de rang</u> n <u>au-dessus de</u> Y <u>tel que pour tout polycylindre</u> $L \subset K$ <u>vérifiant</u> $(Y \cap L , f|Y \cap L) \in P^{o}(L,X)$ <u>on ait</u> :

$$T_{(Y \cap L , f|Y \cap L)} P^{o}(L,X) = B(Y \cap L , \mathcal{Q}_{Y,f}) .$$

<u>De plus</u>, $\mathcal{Q}_{Y,f}$ <u>dépend analytiquement de</u> (Y,f) .

<u>Démonstration</u>. Soit (K_i) un recouvrement de Y par des polycylindres Y-privilégiés et tels que $(Y \cap K_i , f|Y \cap K_i) \in P^{o}(K_i , X)$. Alors, il existe, d'après ce qui précède, un fibré vectoriel trivial $\mathcal{Q}_i$ de rang n sur $Y_i = Y \cap K_i$ tel que, pour tout polycylindre $L \subset K_i$, Y-privilégié, on ait

$$T_{(Y \cap L , f|Y \cap L)} P^{o}(L,X) = B(Y \cap L , \mathcal{Q}_i) .$$

Il en résulte que les $\mathcal{Q}_i$ se recollent pour donner un fibré vectoriel $\mathcal{Q}_{Y,f}$ répondant aux conditions demandées. La fin du lemme s'obtient en étendant cette démonstration au cas relatif.

LEMME 2.- Soit $(Y,f) \in P(K,\mathbf{X})$. Alors

$$T_{(Y,f)}\, P(K,\mathbf{X}) = B(Y,\mathfrak{Q}_{Y,f}) .$$

De plus, cette égalité est vraie au sens des espaces analytiques paramétrés par $P(K,\mathbf{X})$ et dont la fibre au-dessus du point (Y,f) est donnée par chacun des deux membres.

Démonstration. Soient $(Y_o , f_o) \in P(K,\mathbf{X})$ et $\mathcal{Q} = \{K_i , K_i' , K_{ij\alpha}\}$ une cuirasse Y_o-privilégiée et telle que $(Y_o \cap K_i , f_o|Y_o \cap K_i) \in P^o(K_i , \mathbf{X})$. Soit $P'(K_i , \mathbf{X})$ l'ouvert de $P(K_i , \mathbf{X})$ des (Y_i , f_i) tels que, pour tout (j,α) , $K_{ij\alpha}$ soit Y_i-privilégié, et posons

$$C^o = \prod_i P'(K_i , \mathbf{X}) \qquad ; \qquad C^1 = \coprod_{i,j,\alpha} P^o(K_{ij\alpha} , \mathbf{X}) .$$

Soit $Z = \operatorname{Ker} d : C^o \rightrightarrows C^1$ le noyau de la double flèche naturelle. Au voisinage de (Y_o , f_o) , $P(K,\mathbf{X})$ est le noyau d'une double flèche

$$Z \underset{\theta}{\overset{1}{\rightrightarrows}} Z$$

où θ est construite de la même manière que dans le numéro 2.2.

Considérons, au-dessus d'un voisinage de (Y_o , f_o) dans $P(K,\mathbf{X})$ les fibrés vectoriels

$$\underline{C}^o = \prod_i B(Y_i , \mathfrak{Q}_{Y,f}) \qquad ; \qquad \underline{C}^1 = \coprod_{i,j,\alpha} B(Y_{ij\alpha} , \mathfrak{Q}_{Y,f})$$

où $(Y,f) \in P(K,\mathbf{X})$, $Y_i = Y \cap K_i$, $Y_{ij\alpha} = Y \cap K_{ij\alpha}$, et soit $\partial : \underline{C}^o \to \underline{C}^1$ le morphisme défini par $(u_i) \mapsto u_i|Y_{ij\alpha} - u_j|Y_{ij\alpha}$. Soit $\underline{Z} = \operatorname{Ker} \partial$; le morphisme $T\theta : \underline{Z} \to \underline{Z}$ se factorise à travers le $P(K,\mathbf{X})$-fibré dont la fibre au-dessus de (Y,f) est $B(Y,\mathfrak{Q}_{Y,f})$ et est donné par $(u_i) \mapsto u'$ tel que $u'|\overset{\circ}{K}_i' = u_i|\overset{\circ}{K}_i'$. Le noyau $TP(K,\mathbf{X})$ de la double flèche

$$\underline{Z} \underset{T\theta}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$$

est donc bien, au-dessus de (Y,f) , $B(Y,\mathfrak{Q}_{Y,f})$.

La proposition 4 s'obtient maintenant en appliquant le lemme 2 et le

CRITÈRE DE LISSITÉ.- Soit P un espace analytique banachique ; on suppose que l'espace tangent de Zariski TP est, comme espace analytique au-dessus de P, un fibré vectoriel banachique. Alors P est lisse.

2.4 Soient $\widetilde{K}$ un compact contenu dans $\overset{\circ}{K}$, et $P(K,\widetilde{K};X)$ l'ouvert de $P(K,X)$ formé des (Y,f) tels que f induise un plongement ouvert d'un voisinage (dans Y) de $Y \cap \widetilde{K}$ dans X.

Si L est un autre polycylindre, soient $(Y,f) \in P(K,\widetilde{K};X)$ et $(Z,g) \in P(L,X)$ tels que $g(Z) \subset f(Y \cap \overset{\circ}{\widetilde{K}})$. Alors $(Z,f^{-1}g) \in P(L, Y \cap \overset{\circ}{K})$, et on définit ainsi un morphisme d'un ouvert de $P(K,\widetilde{K};X) \times P(L,X)$ dans $P(L,Y \cap \overset{\circ}{K})$.

2.5 Soient S un espace analytique banachique et $X \to S$ un espace analytique relativement de présentation finie et S-anaplat ([2], § 8). En reprenant le raisonnement du n° 2.3 dans le cadre relatif, on voit que l'ensemble $P_S(K,X)$ des triplets $(s, Y, f) \in \mathrm{Mor}_{S \times G(K)} (S \times \underline{Y}, G(K) \times X)$, où $s \in S$, $Y \in G(K)$ et $f \in \mathrm{Mor}(Y, X(s))$ tels que $(Y,f) \in P(K,X(s))$ est un ouvert S-quasi-lisse au sens suivant :

Tout point $(s,Y,f) \in P_S(K,X)$ a un voisinage ouvert W tel que la projection $W \to S$ se factorise à travers un sous-espace analytique $S_1 \subset S$ au-dessus duquel W est lisse.

On ignore si $P_S(K,X)$ est S-lisse. Cependant, on peut montrer qu'il est S-lisse au voisinage des points (s,Y,f) tels que Y vérifie la propriété suivante : il existe une famille continue d'affinités bijectives $h_t : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ paramétrée par $]0,1]$ et telle que

(1) $h_1 = 1_{\mathbf{C}^n}$;

(2) le polycylindre $K_t = h_t(K)$ soit contenu dans K et Y-privilégié ;

(3) lorsque $t \to 0$, le diamètre de K_t tend vers 0 .

Nous dirons qu'un tel Y est continûment privilégié dans K .

Bien entendu, si $\widetilde{K}$ est un compact contenu dans $\overset{\circ}{K}$, l'ensemble $P_S(K,\widetilde{K};X)$ des points (s,Y,f) de $P_S(K,\mathbf{X})$ tels que $(Y,f) \in P(K,\widetilde{K};\mathbf{X}(s))$ est un ouvert, et on étend facilement les résultats du n° 2.4.

3. 2-cuirasses

Soit $\mathbf{X}$ un espace analytique de dimension finie et compact. Une 2-cuirasse sur $\mathbf{X}$ est constituée par les données suivantes :

1) données fixes :

a) un ensemble simplicial fini tronqué à l'ordre 2

$$I_2 \overset{d}{\underset{d}{\rightrightarrows}} I_1 \overset{d}{\longrightarrow} I_o \quad ;$$

b) pour chaque $i \in I_o \cup I_1$, trois polycylindres compacts de $\mathbb{C}^n$, $K'_i \subset\subset \widetilde{K}_i \subset\subset K_i$ et pour chaque $i \in I_2$, deux polycylindres compacts de $\mathbb{C}^n$, $\widetilde{K}_i \subset\subset K_i$.

Ces données $\underline{I} = (I_\cdot , K'_\cdot , \widetilde{K}_\cdot , K_\cdot)$ constitueront le type de la cuirasse considérée.

2) données mobiles : pour chaque $i \in I_o \cup I_1 \cup I_2$, un polycylindre $(Y_i , f_i) \in P(K_i , \widetilde{K}_i ; \mathbf{X})$.

Posons $\mathbf{X}'_i = f_i(K'_i \cap Y_i)$, $\overset{\circ}{\mathbf{X}}{}'_i = f_i(\overset{\circ}{K}{}'_i \cap Y_i)$, etc.

Les données ci-dessus sont astreintes à vérifier les conditions suivantes :

(C_1) $\qquad \mathbf{X} = \bigcup_{i \in I_o} \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}'_i \quad ;$

(C_2) pour $(i,j) \in I_o \times I_o$,

$$\mathbf{X}'_i \cap \mathbf{X}'_j \subset \bigcup_{d(k)=(i,j)} \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}'_k \quad \text{et} \quad \bigcup_{d(k)=(i,j)} \mathbf{X}_k \subset \overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{X}}}_i \cap \overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{X}}}_j \quad ;$$

(C_3) pour $(i,j,k) \in I_1 \times I_1 \times I_1$,

$$X'_i \cap X'_j \cap X'_k \subset \bigcup_{d(\ell)=(i,j,k)} \overset{\circ}{\widetilde{X}}_\ell \quad \text{et} \quad \bigcup_{d(\ell)=(i,j,k)} X_\ell \subset \overset{\circ}{\widetilde{X}}_i \cap \overset{\circ}{\widetilde{X}}_j \cap \overset{\circ}{\widetilde{X}}_k \ .$$

Tout espace analytique compact admet des 2-cuirasses. De plus, les conditions C_1, C_2 et C_3 étant ouvertes dans la variété

$$\prod_{i \in I.} P(K_i , \widetilde{K}_i ; X) \ ,$$

on voit que les 2-cuirasses de type $\underline{I}$ forment une variété analytique banachique $Q(\underline{I},X)$.

Soit $X \to S$ un espace analytique banachique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de S ; alors les triplets (s,Y_i , f_i) dans

$$\prod_{i \in I.} P_S(K_i , \widetilde{K}_i ; X)$$

tels que $(Y_i , f_i) \in Q(\underline{I},X(s))$ forment un ouvert S-quasi-lisse au sens du n° 2.5, noté $Q_S(\underline{I},X)$.

DÉFINITION.- On appelle <u>cuirasse relative de type</u> $\underline{I}$ <u>sur</u> X une section de

$$Q_S(\underline{I},X) \to S \ .$$

4. Puzzles

"Un puzzle est en quelque sorte un espace analytique muni d'une 2-cuirasse livrée en pièces détachées, avec notice d'assemblage, mais qui s'assemble mal sur les bords"

DÉFINITION.- Soit $\underline{I} = (I. , K! , \widetilde{K}. , K.)$ un type de 2-cuirasses. Un <u>puzzle de type</u> $\underline{I}$ est constitué des données suivantes :

1) pour chaque $i \in I_o \cup I_1 \cup I_2$, un $Y_i \in G(K_i)$; on notera $Y'_i = Y_i \cap K'_i$, $\overset{\circ}{Y}{}'_i = Y_i \cap \overset{\circ}{K}{}'_i$, etc. ;

2) pour chaque simplexe $j \in I_1 \cup I_2$ de face i , un morphisme $f^i_j : Y_j \to \overset{\circ}{\widetilde{Y}}_i$ tel que $(Y_j , f^i_j) \in P(K_j , \widetilde{K}_j ; \overset{\circ}{\widetilde{Y}}_i)$.

Ces données doivent vérifier les conditions suivantes :

(P_1) Pour tout simplexe $\ell \in I_2$ dont deux des faces j et k ont en commun le sommet i

$$f^i_j \circ f^j_\ell = f^i_k \circ f^k_\ell \quad ;$$

(P_2) si j et $k \in I_1$ sont deux simplexes de sommet commun i, et si $y \in Y'_j$ et $z \in Y'_k$ vérifient $f^i_j(y) = f^i_k(z)$, il existe un simplexe $\ell \in I_2$ ayant j et k pour faces et $u \in \overset{\circ}{Y}_\ell$ tels que $f^j_\ell(u) = y$ et $f^k_\ell(u) = z$;

(P_3) pour tout simplexe $k \in I_1$ de sommets i et j et tout $z \in Y_k$ tels que $x = f^i_k(z)$ et $y = f^j_k(z)$ appartiennent respectivement à Y'_i et Y'_j, il existe $k' \in I_1$ et $z' \in \overset{\circ}{Y}'_{k'}$ tels que $d(k') = (i,j)$, $f^i_{k'}(z') = x$ et $f^j_{k'}(z') = y$.

Les données $\{Y_i , f^i_j\}$ vérifiant la condition P_1 forment un espace analytique banachique, et, dans cet espace, les conditions P_2 et P_3 sont ouvertes. On note $\underline{Z}'$ l'espace analytique ainsi obtenu ; il est horrible car défini par des équations dont les applications linéaires tangentes ne sont pas directes.

Soit $\{Y_i , f^i_j\}$ un puzzle, et pour $(i,j) \in I_o \times I_o$ soit Y_{ij} l'ouvert des $x \in \overset{\circ}{Y}'_i$ vérifiant la condition suivante : il existe $k \in I_1$ tel que $d(k) = (i,j)$ et $z \in \overset{\circ}{Y}'_k$ tel que $f^i_k(z) = x$ et $f^j_k(z) \in \overset{\circ}{Y}'_j$. On voit immédiatement que les morphismes $f^j_k(f^i_k)^{-1}$ se recollent en un morphisme

$$g^j_i : Y_{ij} \to \overset{\circ}{Y}'_j$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(R_1) $g^i_i = 1$;

(R_2) $g^j_i(Y_{ij}) = Y_{ji}$;

(R_3) pour $(i,j,k) \in I_o \times I_o \times I_o$, posons $Y_{ijk} = (g^j_i)^{-1}(Y_{jk})$; alors

$Y_{ijk} \subset Y_{ik}$ et $g_j^k \circ (g_i^j | Y_{ijk}) = g_i^k | Y_{ijk}$.

Ces conditions permettent de recoller les $\overset{\circ}{Y}_i'$ suivant les morphismes g_i^j et on obtient ainsi au-dessus de $\underline{Z}'$ un espace analytique $\underline{X}'$ relativement de présentation finie et anaplat. De plus, la condition P_3 implique que $\underline{X}'$ est séparé ; l'ensemble $\underline{Z} \subset \underline{Z}'$ des points ζ , tels que $\underline{X}(\zeta)$ soit compact, est ouvert et $\underline{X} = \underline{X}' | \underline{Z}$ est propre au-dessus de $\underline{Z}$.

Soit $X \to S$ un espace analytique banachique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de S , muni d'une 2-cuirasse relative de type $\underline{I}$, $q = \{Y_i , f_i\}$. A q on associe

(1) un morphisme $\varphi_q : S \to \underline{Z}$ ayant pour application sous-jacente l'application qui associe à $s \in S$ le puzzle de type $\underline{I}$

$$\varphi_q(s) = \{Y_j(s) , f_j^i(s) = (f_i(s))^{-1} f_j(s)\} \quad ;$$

(2) un isomorphisme $\alpha_q : X \xrightarrow{\sim} \varphi_q^* \underline{X}$.

5. L'espace des modules

L'espace $\underline{Z}$ étant pathologique, on se propose de lui faire subir une "cure d'amaigrissement". Soient $\underline{Q} = \underline{Q}_{\underline{Z}}(\underline{I}, \underline{X})$ et $\pi : \underline{Q} \to \underline{Z}$ la projection canonique. Au-dessus de $\underline{Z}$, l'espace $\pi^* \underline{X}$ est muni d'une cuirasse relative canonique q_o de type $\underline{I}$, ce qui définit un morphisme $\varphi_o : \underline{Q} \to \underline{Z}$.

Soient Z le noyau de la double flèche $\underline{Q} \underset{\pi}{\overset{\varphi_o}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$ et $\Xi = \pi^* \underline{X} | Z$.

PROPOSITION 5.- *Soit $X \to S$ un espace analytique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de S . A toute $\underline{I}$-cuirasse relative q sur X , on peut associer naturellement un morphisme $\psi_q : S \to Z$ tel que $\psi_q^* \Xi \simeq X$ et $\psi_q^*(q_o) = q$.*

Démonstration. L'isomorphisme $\alpha_q : X \to \varphi_q^* \underline{X}$ permet de transporter la cuirasse q, ce qui donne un morphisme $\psi_q : S \to \underline{Q}$ tel que $\pi \circ \psi_q = \varphi_q$ et $\psi_q^*(q_o) = q$; par fonctorialité, $\varphi_q = \varphi_o \circ \psi_q$ d'où il résulte que ψ_q se factorise par Z.

Nous énonçons maintenant le principal résultat.

THÉORÈME.- Soit X_o un espace analytique compact. Il existe sur X_o une 2-cuirasse p_o de type $\underline{I}$ telle que, si z_o désigne le point correspondant de Z,

(1) il existe un sous-espace H de dimension finie de Z tel que, au voisinage de z_o, Z soit isomorphe à un produit $H \times V_o$ de H par une variété banachique V_o, et tel que

(2) $X_H = \Xi | H$ soit une déformation verselle de X_o.

Si $\underline{I} = (I., K!, \widetilde{K}., K.)$ et $\underline{\hat{I}} = (I., \hat{K}!, \hat{\widetilde{K}}., \hat{K}.)$ sont deux types de 2-cuirasses de même ensemble simplicial sous-jacent et tels que, pour tout $i \in I.$, $K_i \subset\subset \hat{K}_i$, $\widetilde{K}_i \subset\subset \hat{\widetilde{K}}_i$, $K'_i \subset\subset \hat{K}'_i$, nous écrirons $\underline{I} \subset\subset \underline{\hat{I}}$.

On choisira la cuirasse p_o de type $\underline{I}$ sur X_o de manière qu'elle provienne d'une cuirasse $\hat{p}_o = (\hat{Y}_i, \hat{f}_i)$ de type $\underline{\hat{I}}$, avec $\underline{I} \subset\subset \underline{\hat{I}}$, et telle que les $\hat{Y}_i$ soient continûment privilégiés dans $\hat{K}_i$ au sens du n° 2.5. Au voisinage du point $\hat{z}_o$ correspondant à $\hat{p}_o$, $\mathcal{Q}_{\underline{Z}}(\underline{\hat{I}}, \underline{X})$ est lisse au-dessus de $\underline{Z}$; on peut donc trouver au voisinage de $\zeta_o = \pi(z_o)$ une cuirasse relative $\hat{\sigma}$ de type $\underline{\hat{I}}$ et passant par $\hat{z}_o$ sur $\underline{X}$; soit σ la cuirasse relative de type $\underline{I}$ induite au voisinage de ζ_o.

Le théorème sera la conséquence de deux lemmes.

LEMME 1.- Avec les notations ci-dessus, $\Sigma = \sigma^{-1}(Z)$ est de dimension finie au voisinage de ζ_o.

Démonstration. Le morphisme $\varphi_\sigma : \underline{Z} \to \underline{Z}$ associé à σ vérifie $\varphi_\sigma = \varphi_o \circ \sigma$ et donc Σ est le noyau de la double flèche $\underline{Z} \underset{1}{\overset{\varphi_\sigma}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$. Or φ_σ, qui se factorise à travers l'espace $\hat{\underline{Z}}$ des puzzles de type $\hat{\underline{I}}$, est compact ; il suffit donc d'appliquer le critère de finitude de ([2], § 3, proposition 3).

LEMME 2.- Soient $Q_o = Q(\underline{I}, X_o)$, et, sur le Q_o-espace $Q_o \times X_o$, c_o la cuirasse relative de type $\underline{I}$ induite par 1_{Q_o}. Il existe un morphisme $\rho : (Z,z_o) \to (Q_o,p_o)$ tel que $\rho^{-1}(p_o) = \sigma(\Sigma)$ et tel que l'application linéaire tangente de $\rho \circ \psi_{c_o}$ en p_o soit de la forme $1+v$ où v est compacte.

Démonstration. $\underline{Q}$ étant $\underline{Z}$-lisse au voisinage de z_o, on peut trouver, au voisinage de z_o, une trivialisation $\chi : \underline{Q} \to \underline{Z} \times Q_o$ qui coïncide avec l'identité au-dessus de $\zeta_o = \pi(z_o)$, et telle que σ soit une section horizontale ; soit $\rho = pr_2 \circ \chi$. L'espace des cuirasses sur $\psi_{c_o}^* \Xi = Q_o \times X_o$ s'identifie à $Q_o \times Q_o$ considéré comme Q_o-espace par pr_1. Soit $\dot{\rho} : Q_o \times Q_o \to Q_o$ la rétraction $\varphi_{c_o}^*(\rho)$; du fait que $\psi_{c_o}^*(q_o) = c_o$, il résulte que $\rho \circ \psi_{c_o}$ n'est autre que $u \mapsto \dot{\rho}(u,u)$. Soit $u \mapsto (u,\dot{\sigma}(u))$ la cuirasse $\varphi_{c_o}^*(\sigma)$; de l'identité $\dot{\rho}(u,\dot{\sigma}(u)) = p_o$, on tire

$$T_{p_o}(\rho \circ \psi_{c_o}) = 1 - T_{p_o}\dot{\sigma} .$$

Le lemme vient alors du fait que $\dot{\sigma}$ se factorise au voisinage de p_o par $Q(\hat{\underline{I}}, X_o)$.

Démonstration du théorème. Elle est identique à celle du théorème de Kuranishi [3]. Avec les notations du lemme 2, $\rho : Z \to Q_o$ est relativement de dimension finie au-dessus de p_o ; il résulte de l'appendice ci-dessous qu'il existe une Q_o-variété W relativement de dimension finie telle qu'au

voisinage de z_o , $Z \subset W$. D'autre part, $T_{p_o}(\rho \circ \psi_{c_o})$ a noyau et conoyau de dimension finie ; il existe donc une sous-variété V_o de Q_o passant par p_o et telle que $T_{p_o} V_o$ soit supplémentaire du noyau ; alors $V = \psi_{c_o}(V_o)$ est une sous-variété de codimension finie dans W et l'on a au voisinage de z_o

$$V \subset Z \subset W .$$

Soit, au voisinage de z_o , $r : W \to V$ une rétraction, et posons $H = r^{-1}(z_o) \cap Z$ et $X_H = \Xi|H$. Considérons, au-dessus de $Q_H = Q_H(\underline{I}, X_H) = H \times_{\underline{Z}} \underline{Q}$, l'espace $pr_1^* X_H = pr_2^*(\pi^* \underline{X})$ muni de la cuirasse relative $pr_2^*(q_o) = \bar{q}_o$; ceci définit un morphisme $\bar{\psi}_o : Q_H \to Z$ tel que $\bar{\psi}_o^* \Xi = pr_1^* X_H$, $\bar{\psi}_o | Q_o = \psi_{c_o}$ et tel que τ désigne la section de $Q_H \to H$ définie par la cuirasse $q_o|H$ sur X_H , $\bar{\psi}_o \circ \tau$ soit l'injection $H \to Z$.

Soit $\underline{V} \subset Q_H$ un sous-espace H-lisse contenant τ et coïncidant au-dessus de z_o avec V_o ; le théorème des fonctions implicites montre que $\bar{\psi}_o | \underline{V} : \underline{V} \to W$ est un plongement au voisinage de p_o . Considérons les inclusions d'espaces analytiques :

$$H \subset \bar{\psi}_o(\underline{V}) \subset Z \subset W .$$

L'intersection des trois premiers avec $r^{-1}(z_o)$ est H ; il résulte du lemme de semi-continuité ([3], lemme 1) que $\bar{\psi}_o(\underline{V}) = Z$, ce qui donne (1) en trivialisant $\underline{V}$.

Soit $X \to S$ une déformation de X_o paramétrée par (S,s) ; une cuirasse relative q sur X passant par p_o détermine un morphisme $\psi_q : (S,s) \to (Z,z_o)$ tel que $\psi_q^* \Xi \cong X$. Posons, au voisinage de s , $f = pr_1 \circ \bar{\psi}_o^{-1} \circ \psi_q$; alors $f^* X_H \cong X$, ce qui démontre (2). Bien entendu, f n'a aucune raison d'être unique.

APPENDICE.- Soient $X \to S$ un espace analytique banachique au-dessus de S, $s \in S$ et $x \in X(s)$. Si $X(s)$ est de dimension finie au voisinage de x, X est relativement de dimension finie au voisinage de x.

Démonstration. Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E tel que, au voisinage de x, X se réalise comme sous-espace $S \times \Omega$. Au voisinage de x, on peut construire un morphisme $f : S \times \Omega \to S \times \Omega$ qui coïncide avec l'identité sur X, et dont l'application linéaire tangente verticale en x se factorise à travers un espace vectoriel de dimension finie. X est donc un sous-espace du noyau de la double flèche $S \times \Omega \underset{1}{\overset{f}{\rightrightarrows}} S \times \Omega$, noyau qui est déjà relativement de dimension finie au-dessus de S au voisinage de x.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY et J. HUBBARD - Le problème des modules locaux pour les espaces C-analytiques compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, 277, série A (1973), p. 901.

[2] A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16, 1 (1966), p. 1-98.

[3] A. DOUADY - Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, (d'après M. Kuranishi), Sém. Bourbaki n° 277, W. A. Benjamin, N.Y., 1965.

[4] G. POURCIN - Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre et déformation des singularités isolées, thèse, Orsay, 1974.