SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHÈLE VERGNE

Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 447, p. 205-226

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__205_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 447-01
26e année, 1973/74, n° 447 Février 1974

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

par Michèle VERGNE

1. Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe. On se propose de décrire, si possible, le dual $\hat{G}$ de G, c'est-à-dire l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G en fonction de "données" intrinsèques à G : soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, où G opère par la représentation coadjointe. L'idée fondamentale depuis Kirillov est d'essayer d'associer à un élément de $\mathfrak{g}^*$ une représentation unitaire de G : naïvement, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors le dual $\hat{G}$ est l'ensemble des caractères unitaires de G, et tout caractère unitaire s'écrit $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$, avec f élément de $\mathfrak{g}^*$; si $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie nilpotente et si $f \in \mathfrak{n}^*$ est telle que $f([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 0$, on associe évidemment à f le caractère e^{if}, où $(e^{if})(\exp X) = e^{if(X)}$; si $f([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) \neq 0$, on choisit alors une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension maximale parmi les sous-algèbres vérifiant $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = 0$, et on associe à f la représentation $\rho(f ; \mathfrak{h})$ induite par le caractère e^{if} du sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$ de $N = \exp \mathfrak{n}$.

1.1 Kirillov ([12]) démontre que si on choisit $\mathfrak{h}$ comme précédemment :

1.1.a $\mathfrak{h}$ vérifie la condition : $f([x,\mathfrak{h}]) = 0$ si et seulement si $x \in \mathfrak{h}$.

1.1.b $\rho(f ; \mathfrak{h})$ est irréductible et sa classe $\rho(f)$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ (vérifiant 1.1.a).

1.1.c l'application $f \longmapsto \rho(f)$ de $\mathfrak{n}^*$ dans $\hat{N}$ définit une bijection de l'ensemble $\mathfrak{n}^*/N$ des orbites de la représentation coadjointe sur $\hat{N}$.

D'autre part, $\mathfrak{n}^*/N$ et $\hat{N}$ sont munis tous deux de topologies naturelles ; on savait que l'application ρ de $\mathfrak{n}^*/N$ dans $\hat{N}$ est continue ([12], [14]). I. Brown [7] vient de prouver que c'est un homéomorphisme.

On obtient donc dans le cas nilpotent une paramétrisation aussi agréable

que possible de $\hat{N}$.

1.2 Et on est amené à penser qu'il y a une relation étroite entre les orbites de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ et le dual $\hat{G}$ de G .

[A partir de maintenant, G désignera toujours un groupe résoluble simplement connexe.]

Rappelons que si N est un groupe nilpotent simplement connexe, opérant dans un espace vectoriel réel de dimension finie par une représentation unipotente, alors toute orbite $N.x$ est fermée et simplement connexe, et le stabilisateur $N(x)$ de x est simplement connexe.

Par contre, la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ peut être très irrégulière. [Il suffit de considérer l'exemple du groupe de Mautner, i.e. le produit semi-direct $\mathbf{R} \times_s (\mathbf{C} \times \mathbf{C})$ avec $\mathbf{R}$ agissant dans $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ par $t.(z_1,z_2) = (e^{it}z_1 , e^{i\lambda t}z_2)$ où λ est irrationnel.] **Les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ ne sont pas en général localement fermées. D'autre part, si $g \in \mathfrak{g}^*$, le stabilisateur $G(g)$ n'est pas connexe en général ; G étant résoluble simplement connexe, la composante connexe $G(g)_o$ de $G(g)$ est simplement connexe. Elle a comme algèbre** de Lie $\mathfrak{g}(g) = \{X \in \mathfrak{g} , \text{tels que } g([X,Y]) = 0 \ \forall \ Y \in \mathfrak{g}\}$ et comme $g([\mathfrak{g}(g) , \mathfrak{g}(g)]) = 0$, g définit un caractère χ_g de $G(g)_o$.

1.3 Définition.- On dit que g est intégrable, si χ_g se prolonge en un caractère de $G(g)$.

Si g est intégrable, on note $\widehat{G(g)}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $G(g)$ qui se restreignent à $G(g)_o$ suivant χ_g , et $\overline{\widehat{G(g)}}$ l'ensemble des caractères de $G(g)$ triviaux sur $G(g)_o$.

Soit $O = G.g$ l'orbite de g , alors $G(g)/G(g)_o$ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(O)$ de l'orbite, et $\overline{\widehat{G(g)}}$ à $\widehat{\pi_1(O)}$; $\overline{\widehat{G(g)}}$ agit par multiplication simplement transitivement sur $\widehat{G(g)}$.

1.4 La généralisation des résultats de Kirillov au cas résoluble présentait des difficultés variées. Tout d'abord, contrairement au cas nilpotent, G n'est pas

toujours de type I (et $\hat{G}$ n'est pas un T_0-espace). D'autre part, même si G est de type I, il n'est pas en général possible d'obtenir tout élément τ de $\hat{G}$ par induction d'un caractère d'un sous-groupe fermé ([20]). Toutefois, Dixmier [8] conjecturait que si G est de type I, tout élément τ de $\hat{G}$ pouvait s'obtenir comme représentation "induite holomorphe" et le démontrait si G est algébrique.

1.5 Résolvant à la fois toutes ces difficultés, Auslander et Kostant ont démontré les théorèmes suivants (cf. [1]) :

THÉORÈME 1.- G est de type I si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(A) Toute forme $g \in \mathfrak{g}^*$ est intégrable.

(B) Toute orbite $G.g$ est localement fermée.

Supposons G de type I ; formons $B(\mathfrak{g}^*) = \{p = (g,\bar{\chi})$ avec $g \in \mathfrak{g}^*$, et $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}\}$, où G opère naturellement. Auslander et Kostant donnent un procédé d'induction holomorphe associant à tout point $p = (g;\bar{\chi})$ et $\mathfrak{h}$ sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ vérifiant certaines conditions (C_g) qu'on définira en (2.3.1), une représentation $\underline{F}(p;\mathfrak{h})$ généralisant la construction de Kirillov. (L'utilisation de ces représentations induites holomorphes est un outil essentiel de la théorie). Et ils obtiennent :

THÉORÈME 2.- Supposons G de type I.

1. Si $\mathfrak{h}$ vérifie les conditions (C_g), $\underline{F}(p;\mathfrak{h})$ est irréductible et sa classe $\underline{F}(p)$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$.

2. L'application $p \mapsto \underline{F}(p)$ définit une bijection entre $B(\mathfrak{g}^*)/G$ et $\hat{G}$.

[Les questions de continuité restent ouvertes.]

On se propose de donner une idée de la démonstration du théorème 1 (et du théorème 2,2). Elle est compliquée par le fait suivant :

comme G contient le sous-groupe distingué nilpotent connexe $N = [G,G]$ dont on connait bien le dual, on aurait pu espérer, en suivant la méthode des petits groupes de Mackey, que G est de type I si, quel que soit $\rho \in \hat{N}$, toute repré-

sentation factorielle du stabilisateur $G(\rho)$ de ρ dont la restriction à N est un multiple de ρ est de type I, et si l'action de G dans $\hat{N}$ est régulière ; mais cette dernière condition n'est pas réalisée pour tous les groupes G de type I (ex. [2], p. 88). Un résultat d'Auslander-Moore [2] permettra de résoudre cette difficulté.

On s'inspirera dans notre exposé, outre bien entendu des travaux d'Auslander-Kostant, des idées développées ultérieurement par Pukanszky ([15], [16]). On va construire des représentations factorielles $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$ qui ne sont toutes de type I que si (A) et (B) sont réalisées. (Notons que J. Brezin [5] avait obtenu un critère du type I très proche de celui du théorème 1.)

2. Construction des représentations factorielles $\underline{F}(p)$

On va montrer, dans ce paragraphe, que la condition (A) est nécessaire. Voici quelle sera notre démarche : G contient le sous-groupe nilpotent connexe $N = [G,G]$. Par applications successives de la méthode des "petits groupes" de Mackey, on construira des représentations factorielles de G , à partir de représentations factorielles de groupes de plus en plus "petits", la procédure conservant le type.

On sera ainsi amené à étudier le type de certains groupes nilpotents non connexes, apparaissant comme quotients des groupes $G(g)$; le plus typique, qui apparaît lorsqu'on applique la procédure qui va suivre au groupe S de Dixmier (cf. [9]) ayant comme algèbre de Lie $\mathcal{S}$ de base $T_1\ T_2\ X_1\ Y_1\ X_2\ Y_2\ Z$ avec les relations $[T_i, X_i] = -2\pi Y_i$, $[T_i, Y_i] = 2\pi X_i$, $[T_1, T_2] = Z$ (les autres crochets d'éléments de base étant nuls ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation), est le groupe E_λ défini sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 \times T$, où T est le tore, par la loi

$$(z,t).(z',t') = (z + z', \beta_\lambda(z,z')tt')$$

avec $\beta_\lambda((m_1,n_1),(m_2,n_2)) = \exp(2i\pi\lambda(m_1n_2 - m_2n_1))$, où λ est un nombre réel.

Ce groupe est de type I, si et seulement si λ est rationnel.

En vue d'appliquer la méthode de Mackey, on est d'abord amené à étudier le problème de l'extension des représentations irréductibles d'un groupe nilpotent connexe.

2.1 Induction holomorphe et extension des représentations irréductibles des groupes nilpotents.

Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, f un point de $\mathfrak{n}^*$ et s un automorphisme de $\mathfrak{n}$ laissant stable f, alors s laisse stable $\rho(f)$, et il existe donc un opérateur unitaire $V(s)$ défini à un scalaire de module 1 près tel que $V(s) \circ \rho(n) \circ V(s^{-1}) = \rho(s.n)$.

Il est possible de faire un choix canonique de V (théorème 2.1.4). S'il existe $\mathfrak{h}$ vérifiant (1.1.a) stable par s, alors un candidat pour $V(s)$ est

$$(V(s)\varphi)(n) = |\det {}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{h}} s|^{-\frac{1}{2}} \varphi(s^{-1}.n) .$$

Mais en général, s n'a pas toutes ses valeurs propres réelles et il est impossible de trouver $\mathfrak{h}$ vérifiant (1.1.a) stable par s : on est confronté à ce problème pour la construction des représentations du groupe de l'oscillateur harmonique, i.e. le produit semi-direct de $\mathbf{R}$ par le groupe de Heisenberg

$N_3 = \{(z,t)$, avec $z \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$, avec $(z,t).(z',t') = (z+z', 2\,\mathrm{Im}\, z\bar{z}' + t + t')\}$

et où l'action de $\mathbf{R}$ dans N_3 est donnée par : $\theta.(z,t) = (e^{i\theta}z, t)$.

La réalisation de Bargmann-Segal ([3], [19]) des représentations du groupe de Heisenberg dans un espace de fonctions entières en z permet d'obtenir une solution agréable à ce problème ([20]) et on introduit des représentations dans des espaces de fonctions holomorphes ou partiellement holomorphes.

2.1.1 Définition des représentations induites holomorphes (voir [4], ch. V)

Soient $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. On dit que $\mathfrak{h}$ est une polarisation positive au point g si $\mathfrak{h}$ vérifie :

a) $g([x,\mathfrak{h}]) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{h}$ (ceci est la condition 1.1.a, mais $x \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ et g est prolongée par linéarité).

b) $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{e}^{\mathbf{C}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

c) on a $i\,g([x,\bar{x}]) \geq 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{h}$.

On note $P^+(g)$ l'ensemble des polarisations positives au point g. On note $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ et D_o le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$; on a $g([\mathfrak{d},\mathfrak{d}]) = 0$. On se donne de plus D un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$, et un caractère unitaire χ de D dont la restriction à D_o soit e^{ig}.

On note si $X \in \mathfrak{g}$, $(X.\varphi)(u) = \frac{d}{dt}\varphi(u \exp tX)|_{t=0}$. On prolonge par linéarité à $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

On note $\Delta_{D,G}$ le quotient Δ_D/Δ_G des fonctions modulaires de D et G ; et si $\underline{K}(G ; D)$ désigne l'espace des fonctions continues sur G à support compact modulo D vérifiant $\varphi(td) = \Delta_{D,G}(d)\,\varphi(t)$, on note $\oint_{G/D} \varphi\, d\dot{g}$ l'unique forme linéaire positive G-invariante sur $\underline{K}(G ; D)$. On note $\underline{L}(g ; D ; \chi)$ le complété pour la norme $\|\varphi\|^2 = \oint_{G/D} |\varphi|^2\, d\dot{g}$, des fonctions continues à support compact modulo D , vérifiant $\varphi(td) = \Delta_{D,G}(d)^{\frac{1}{2}}\chi(d)^{-1}\varphi(t)$. On note $\underline{L}(g ; \mathfrak{h} ; D ; \chi)$ le complété dans $\underline{L}(g ; D ; \chi)$ du sous-espace des fonctions C^∞ sur G vérifiant de plus

$$X.\varphi = (-i\langle g, X\rangle + \tfrac{1}{2}(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} X))\varphi \qquad \text{quel que soit } X \in \mathfrak{h} .$$

[Cet espace s'identifie, en gros, à un espace de Hilbert de fonctions sur $GH \subset G^{\mathbb{C}}$ où $H = \exp \mathfrak{h} \subset G^{\mathbb{C}}$ vérifiant $\varphi(th) = (e^{ig}(h))^{-1}\varphi(t)$ et partiellement holomorphes.]

On note $\underline{F}(g ; \mathfrak{h} ; D ; \chi)$ la représentation de G par translation à gauche, et on dit que $\underline{F}$ est une représentation "induite holomorphe". Cette notion généralise la définition de $\rho(f ; \mathfrak{h})$ de 1.1, et en fait, les premiers résultats sont

2.1.2 ([1]) PROPOSITION.- *Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ et $D = D_o$. Alors, la représentation $\underline{F}(f ; \mathfrak{h})$ est équivalente à $\rho(f)$.*

[On démontre ceci en se ramenant au cas du groupe de Heisenberg.]

2.1.3 PROPOSITION.- *Soit s un automorphisme de $\mathfrak{n}$ laissant stable f ; alors il existe $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ stable par s .*

Si s laisse stable f et $\mathfrak{h}$, la formule

$$(V_{\mathfrak{h}}(s)\varphi)(n) = |\det \tfrac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{d}}\, s|^{-\frac{1}{2}}\varphi(s^{-1}n)$$

définit un opérateur unitaire sur $\underline{L}(f ; \mathfrak{h})$, et d'après 2.1.2 il existe un

espace de Hilbert fixe $\underline{H}$, une représentation unitaire ρ de G dans $\underline{H}$, et pour tout $\mathfrak{h} \in P^+(f)$, une isométrie $U_{\mathfrak{h}}$ de $\underline{H}$ sur $\underline{L}(f;\mathfrak{h})$.

L'un des théorèmes cruciaux de la théorie est

2.1.4 THÉORÈME (Auslander-Kostant [1]).- *L'opérateur* $V(s) = U_{\mathfrak{h}}^{-1} \circ V_{\mathfrak{h}}(s) \circ U_{\mathfrak{h}}$ *ne dépend pas du choix de la polarisation positive* $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ *stable par* s .

(On peut se reporter aussi à [4], IV.4.1, IV.4.2, IV.5.1, et VIII.2, VIII.3, pour une rédaction des théorèmes énoncés dans ce paragraphe, ou à [18]. Et ce théorème est la partie essentielle de la démonstration du 1) du théorème 2.)

Si s_1 et s_2 sont deux automorphismes laissant stable f , on a $V(s_1) \circ V(s_2) = a(s_1,s_2)\, V(s_1 s_2)$ avec $a(s_1,s_2)$ scalaire qui en général est $\neq 1$, cependant on a

2.1.5 COROLLAIRE.- *Soit* F *un groupe d'automorphismes de* $\mathfrak{n}$ *laissant stable* f , *et tel que* $[F,F] \subset \mathrm{Ad}\, N$, *alors l'application* $(\gamma,n) \mapsto V(\gamma) \circ \rho(n)$ *définit une représentation* $\nu(f)$ *du produit semi-direct de* F *par* N .

En effet, on montre qu'il existe $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ stable sous tous les éléments s de F , et on a donc $V(s_1) \circ V(s_2) = V(s_1 s_2)$.

(Voir [10], pour une extension de ce résultat.)

2.2 Méthode des petits groupes

Soient G , $N = [G,G]$; $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N et $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ la restriction des formes linéaires. G opère naturellement dans $\hat{N}$ et $\mathfrak{n}^*$, et il est clair (1.1.c) que si $f \in \mathfrak{n}^*$ le stabilisateur dans G de la représentation $\rho = \rho(f)$ est $G(f)N$.

D'après 2.1.5, on peut construire une extension canonique $\nu(f)$ de $\rho(f)$ au produit semi-direct $G(f) \times_s N$ (dont le groupe $G(f)N$ est un quotient par

le groupe (s,s^{-1}) avec $s \in N(f)$).

Soit alors $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations factorielles τ de $G(f)$ dont la restriction à $N(f)$ soit un multiple du caractère χ_f de $N(f)$. Si $\tau \in X(f)$, $\tau \otimes \nu(f)$ est une représentation de $G(f) \times_S N$; elle passe au quotient et définit une représentation $\alpha(f;\tau)$ de $G(f)N$ et on voit facilement que toute représentation factorielle de $K = G(f)N$ dont la restriction à N est un multiple de $\rho(f)$ s'obtient ainsi.

2.2.1 Par conséquent, si $X(\rho)$ est l'ensemble des classes de représentations factorielles de G qui se restreignent à N suivant la quasi-orbite transitive $G.\rho$, on a une bijection entre $X(f)$ et $X(\rho(f))$ par

$$\tau \longmapsto \operatorname{Ind}_K^G \alpha(f;\tau) = \underline{F}(f;\tau)$$

et le commutant de $\underline{F}$ est isomorphe à celui de τ de sorte que $\underline{F}$ est irréductible (resp. de type I) si et seulement si τ est irréductible (resp. de type I).

Etudions $X(f)$; si $Q(f) = \operatorname{Ker} \chi_f$, $Q(f)$ est un sous-groupe distingué de $G(f)$, et les représentations dans l'ensemble $X(f)$ sont des représentations de $G(f)/Q(f)$. On a $[G(f),G(f)] \subset N(f)$ et $[G(f),N(f)] \subset Q(f)$. Le groupe $G(f)/Q(f)$ est donc nilpotent ; si $G(f)$ était connexe, elles seraient de type I et multiples de représentations $\rho(m)$ associées à des formes linéaires.

On note $M = G(f)$, M_o la composante connexe de M , $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M ; on a $\mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{g} ; f([x,\mathfrak{n}]) = 0\}$ et $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{n}(f)$. On pose $\mathfrak{q} = \operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{n}(f)$; on a $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}(f)$, et $[\mathfrak{m},\mathfrak{n}(f)] \subset \mathfrak{q}$, de sorte que $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ est le produit direct d'une algèbre de Heisenberg par une algèbre de Lie abélienne. On note $\mathfrak{m}^*(f) = \{m \in \mathfrak{m}^* , m|\mathfrak{n}(f) = f\}$, de sorte que $\mathfrak{m}^*(f) \subset (\mathfrak{m}/\mathfrak{q})^*$. Le groupe M_o/Q est un sous-groupe nilpotent connexe fermé distingué de M/Q , et on peut appliquer à cette situation la procédure précédente ; calculons, pour $m \in \mathfrak{m}^*(f)$, $M(\rho(m)) = M(m).M_o$.

Le lemme suivant est élémentaire.

2.2.2 Lemme.- Soient $m \in \mathfrak{m}^*(f)$ et $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que $g|\mathfrak{n} = f$ et $g|\mathfrak{m} = m$, alors $\exp(\mathfrak{n}(f)).g = g + (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^{\perp}$ = i.e. $\{\ell \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\ell|\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = g\}$ et on a $M(m) = N(f)\,G(g)$.

Avec les notations de 2.2.2, on a donc $M(\rho(m)) = G(g)M_o$.

Si $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in G$, on a $u.X - X \in \mathfrak{n}$, et par conséquent $G(g) = \{u \in G$, tels que $g(u.X) = g(X)\}$ ou encore

2.2.3 $G(g) = \{u \in G\ ;\ f(u.X - X) = 0\ \forall\ X \in \mathfrak{g}\}$ et $G(g)$ ne dépend que de la restriction f de g à $\mathfrak{n}$.

D'autre part, il est clair d'après 2.2.3 que si $u \in G(g)$, u commute à M_o modulo Q ; enfin $G(g) \cap M_o = G(g)_o$, car $G(g) \cap M_o = M_o(g)$ est connexe (voir 1.2).

2.2.4 Dans les notations de 2.2.2, on note $X(g)$ l'ensemble des représentations factorielles σ de $G(g)$ dont la restriction à $G(g)_o$ soit un multiple de χ_g et $X(m)$ l'ensemble des représentations factorielles de M qui se restreignent à M_o suivant la quasi-orbite transitive $M.\rho(m)$.

. On a $X(m) \subset X(f)$.

. Si $\sigma \in X(g)$, alors $\sigma \otimes \rho(m)$ est une représentation du groupe $G(g) \times M_o$ (produit direct) qui passe au quotient $G(g)M_o$ et on a une bijection entre $X(g)$ et $X(m)$ par

$$\sigma \longmapsto \operatorname{Ind}_{G(g)M_o}^{M} \sigma \otimes \rho(m) = \tau(m\,;\sigma) ,$$

les commutants de σ et de τ sont isomorphes.

. Enfin, si l'action de M dans $\mathfrak{m}^*(f)$ est régulière, on a

$$X(f) = \bigcup_{m \in \mathfrak{m}^*(f)/M} X(m) .$$

Il est nécessaire donc d'étudier de près $X(g)$.

Notons $Q(g)$ le noyau de χ_g , il est clair qu'on a

2.2.5 g est intégrable [(1.3)] si et seulement si $G(g)/Q(g)$ est commutatif.

Dans ce cas, toutes les représentations de $X(g)$ sont factorielles et multiples des caractères $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}$.

Si g n'est pas intégrable, on introduit le centre $\overline{G(g)}/Q(g)$ de $G(g)/Q(g)$; on appelle $\overline{G(g)}$ le stabilisateur réduit de g , et comme $[G(g), G(g)] \subset N(g) \subset N(f)$, on a :

2.2.6 $\overline{G(g)} = \{a \in G(g) \ ; \ \chi_f(a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}) = 1 \ \ \forall\, b \in G(g)\}$ de sorte que $\overline{G(g)}$ ne dépend que de la restriction f de g à $\mathfrak{n}$.

On notera encore $\widehat{G(g)}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $\overline{G(g)}$ prolongeant χ_g et $\overline{G(g)}^{\circ}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $\overline{G(g)}$ triviaux sur $G(g)_o$.

La proposition suivante est cruciale ([15], ch. I, 1.1, p. 465-472).

2.2.6 PROPOSITION.- Soit $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}$; la représentation

$$\sigma(\bar{\chi}) = \mathrm{Ind}_{\overline{G(g)}}^{G(g)} \bar{\chi}$$

est une représentation factorielle de $G(g)$ qui est de classe finie. Elle est de type I si et seulement si $\overline{G(g)}$ est d'indice fini dans $G(g)$.

Donnons une idée de la démonstration de cette proposition.

On peut passer au quotient par $Q(g)$ et le seul cas non trivial est celui où $\chi_g \neq \mathrm{id}$, alors $G(g)_o/Q(g)$ est isomorphe au tore T et d'autre part, $G(g)/G(g)_o$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n = Z$; on peut choisir ([2], p. 188) une section s de $G(g)/G(g)_o$ dans $G(g)/Q(g)$ telle que $s(z)s(z') = \beta(z,z')s(z+z')$ avec β forme bilinéaire alternée sur $Z \times Z$ à valeurs dans T .

2.2.7 Le groupe $G(g)/Q(g)$ s'identifie alors au groupe Z_β des couples

(z,u) , $z \in Z$, $u \in T$, avec la loi $(z,u).(z',u') = (z+z', \beta(z,z')uu')$, et le groupe $\overline{G(g)}/Q(g)$ s'identifie au sous-groupe $\bar{Z}_\beta$ des couples (z,u) avec $\beta(z,z')^2 = \chi_g(s(z)s(z')s(z)^{-1}s(z')^{-1}) = 1$ quel que soit $z' \in Z$.

Soit Z_o le noyau de la forme bilinéaire β , Z_o peut être considéré comme un sous-groupe de Z_β ; et la restriction de $\bar{\chi}$ à Z_o est un caractère du groupe abélien Z_o ; on peut l'étendre en un caractère ψ du groupe abélien Z , et quitte à modifier la section $s(z) = (z,1)$ en $s'(z) = (z,\psi(z)^{-1})$, on peut supposer que $\bar{\chi}$ est trivial sur Z_o . Passons au quotient par Z_o ; on est ramené au cas où Z est un groupe discret dénombrable (un quotient de $\mathbb{Z}^n$) β une forme bilinéaire alternée sur $Z \times Z$ à valeurs dans T telle que $\bar{Z} = \{z \in Z$, tels que $\beta(z,z')^2 = 1 \ \forall\ z' \in Z\}$ soit fini. Soit $\bar{\chi}$ un caractère de $\bar{Z}_\beta$ dont la restriction à T soit le caractère $\chi_o(u) = u$; et on considère la représentation $\sigma(\bar{\chi})$ induite à Z_β par le caractère $\bar{\chi}$ de $\bar{Z}_\beta$.

Considérons σ_o la représentation induite par χ_o , on peut la réaliser dans $L^2(Z)$, et on peut calculer suffisamment explicitement l'algèbre de Von Neumann $R(\sigma_o)$ engendrée par σ_o et son commutant $R(\sigma_o)'$, pour montrer que si $\delta(o)$ est la masse de Dirac au point 0 de Z , $\Phi(T) = \langle T\delta(o), \delta(o)\rangle$ est une trace finie fidèle sur $R(\sigma_o)$ et $R(\sigma_o)'$ (si $f \in L^1(Z) \subset L^1(Z_\beta)$, on a $\Phi(\sigma_o(f)) = f(o)$) ; comme $\bar{Z}$ est fini, on peut réaliser $\sigma(\bar{\chi})$ comme sous-représentation de σ_o et on en déduit facilement la proposition.

2.2.8 Comme la représentation $\sigma(\bar{\chi})$ est un élément (particulier) de $X(g)$, pour que le groupe G soit de type I, il est donc au moins nécessaire que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, $\overline{G(g)}$ soit d'indice fini dans $G(g)$, mais si on change g en tg avec $t \in R$, $t \neq 0$, $G(g)$ ne change pas, et il est clair d'après 2.2.7 que $\overline{G(tg)}$ est d'indice fini dans $G(g)$ pour tout $t \neq 0$ si et seule-

ment si $\overline{G(g)} = G(g)$.

La condition (A) est donc nécessaire.

2.3 Réalisation des représentations factorielles $\underline{F}(g,\bar{\chi})$

On considère $B(\mathfrak{g}^*) = \{p = (g,\bar{\chi})$ avec $g \in \mathfrak{g}^*$, $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}\}$. On associe à $\bar{\chi}$ l'élément particulier $\sigma(\bar{\chi})$ de $X(g)$ et suivant la procédure décrite en 2.2.4 et 2.2.1, on construit la représentation factorielle suivante de $K = G(f)N$

$$\alpha(p) = \alpha(f\,;\tau(m\,;\sigma(\bar{\chi}))) = \left(\mathrm{Ind}_{G(g)M_o}^{G(f)} (\sigma(\bar{\chi}) \otimes \rho(m))\right) \otimes \nu(f)$$

et l'élément $\underline{F}(p) = \mathrm{Ind}_{K}^{G} \alpha(p)$ de $X(\rho(f))$.

Le commutant de $\underline{F}$ est isomorphe à celui de $\sigma(\bar{\chi})$, $\underline{F}$ est donc de classe semi-finie, et si $\overline{G(g)} = G(g)$, $\underline{F}$ est irréductible.

Le groupe G opère naturellement dans $B(\mathfrak{g}^*)$ et on a donc $\underline{F}(p) \sim \underline{F}(p')$ si et seulement si $p' = g.p$ avec $g \in G$. On peut montrer qu'on peut réaliser la représentation $\underline{F}(p)$ comme une représentation induite holomorphe.

2.3.1 DÉFINITION.- Soient $g \in \mathfrak{g}^*$, $f = g|\mathfrak{n}$; on dit qu'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}^C$ vérifie les conditions Cg si $\mathfrak{b}$ est une polarisation positive au point g stable par $\overline{G(g)}$ et $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}^C$ est une polarisation positive au point f stable par $G(f)$.

On montre [1] que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, il existe $\mathfrak{b}$ vérifiant les conditions Cg (voir aussi [4], IV, 4.2) et on montre que $\bar{D} = \overline{G(g)}\, D_o$ est fermé et que, quel que soit $\bar{\chi}_g \in \widehat{G(g)}$, il existe un caractère $\bar{\chi}$ de $\bar{D}$ prolongeant e^{ig} sur D_o et $\bar{\chi}$ sur $\overline{G(g)}$. On considère la représentation $\underline{F}(g\,;\mathfrak{b}\,;\bar{D}\,;\bar{\chi}) = \underline{F}(g\,;\mathfrak{b}\,;\bar{\chi}_g)$ de 2.1.1, et on montre en utilisant le théorème 2.1.4 et 2.1.2

2.3.5 PROPOSITION.- Quel que soit $p = (g,\bar{\chi}_g)$ de $B(\mathfrak{g}^*)$ et $\mathfrak{b}$ vérifiant

les conditions Cg, la représentation $\underline{F}(g ; \mathfrak{h} ; \bar{\chi}_g)$ est dans la classe de $\underline{F}(p)$.

Remarque.- Ceci correspond clairement au 1) du théorème 2 (1.5)

3. Régularisation des mauvaises actions

Nous allons montrer que la condition (B) du théorème 1 est nécessaire. Voici quelle sera notre démarche : supposons pour simplifier que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, le stabilisateur $G(g)$ de g soit connexe ; on peut alors associer à g la représentation factorielle $\underline{F}(g ; \chi_g)$; si l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est irrégulière, on va grouper suivant une relation d'équivalence R , les mauvaises orbites en "paquets" $\mathcal{O}_R$, munir chaque paquet d'une mesure μ , G-invariante ergodique et on obtient suivant le procédé général dû à Effros [11] en considérant $\underline{F}(\mathcal{O}_R) = \int_{\mathcal{O}_R} \underline{F}(p)\, d\mu$ une représentation factorielle qui n'est pas de type I .

Mais il y a lieu d'étudier l'action de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$ qui est légèrement plus compliquée.

3.1 Relation d'équivalence R

Soit G un groupe localement compact séparable, opérant continûment dans un espace métrisable complet X . On dit que l'action de G dans X est régulière, si toute orbite $G.x$ est localement fermée ; ceci est aussi équivalent à la condition : quelle que soit $x \in X$, si $G(x)$ désigne le stabilisateur de x , l'application $g\,G(x) \mapsto g.x$ est un homéomorphisme de $G/G(x)$ sur $G.x$.

Supposons que G agisse régulièrement sur X , et considérons la relation d'équivalence R : $x \sim y$ si $\overline{G.x} = \overline{G.y}$; on voit immédiatement que, comme les orbites $G.x$ sont ouvertes dans leur adhérence, les classes d'équivalence de cette relation coïncident avec les orbites sous G .

3.1.1 On définit la relation d'équivalence R par $x \sim y$ si $\overline{G.x} = \overline{G.y}$ quelle que soit l'action de G dans X .

On note $\mathcal{O}_R$ les classes d'équivalence ; si $\mathcal{O} = G.x$ est localement fermée, alors $\mathcal{O}_R(x) = G.x$, et plus généralement si Y est un sous-espace de X localement fermé G-invariant et si $y \in Y$, on a $\mathcal{O}_{R_Y}(y) = \mathcal{O}_{R_X}(y)$.

Problème.- Est-ce que les classes d'équivalence sont localement fermées ? Nous allons voir qu'il en est bien ainsi sous certaines conditions.

3.1.2 PROPOSITION.- Supposons qu'il existe $\widetilde{G} \supset G$ un groupe localement compact séparable opérant régulièrement dans X et tel que $[\widetilde{G},\widetilde{G}] \subset G$. Alors

(1) Soit $\widetilde{\mathcal{O}}$ une orbite suivant $\widetilde{G}$, et $x \in \widetilde{\mathcal{O}}$; l'adhérence dans $\widetilde{G}$ de $G.\widetilde{G}(x)$ est un groupe $G(\widetilde{\mathcal{O}})$ qui ne dépend que de $\widetilde{\mathcal{O}}$ et on a

$$G(\widetilde{\mathcal{O}}).x = \widetilde{G}.x \cap \overline{G.x} = \mathcal{O}_R(x) \quad \text{quel que soit} \quad x \in \widetilde{\mathcal{O}} .$$

En particulier, $\mathcal{O}_R(x)$ est localement fermée.

(2) Si $x \in \widetilde{\mathcal{O}}$, la topologie sur $\mathcal{O}_R(x)$ coïncide avec la topologie d'espace homogène par $G(\widetilde{\mathcal{O}})$.

La démonstration est immédiate : par exemple, comme la topologie sur $\widetilde{G}.x$ est la topologie d'espace homogène de $\widetilde{G}/\widetilde{G}(x)$, on voit que, pour tout $x \in \widetilde{\mathcal{O}}$, $\widetilde{G}.x \cap \overline{G.x} = G(\widetilde{\mathcal{O}}).x$.

3.2 On considère $B(\mathfrak{g}^*)$ et l'action naturelle de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$, on munit $B(\mathfrak{g}^*)$ de la topologie suivante :

Une suite (g_n, χ_n) tend vers (g_o, χ_o) si g_n tend vers g_o dans $\mathfrak{g}^*$, et si pour toute suite de points $c_n \in \overline{G(g_n)}$ convergente vers $c_o \in \overline{G(g)}$, $\chi_n(c_n)$ tend vers $\chi_o(c_o)$.

Il est clair que l'application $(g,\chi) \mapsto g$ de $B(\mathfrak{g}^*)$ sur $\mathfrak{g}^*$ est continue.

On va étudier la relation d'équivalence R sur $B(\mathfrak{g}^*)$.

Soit $\widetilde{G}$ le plus petit sous-groupe algébrique d'automorphismes de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathrm{Ad}\, G$; $\widetilde{G}$ agit dans G , $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{n}^*$, etc..., on a $[\widetilde{G},\widetilde{G}] = \mathrm{Ad}[G,G]$ et $\widetilde{G}$ agit régulièrement dans $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{n}^*$ d'après un résultat classique de Chevalley.

Soient $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ la restriction, $\widetilde{G}.f$ une orbite sous $\widetilde{G}$ dans $\mathfrak{n}^*$, $\underline{U} = r^{-1}(\widetilde{G}.f)$ et $B(\underline{U}) = \{(g,\bar{\chi})$ avec $g \in \underline{U}\}$, $\underline{U}$ étant localement fermée, $B(\underline{U})$ est localement fermée dans $B(\mathfrak{g}^*)$ et il suffit d'étudier la relation d'équivalence R sur chaque $B(\underline{U})$.

Montrons que les groupes $\overline{G(g)}$, lorsque g varie dans $\underline{U}$, peuvent être identifiés à un groupe constant ; en effet, lorsque g varie dans $\underline{U}$, on voit (2.2.3) que les groupes $\widetilde{H} = \widetilde{G}(g)_{Ad\,N}$, $H = G(g)N$, $\bar{H} = \overline{G(g)}N$ et $H_o = G(g)_o N$ restent constants ; et comme par exemple $H = \{u \in G ; u.g \in N.g\}$ et $N.g$ est fermée simplement connexe (1.2), on voit que H, $\bar{H}$, H_o sont des sous-groupes fermés de G, que la composante connexe de H est H_o et que $\widetilde{H}$ est fermé dans $\widetilde{G}$.

On note $\hat{\bar{H}}$ l'ensemble des caractères de $\bar{H}$ triviaux sur H_o, on voit alors que

3.2.1 Quel que soit $g \in \underline{U}$, le groupe $G(g)/G(g)_o$ est isomorphe à H/H_o ; et l'opération de restriction définit un isomorphisme entre $\hat{\bar{H}}$ et $\widehat{\overline{G(g)}}$.

Si m est le rang du groupe abélien libre $\bar{H}/H_o$, on a donc $\hat{\bar{H}}$ isomorphe à T^m.

Si $\chi \in \hat{\bar{H}}$ et $\bar{\chi}_g \in \widehat{G(g)}$, on note $\chi\bar{\chi}_g$ le caractère de $\overline{G(g)}$ défini par $(\chi\bar{\chi}_g)(u) = \chi(u)\bar{\chi}_g(u)$, $\hat{\bar{H}}$ agit sur $B(\underline{U})$ par $\chi.(g,\bar{\chi}_g) = (g,\chi\bar{\chi}_g)$.

D'autre part, soit $\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* ; \lambda([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0\}$, si $\lambda \in \Lambda$, on pose $\lambda.(g,\chi) = (g + \lambda, e^{i\lambda}\bar{\chi}_g)$.

D'autre part, $\widetilde{G}$ opère aussi naturellement sur $B(\underline{U})$ et on voit que les opérations de $\widetilde{G}$, $\hat{\bar{H}}$, Λ sur $B(\underline{U})$ commutent et sont continues.

3.2.2 Il est clair que $B(\underline{U})$ est homogène sous $\widetilde{G} \times \hat{\bar{H}} \times \Lambda$; $B(\underline{U})$ étant localement fermée, $B(\underline{U})$ est donc munie de la topologie d'espace homogène par $\widetilde{G} \times \hat{\bar{H}} \times \Lambda$.

Soient $g \in \underline{U}$ et $\widetilde{\mathcal{O}}$ l'orbite (localement fermée) de g sous $\widetilde{G}$; alors $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ est localement fermée et homogène par $\widetilde{G} \times \overset{\circ}{H}$; de plus

$$[\widetilde{G} \times \overset{\circ}{H}, \widetilde{G} \times \overset{\circ}{H}] = \mathrm{Ad}[G, G] \times \{1\} .$$

On peut alors appliquer la proposition 3.1.2 avec le groupe $\widetilde{G} \times \overset{\circ}{H}$ à la place de $\widetilde{G}$ (l'action de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$ se factorise à travers Ad G) pour conclure :

3.2.3 Soit $p = (g, \bar{\chi}_g)$ un point de $B(\mathfrak{g}^*)$ et $\widetilde{\mathcal{O}} = \widetilde{G}.g$; alors

$$\mathcal{O}_R(p) = \text{adhérence de } G.p \text{ dans } B(\widetilde{\mathcal{O}}) .$$

3.2.4 En fait, $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ est difféomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\circ}{H}$; pour montrer cela il suffit de construire une section continue de $\widetilde{\mathcal{O}}$ dans $B(\widetilde{\mathcal{O}})$:

Soit $p_o = (g_o, \bar{\chi}_o) \in B(\widetilde{\mathcal{O}})$; si $t \in \widetilde{G}$ stabilise g_o, en général t ne stabilise pas $\bar{\chi}_o$. On pose alors $w(t) = (t.\bar{\chi}_o)\bar{\chi}_o^{-1}$ i.e. $(w(t))(u) = \chi_{g_o}((t^{-1}.u)u^{-1})$; il est clair que $w(t) \in \overset{\circ}{H}$ et que w est un homomorphisme de $\widetilde{G}(g_o)$ dans $\overset{\circ}{H}$; par définition même de $\overline{G(g_o)}$, $w(t)$ est trivial si $t \in \mathrm{Ad}\, G(g_o)$, en particulier si $t \in \widetilde{G}(g_o) \cap [\widetilde{G}, \widetilde{G}]$, et w peut s'étendre en un homomorphisme du sous-groupe fermé $\widetilde{H} = \widetilde{G}(g_o)[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ de $\widetilde{G}$ trivial sur Ad H dans $\overset{\circ}{H}$ (isomorphe à T^m) et donc finalement w s'étend en un homomorphisme (dépendant de $\widetilde{\mathcal{O}}$) de $\widetilde{G}$ dans $\overset{\circ}{H}$: si l'on pose $s(t.g_o) = (t.g_o, w(t)^{-1}\, t.\bar{\chi}_o)$, on obtient alors une section continue de $\widetilde{\mathcal{O}}$ dans $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ et dans l'identification de $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ avec $\widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\circ}{H}$ l'action de $\widetilde{G}$ devient $u.(g,\alpha) = (u.g, w(u)\alpha)$ et on a si p correspond à $(g,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\circ}{H}$ $(g \in \widetilde{\mathcal{O}}, \alpha \in \overset{\circ}{H})$,

$$\mathcal{O}_R(p) = \text{adhérence de } \{(u.g, w(u)\alpha) ; u \in G\} \text{ dans } \widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\circ}{H}$$

3.2.5 Soit K un sous-groupe fermé de G contenant [G,G]. Alors l'action de K dans $B(\underline{U})$ régulière si et seulement si l'action de K dans U est régulière.

En effet, on peut appliquer la proposition (3.1) au groupe $\mathrm{Ad}\, K \subset \widetilde{G} \times \widetilde{H}$, et $\mathcal{O}_{R,K}(p) = \{\text{adh. des } (k.g\,,\, w(k)\alpha)\,,\ k \in K\}$ dans $\widetilde{\mathfrak{G}} \times \widetilde{\mathfrak{H}}$. Comme $\widetilde{H}$ est compact, si $p = (g,\alpha) \in \widetilde{\mathfrak{G}} \times \widetilde{\mathfrak{H}}$, $g \in \underline{U}$, la projection de $\mathcal{O}_{R,K}(p)$ sur $\widetilde{\mathfrak{G}}$ est $\widetilde{\mathfrak{G}} \cap \overline{K.g} = \mathcal{O}_{R,K}(g)$. Donc si l'action de K dans $B(\underline{U})$ est régulière, celle de K dans $\underline{U}$ l'est. Réciproquement, soit $g \in \underline{U}$ et $O = K.g$ une orbite munie de la topologie de $K/K(g)$; si $p = (g,\chi)$, comme w est trivial sur $G(g)N$, on a $K(p) = K(g)$, et si donc $u_n.p \longmapsto p$, on a $u_n.g \longmapsto g$, de sorte que $u_n \to 1 \mod K(p) = K(g)$.

3.3 Mesure ergodique sur $\mathcal{O}_R(p)$

PROPOSITION (Pukanszky [15], p. 545).- Il existe une unique mesure de Radon positive G-invariante sur $\mathcal{O}_R(p)$.

Soit $p = (g,\chi) \in B(\mathfrak{g}^*)$ et $g \in \widetilde{\mathfrak{G}}$; on peut voir aussi que $\widetilde{G}$ agit régulièrement dans $B(\mathfrak{g}^*)$:

Donc si $B(p)$ = adhérence de $\mathrm{Ad}\, G.\widetilde{G}(p)$ dans $\widetilde{G}$, $\mathcal{O}_R(p)$ est, d'après 3.1.2, homogène sous $B(p)$ et sa topologie est celle de $B(p)/\widetilde{G}(p)$, (on a $\widetilde{G}(p) = \widetilde{G}(g) \cap \ker w \supset \mathrm{Ad}\, G(g)$). Pour l'existence, il suffit donc de montrer que $B(p)/\widetilde{G}(p)$ a une mesure $B(p)$-invariante, ce qu'on prouve facilement.

3.4 Représentation factorielle $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$

Soit $p_o = (g_o\,, \bar{\chi}_{g_o}) \in B(\widetilde{\mathfrak{G}})$; il existe $\mathfrak{b}_o$ sous-algèbre de $\mathfrak{g}^C$, polarisation positive au point g_o, vérifiant les conditions $C g_o$ et stable sous $\widetilde{G}(g_o)$; alors si $g = t.g_o$, on pose $\mathfrak{b}_g = t.\mathfrak{b}_o$ qui ne dépend que de g. On peut former la représentation concrète $\underline{F}(g\,;\bar{\chi}_g\,;\mathfrak{b}_g)$ dans $\underline{L}(g\,;\bar{\chi}_g\,;\mathfrak{b}_g) = \underline{L}(p\,;\mathfrak{b}_g)$. On peut définir alors sur le champ d'espaces de Hilbert

$\underline{L}(p) = \underline{L}(p\,;\mathfrak{h}_g)$ pour $p \in \mathcal{O}_R$, muni de μ , une structure de champ mesurable, et former $\underline{F}(\mathcal{O}_R) = \int_{\mathcal{O}_R} \underline{F}(p)\, d\mu(p)$.

On démontre alors ([15], p. 549-551).

THÉORÈME (Pukanszky).- La représentation $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$ est factorielle. Elle est de type I si et seulement si $\mathcal{O}_R(p)$ est une G-orbite et si $\underline{F}(p)$ est de type I (i.e. si $\overline{G(g)}$ est d'indice fini dans $G(g)$).

Et ceci termine donc la démonstration de la nécessité de la condition (B) (lemme 3.2.5 appliqué à G).

4. Suffisance des conditions

Nous supposerons donc maintenant que l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est régulière et que toute orbite g est intégrable.

Nous allons reprendre la procédure de 2. Tout d'abord, avec les notations de 2.2

4.1 Si l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est régulière, alors quel que soit $f \in \mathfrak{n}^*$, l'action de M sur $\mathfrak{m}^*(f)$ est régulière.

En effet, soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$, cela définit une injection $\mathfrak{m}^*(f) \subset (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^* \subset \mathfrak{g}^*$ et on a avec les notations de 2.2.2 $M.\mathfrak{m} = (G.g) \cap \mathfrak{m}^*(f)$.

Si, de plus, l'action de G dans $\mathfrak{n}^*$ était régulière, on aurait terminé, d'après (2.2) et $X(g)$ se composant des multiples des caractères $\bar{\chi}$ dans $\widehat{G(g)}$, on obtiendrait aussi le 2) du théorème 2. Mais il n'est pas ainsi en général.

Cependant, nous allons montrer, grâce à un théorème de C.C. Moore, que si les conditions (A) et (B) sont satisfaites, alors toute représentation factorielle de G se restreint à N suivant une quasi-orbite transitive $G.\rho(f)$; et la suffisance des conditions (A) et (B) sera claire, ainsi que le 2) du théo-

rème 2.

Soit $C(\mu)$ une quasi-orbite pour l'action de G dans $\hat{N}$. Il existe alors $f \in \mathfrak{n}^*$, telle que le support de $C(\mu)$ soit contenu dans $\widetilde{G}.\rho(f)$, et lorsque λ parcourt $\widetilde{G}.f$, le stabilisateur $K = G(\lambda)N$ de la représentation $\rho(\lambda)$ ne varie pas.

On note comme en 3.2 $\underline{U} = r^{-1}(\widetilde{G}.f)$ et $\hat{K}_{\underline{U}} = \{\pi$ classes de représentations irréductibles de K dont la restriction à N soit un multiple de $\rho(\lambda)$, pour un $\lambda \in \widetilde{G}.f\}$.

Alors, d'après 2.2 (et 4.1), on voit que l'application $p \mapsto \alpha(p)$ (définie en 2.3) définit un isomorphisme de $B(\underline{U})/K$ sur $\hat{K}_{\underline{U}}$.

En utilisant le fait que $B(\underline{U})$ est homogène sous $\widetilde{G} \times \overset{\circ}{H} \times \Lambda$, il est facile de montrer que cette application est continue, et d'autre part on a

4.2 *Si l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est régulière, l'action de K dans $B(\underline{U})$ est régulière.*

En effet, d'après 3.2.5, il suffit de démontrer que l'action de K dans $\underline{U}$ l'est ; mais si $g \in \underline{U}$, on a $K.g = r^{-1}(N.f) \cap G.g$.

D'autre part, d'après ([2], p. 81), on sait que $\hat{K}_{\underline{U}}$ est standard, il s'ensuit que les structures boréliennes de $B(\underline{U})/K$ et $\hat{K}_{\underline{U}}$ sont isomorphes, et comme G opère régulièrement dans $\mathfrak{g}^*$ et donc dans $B(\underline{U})$, il s'ensuit que toute quasi-orbite dans $\hat{K}_{\underline{U}}$ est transitive.

Soit λ une représentation factorielle de G se restreignant à N suivant une quasi-orbite $C(\mu) \subset \widetilde{G}.\rho(f)$; alors d'après le théorème 3 (ch. II de [2]), λ se restreint à K suivant une quasi-orbite $C(\nu)$ contenue dans $\hat{K}_{\underline{U}}$ au-dessus de $C(\mu)$; $C(\nu)$ étant transitive, il s'ensuit que $C(\mu)$ l'est ; on termine ainsi la démonstration du théorème 1 et évidemment ainsi du théorème 2,2).

5. Quelques compléments

Si G est un groupe résoluble simplement connexe quelconque (non nécessairement de type I), Pukanszky [16] a démontré que l'application qui à la représentation factorielle $\underline{F}(\mathcal{C}_R)$ associe son noyau dans la C^*-algèbre de G est une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{C}_R$ sur $\mathrm{Prim}(C^*(G))$. Il démontre [15] aussi que ces représentations factorielles permettent d'écrire une décomposition centrale de la représentation régulière de G . Enfin [17], il vient de montrer que ce sont "les" représentations factorielles normales de G (à quasi-équivalence près) : On dit qu'une représentation factorielle T est normale, si, $R(T)$ désignant l'algèbre de Von Neumann engendrée par T , il existe une trace Φ normale fidèle semi-finie sur $R(T)$ et telle qu'il existe un $v \in C^*(G)^+$, avec $0 < \Phi(T(v)) < +\infty$, qu'on appelle alors caractère de la représentation T . (Pour les caractères des groupes de type I, voir M. Duflo [4], chap. 9.)

Ces représentations sont donc particulièrement intéressantes du point de vue de l'analyse harmonique de G : et il montre d'ailleurs que, quel que soit le groupe de Lie connexe, l'application qui à une représentation factorielle normale T fait correspondre son noyau dans la C^*-algèbre du groupe, est une bijection de l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales et l'ensemble des idéaux primitifs.

Enfin, on peut se reporter aux exposés de C. C. Moore [13] pour un historique et un résumé de l'ensemble des résultats de la théorie des représentations des groupes résolubles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER - B. KOSTANT - Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math., vol. 14 (1971), p. 255-354.

[2] L. AUSLANDER - C. C. MOORE - Unitary representations of solvable Lie groups, Memoirs of the A.M.S., n° 62, 1966.

[3] V. BARGMANN - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I, Comm. on Pure and Applied Maths., vol. 14 (1961), p. 187-214.

[4] P. BERNAT et co-auteurs - Représentations des groupes de Lie Résolubles, Dunod, Paris, 1972.

[5] J. BREZIN - Unitary representations theory for solvable Lie groups, Memoirs of the A.M.S., n° 79, 1968.

[7] I. BROWN - Dual topology of a Nilpotent Lie group, Annales Scient. de l' E.N.S., 6 (1973), p.

[8] J. DIXMIER - Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques, Bull. Soc. Math. de France, vol. 94 (1966), p. 181-206.

[9] J. DIXMIER - Sur le revêtement universel d'un groupe de Lie de type I, C.R. Acad. Sc., Paris, vol. 252 (1961), p. 2805-2806.

[10] M. DUFLO - Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, Annales Scient. de l'E.N.S., 5 (1972), p. 71-120.

[11] E. EFFROS - Transformation groups and C^*-algebras, Annals of Math., 81 (1965), p. 38-55.

[12] A.A. KIRILLOV - Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk, 17 (1962), p. 57-110.

[13] C. C. MOORE - Representations of solvable and nilpotent groups, Proc. of the Williamstown conference on harmonic analysis, 1972.

[14] L. PUKANSZKY - On unitary representations of exponential groups, Journ. of Functional Analysis, vol. 3 (1969), p. 73-113.

[15] L. PUKANSZKY - Unitary representations of solvable Lie groups, Annales Scient. de l'E.N.S., 4 (1971), p. 464-608.

[16] L. PUKANSZKY - The primitive Ideal space of solvable Lie groups, Invent. Math., 22 (1973), p. 74-118.

[17] L. PUKANSZKY - Characters of connected Lie groups, preprint, (to appear) Bull. A.M.S.

[18] S. QUINT - Representations of solvable Lie groups, Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, 1972.

[19] I. SEGAL - Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field, Illinois J. of Math., 6 (1962), p. 500-523.

[20] R. F. STREATER - The representations of the oscillator group, Comm. in Mathematical Physics, vol. 4 (1967), p. 217-236.