SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL DEMAZURE

Classification des germes à point critique isolé et à nombres de modules 0 ou 1

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 443, p. 124-142

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__124_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 443-01
26e année, 1973/74, n° 443 Février 1974

CLASSIFICATION DES GERMES A POINT CRITIQUE ISOLÉ ET A NOMBRES DE MODULES 0 OU 1

[d'après V. I. ARNOL'D]

par Michel DEMAZURE

Il s'agit des deux articles [1] et [2] d'Arnol'd. Comme l'énoncé des résultats nécessite l'emploi de la monodromie et des cycles évanescents, j'en donne au premier paragraphe un petit fascicule de résultats, au goût du jour. Les résultats de classification d'Arnol'd sont exposés au second paragraphe. Par ailleurs, ces articles [1] et [2] contiennent aussi des applications aux singularités "lagrangiennes" et à la méthode de la phase stationnaire ; je n'en parle pas du tout et espère qu'un autre exposé viendra combler cette lacune.

§ 1. Monodromie et cycles évanescents

Dans tout ce paragraphe, on note $f(z_0,\dots,z_n)$ une fonction holomorphe de $(n+1)$ variables complexes, telle que $f(0) = 0$ et que f possède en 0 un point critique isolé (la différentielle df de f s'annule donc en 0 mais pas au voisinage).

1.1 Le nombre de Milnor μ de f en 0 est la dimension du $\mathbf{C}$-espace vectoriel quotient de l'anneau $\mathbf{C}\{z_0,\dots,z_n\}$ des séries convergentes par l'idéal jacobien de f, idéal J_f engendré par les dérivées partielles $\partial f/\partial z_i$ (on a $\mu < \infty$, puisque ces dérivées partielles ont en 0 un zéro commun isolé). On dit que f est non dégénérée si $\mu = 1$.

1.2 Pour $\alpha > 0$ assez petit et $\varepsilon \in \mathbf{C}$, non nul et assez petit relativement à α, posons

$$F = \{(z_i) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \Sigma |z_i|^2 \leq \alpha \ , \ f((z_i)) = \varepsilon\} .$$

C'est une variété à bord orientée de dimension réelle $2n$, la variété des cycles évanescents, qui est indépendante à isomorphisme près des choix effectués. Faisant parcourir à ε un cercle centré en 0 , on obtient un difféomorphisme T de F ("difféomorphisme de monodromie") auquel on peut imposer d'être l'identité sur le bord

$$\partial F = \{(z_i) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Sigma |z_i|^2 = \alpha \ , \ f((z_i)) = \varepsilon\} \ ,$$

et qui est bien déterminé à isotopie (induisant l'identité sur le bord) près (pour tout ceci, voir [7] et [12]).

1.3 D'après [12], F a le type d'homotopie d'un bouquet de μ n-sphères, de sorte que $\tilde{H}_i(F) = 0$ pour $i \neq n$ et que $\tilde{H}_n(F)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang μ ("module des cycles évanescents") ; par dualité, la même propriété est vraie pour les $\tilde{H}_i(F \bmod \partial F)$. Dans la suite, nous identifierons $\tilde{H}_n(F)$ à

$$E(f) = \tilde{H}^n_c(\overset{\circ}{F})$$

et $\tilde{H}_n(F \bmod \partial F)$ à

$$E^*(f) = \tilde{H}^n(F) \ ,$$

et plongerons ces $\mathbb{Z}$-modules dans les espaces de cohomologie de De Rham $\tilde{H}^n_c(\overset{\circ}{F}, \mathbb{R})$ et $\tilde{H}^n(F, \mathbb{R})$.

On identifiera aussi $E^*(f)$ au dual de $E(f)$ grâce à la forme bilinéaire suivante (noter le signe !) : si $a \in E(f)$ et $b \in E^*(f)$ sont les classes des n-formes fermées ω_a et ω_b , ω_a étant à support compact dans $\overset{\circ}{F}$, on pose

$$(1) \qquad \langle b,a \rangle = -(-1)^{n(n-1)/2} \int \omega_b \wedge \omega_a \ .$$

Enfin, on note $j : E(f) \to E^*(f)$ l'application canonique, de sorte que la forme-intersection sur $E(f)$ est donnée par

$$(2) \qquad (a,a') = -(-1)^{n(n-1)/2} \langle j(a),a' \rangle \ .$$

1.4 L'automorphisme T de F , identique sur ∂F , induit un homomorphisme, la

variation

$$V : E^*(f) \to E(f)$$

que l'on peut calculer ainsi : si $b \in E^*(f)$ est la classe de la forme ω, alors $V(b) \in E(f)$ est la classe de la forme $V\omega = T\omega - \omega$.

Les automorphismes de $E(f)$ et $E^*(f)$ déduits de T sont évidemment :

$$(3) \qquad \begin{cases} T|_{E(f)} = Id + V \circ j \\ T|_{E^*(f)} = Id + j \circ V . \end{cases}$$

1.5 Soient ω, ω' deux n-formes fermées de classes b, $b' \in E^*(f)$; on a $\int T(\omega \wedge \omega') - \omega \wedge \omega' = 0$, donc $\int V\omega \wedge V\omega' + \int \omega \wedge V\omega' + \int V\omega \wedge \omega' = 0$, c'est-à-dire $\langle jVb , Vb' \rangle + \langle b , Vb' \rangle + (-1)^n \langle b' , Vb \rangle = 0$. Or, on verra ci-dessous que V est bijectif ; pour a, $a' \in E(f)$, on a donc $\langle ja , a' \rangle + \langle V^{-1}a , a' \rangle + (-1)^n \langle V^{-1}a' , a \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad j = -V^{-1} - (-1)^n {}^tV^{-1} ,$$

$$(5) \qquad (a,a') = (-1)^{n(n-1)/2} (\langle V^{-1}(a),a' \rangle + (-1)^n \langle V^{-1}(a'),a \rangle) .$$

Reportant (4) dans (3), on obtient

$$(6) \qquad T|_{E(f)} = (-1)^{n+1} V \circ {}^tV^{-1} ,$$

$$(7) \qquad T|_{E^*(f)} = (-1)^{n+1} {}^tV^{-1} \circ V = {}^t(T|_{E(f)})^{-1} .$$

En conclusion, toute la situation algébrique concernant la monodromie est contenue dans la variation $V : E^*(f) \to E(f)$. On possède d'ailleurs deux renseignements supplémentaires sur V :

a) il existe des bases duales de $E(f)$ et $E^*(f)$ pour lesquelles la matrice de V est trigonale stricte (voir ci-dessous),

b) les valeurs propres de $T|_{E(f)}$ sont des racines de l'unité (voir [3]).

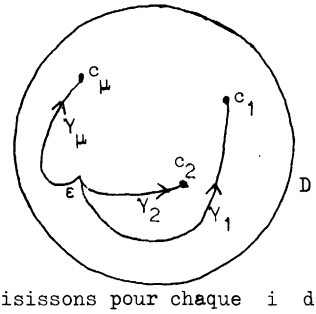
1.6 Supposons pour un instant que $\mu = 1$. Soit alors δ ("cycle évanescent") une base de $E(f)$ et δ^* la base duale de $E^*(f)$. Alors (voir par exemple [7]),

on a $V(\delta^*) = \delta$, c'est-à-dire

(8) $\qquad V(x) = \langle x,\delta\rangle\delta \qquad$ (formule de Picard-Lefschetz) .

Par conséquent, d'après (5) $(\delta,\delta) = 0$, 2 ou -2 selon que $n \equiv 1 \mod 2$, $n \equiv 0 \mod 4$, ou $n \equiv 2 \mod 4$.

1.7 Dans le cas général, modifions légèrement f en $\tilde{f}$ (après avoir choisi α et ε), sans changer F à homéomorphisme près et de façon que la point critique 0 de f se sépare en μ points critiques non dégénérés de $\tilde{f}$, les μ valeurs critiques correspondantes étant distinctes (cela est possible d'après les théorèmes de transversalité). Choisissons de plus, dans le disque considéré D du plan des valeurs, des chemins lisses $\gamma_1,\ldots,\gamma_\mu$ joignant la valeur non critique ε aux valeurs critiques $c_1,\ldots,c_\mu$ et tels que (voir figure) :



(9)
- a) $\gamma_i(t) \in D - \{c_1,\ldots,c_\mu\}$ pour $t \neq 1$,
- b) les γ_i $]0,1]$ sont disjoints,
- c) les directions à l'origine $\gamma_i'(0)$ sont distinctes et tournent autour de ε dans le sens direct.

Choisissons pour chaque i dans la fibre de $\tilde{f}$ au point $\gamma_i(1-\eta)$, η petit, un cycle évanescent au voisinage du point critique de valeur critique c_i (on est alors dans une situation analogue à 1.6) et tirons-le dans la fibre en ε à l'aide de γ_i . On obtient ainsi des classes $\delta_1,\ldots,\delta_\mu \in E(f)$, qui forment une <u>base</u> de ce module ([3]) ; une telle base sera dite <u>distinguée</u> [8].

D'autre part, soit α_i le lacet obtenu en suivant le chemin γ_i presque jusqu'à c_i , puis en tournant autour de c_i dans le sens direct, puis en revenant par γ_i ; les α_i forment une base du groupe libre $\Pi_1(D - \{c_1,\ldots,c_\mu\},\varepsilon)$; à chacun d'eux est associé une transformation de monodromie T_i de F , et on a

d'après (9)

(10) $\qquad T = T_\mu\ T_{\mu-1} \cdots T_1 \ .$

Si $V_i : E^*(f) \to E(f)$ est la variation définie par T_i, on a d'après (8)

(11) $\qquad V_i(x) = \langle x, \delta_i \rangle \delta_i \ ,$

et donc pour $a \in E(f)$

(12) $\qquad T_i(a) = a - (-1)^{n(n-1)/2}\ (a, \delta_i)\delta_i \ .$

Soit alors ω une forme fermée de degré n sur F ; on a

$V\omega = T\omega - \omega = T_\mu \cdots T_2(T_1\omega - \omega) + T_\mu \cdots T_3(T_2\omega - \omega) + \cdots + (T_\mu\omega - \omega)$, d'où dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E^*(f), E(f))$ la relation

(13) $\qquad V = T_\mu \cdots T_2\ V_1 + T_\mu \cdots T_3\ V_2 + \cdots + V_\mu \ .$

Si (δ_i^*) est la base duale de (δ_i), on a d'après (11) $V_i(\delta_j^*) = \delta_{ij}(\delta_i^*)$, donc $V(\delta_j^*) = T_\mu \cdots T_{j+1}(\delta_j^*) \equiv \delta_j^*$ modulo $\mathbb{Z}\delta_{j+1}^* + \cdots + \mathbb{Z}\delta_\mu^*$, ce qui signifie que

(14) $\qquad \langle \delta_i^*, V(\delta_j^*) \rangle = 1 \qquad$ si $i = j$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \qquad$ si $i < j$;

la matrice de V est donc <u>trigonale stricte</u>. Posant alors

(15) $\qquad a_{ij} = \langle V^{-1}(\delta_i), \delta_j \rangle \ ,$

on a $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et d'après la formule (5)

(16) $\qquad (\delta_i, \delta_j) = (-1)^{n(n-1)/2}\ (a_{ij} + (-1)^n\ a_{ji}) \ ,$

de sorte que <u>la connaissance de la forme-intersection et d'une base distinguée permet de déterminer la variation</u>.

1.8 Ce qu'on a fait en 1.7 peut se généraliser en remplaçant la famille $(\widetilde{f} - \lambda)_{\lambda \in C}$ par une <u>déformation semi-universelle</u> de f, c'est-à-dire une fonction holomorphe $\Phi(z,\lambda)$, $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}^\mu$, telle que $\Phi(z,0) = f(z)$ et que les dérivées partielles $(\partial\Phi/\partial\lambda_i)(z,0)$ forment une base de $\mathbb{C}\{z_0,\ldots,z_n\}/J_f$ (voir 1.1). Soit $\Sigma \subset \mathbb{C}^\mu$ le <u>lieu-discriminant</u>, formé des λ tels que

$z \longmapsto \Phi(z,\lambda)$ ait en 0 un point critique. Alors, si $\alpha > 0$ est assez petit, et $\beta > 0$ assez petit relativement à α, la projection $E \to B$, où

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid \|\lambda\| < \beta,\ \lambda \notin \Sigma\}$$

$$E = \{(z,\lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \mid \|z\| \leq \alpha\ ,\ \|\lambda\| < \beta\ ,\ \lambda \notin \Sigma\ ,\ \Phi(z,\lambda) = 0\}$$

est une fibration dont les fibres sont isomorphes à la variété F des cycles évanescents de f (notons que ∂E se prolonge en un fibré sur la boule ouverte $\bar{B} = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid \|\lambda\| < \beta\}$). Pour $\lambda_0 \in B$, on obtient donc un homomorphisme "de monodromie"

$$\Pi_1(B,\lambda_0) \to GL(E(f)) \tag{17}$$

qui est indépendant à isomorphisme près des choix faits $(\Phi, \alpha, \beta, \lambda_0)$ et dont l'image est appelée le groupe de monodromie de f ; ce dernier est un groupe d'automorphismes de $E(f)$ respectant la forme-intersection, et contenant T.

Remarquons maintenant que la situation étudiée en 1.7 est la trace sur une droite complexe $(\tilde{f} - \lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ de la situation universelle ; d'après [9], l'homomorphisme canonique $\Pi_1(D - \{c_1,\ldots,c_\mu\}, \varepsilon) \to \Pi_1(B, \text{image de } \mathfrak{C})$ est surjectif (*), donc les transformations T_i (formule (12)) engendrent le groupe de monodromie. En fait, pour obtenir ce résultat, il n'est pas nécessaire de supposer vérifiées les conditions (9) ; de manière précise, considérons les conditions suivantes, plus faibles que (9) :

(9') a) les cycles évanescents (δ_i) forment une base de $E(f)$

b) les lacets (α_i) engendrent $\Pi_1(D - \{c_i\}, \varepsilon)$.

On appelle base faiblement distinguée [8] une base de $E(f)$ obtenue par le procédé de 1.7 dans lequel on remplace les conditions (9) par les conditions (9'). Une base distinguée est faiblement distinguée. De plus, d'après ce qui précède, si

(*) En fait, Σ possède en 0 un hyperplan tangent. limite des hyperplans tangents aux points lisses, et la droite $(\tilde{f} - \lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est transverse à cet hyperplan.

(δ_i) est une base faiblement distinguée de $E(f)$, les transformations de monodromie T_i (formule (12)), engendrent le groupe de monodromie. La connaissance de la forme-intersection et d'une base faiblement distinguée permet donc de déterminer le groupe de monodromie.

1.9 Le Théorème DST. Soit $g(z'_0,\dots,z'_m)$ une fonction holomorphe de $(m+1)$ variables complexes possédant en 0 un point critique isolé et telle que $g(0) = 0$. On note $f \oplus g$ la fonction holomorphe

$$(f \oplus g)(z_0,\dots,z_n, z'_0,\dots,z'_m) = f(z_0,\dots,z_n) + g(z'_0,\dots,z'_m)$$

de $(n + m + 2)$ variables ; elle possède en 0 un point critique isolé et

(18) $$\mu(f \oplus g) = \mu(f)\mu(g) .$$

On peut de plus reconstituer la variété des cycles évanescents $F_{f\oplus g}$ à l'aide de F_f, F_g et des monodromies T_f et T_g (Deligne, non publié) ; elle se rétracte sur le joint $F_f * F_g$, d'où un isomorphisme

$$\tilde{H}^n_c(F_f) \otimes \tilde{H}^n_c(F_g) \to \tilde{H}^{n+m+1}_c(F_{f\oplus g}) ,$$

c'est-à-dire un isomorphisme

$$E(f) \otimes E(g) \to E(f \oplus g) .$$

On en déduit par dualité un isomorphisme $E^*(f) \otimes E^*(g) \to E^*(f \oplus g)$ et on a

(D) $$V_{f\oplus g} = V_f \otimes V_g$$

(Deligne, non publié - c'est ici que le signe de l'accouplement (1) intervient de façon essentielle), d'où d'après (6)

(ST) $$T|_{E(f\oplus g)} = T|_{E(f)} \otimes T|_{E(g)}$$

(Sebastiani-Thom [15]).

De plus, si (δ_i) et (δ'_j) sont des bases distinguées de $E(f)$ et $E(g)$, alors $(\delta_i \otimes \delta'_j)$ est, pour l'ordre lexicographique, une base distinguée de $E(f \oplus g)$ ([8]) ; de (D) et des formules (5), on tire les valeurs des produits d'intersections $(\delta_i \otimes \delta'_j , \delta_k \otimes \delta'_i)$ données dans [8].

§ 2. Classification

2.1 Définitions. Notons E_n l'espace des germes $f(z_0,\dots,z_n)$ de fonction holomorphe de $(n+1)$ variables au voisinage de 0, tels que $f(0) = 0$ et que 0 soit un point critique isolé de f. Deux éléments f, $f' \in E_n$ sont équivalents s'il existe un germe d'automorphisme analytique de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ transformant f en f'. Les différents objets construits à l'aide de f au paragraphe précédent sont invariants, à isomorphisme près, pour cette relation d'équivalence. Le problème général posé est la classification des éléments des E_n à équivalence près et la détermination des différents invariants attachés à une classe d'équivalence (nombre de Milnor, variation, groupe de monodromie, homomorphisme de monodromie,...).

Par exemple, si $\mu(f) = 1$, alors f est équivalent à $z_0^2 + \dots + z_n^2$ ("lemme de Morse") ; il n'y a donc qu'une seule classe d'équivalence pour $\mu = 1$ et les invariants correspondants ont été déterminés ci-dessus.

On dit [2] que $f \in E_n$ et $g \in E_m$ sont stablement équivalents s'il existe un entier r supérieur à n et m tel que $f \oplus (z_{n+1}^2 + \dots + z_r^2)$ et $g \oplus (z_{m+1}^2 + \dots + z_r^2)$ soient équivalents. On peut montrer que deux germes stablement équivalents ayant même nombre de variables sont équivalents, ce qui ramène le problème de la classification à celui de la "classification stable" ; d'autre part, d'après le théorème DST, l'invariant fondamental, savoir la variation, ne dépend que de la classe d'équivalence stable.

Le nombre de modules de f est le plus grand entier s tel que tout voisinage de f contienne des familles à s paramètres de germes non équivalents (pour donner un sens à cette définition, on se place dans l'espace des jets à un ordre convenable, espace qui est de dimension finie). En particulier, les germes de nombre de modules 0 sont dits simples ; ce sont donc ceux dont les déformations semi-universelles ne rencontrent qu'un nombre fini de classes d'équivalence.

2.2 Remarques. On peut se poser le problème de classification précédent dans plusieurs cadres : $\mathbb{C}$-analytique (c'est le cas ci-dessus), $\mathbb{C}$-formel, $\mathbb{R}$-analytique $\mathbb{R}$-formel, C^∞. Dans chaque cas, on dispose du théorème de suffisance de Tougeron

qui montre que la classe d'équivalence d'un germe de f de nombre de Milnor fini est déterminée par celle de son r-jet $j_r(f)$ pour r assez grand. On est donc ramené à classifier les jets "suffisants" à nombre de Milnor fini, problème dans lequel le cadre de départ n'intervient plus, seul éventuellement le corps de base. Dans la suite nous nous limitons au cas complexe ; dans le cas réel, il faut éventuellement remplacer certains signes $+$ par des $\pm$, confer [2].

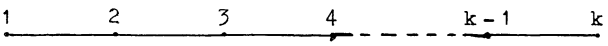
2.3 Diagrammes de Dynkin. Soient $f \in \underline{E}_n$ et (δ_i) une base de $E(f)$. Soit f' un germe stablement équivalent à f, avec $f' \in \underline{E}_m$ où $m \equiv 0 \mod. 4$. Choisissons un des deux isomorphismes DST de $E(f)$ sur $E(f')$ et transformons (δ_i) en une base (δ'_i) de $E(f')$. Supposons de plus que $(\delta'_i, \delta'_i) = 2$ pour tout i Le diagramme de Dynkin associé est le graphe qui a un sommet par élément de la base et où les sommets correspondants à δ_i et δ_j sont non liés, resp. liés par m traits pleins, resp. liés par m traits pointillés si, posant $a_{\{i,j\}} = (\delta'_i, \delta'_j)$, on a $a_{\{i,j\}} = 0$, resp. $a_{\{i,j\}} = -m$, resp. $a_{\{i,j\}} = m$.

Par exemple, si (δ_i) est une base distinguée, on a aussitôt avec les notations de 1.7 (formules (15) et (16)) $a_{\{i,j\}} = a_{ij}$ pour $i < j$ et $a_{\{i,j\}} = a_{ji}$ pour $i > j$. Du diagramme de Dynkin (numéroté) d'une base distinguée et de n, on déduit donc (pour f et pour tous les germes stablement équivalents à f) variation, forme-intersection, monodromie, groupe de monodromie.

Si (δ_i) est seulement faiblement distinguée, et si $f \in \underline{E}_n$ où $n \equiv 0 \mod. 2$, la connaissance du diagramme de Dynkin permet de calculer la forme-intersection, et le groupe de monodromie : on a $(\delta_i, \delta_i) = (-1)^{n/2}$, $(\delta_i, \delta_j) = (-1)^{n/2} a_{\{i,j\}}$ et le groupe de monodromie est engendré par les transformations T_i (formules (12)).

2.4 Tout germe $f \in \underline{E}_1$ est équivalent à l'un des germes z^{k+1}, $k \geq 1$. Le nombre de Milnor est k. Si on applique 1.7 à $\tilde{f} = z^{k+1} + \lambda z$, λ petit, on voit que F est formée de $(k+1)$ points $a_1, \ldots, a_{k+1}$ et que $\delta_1 = a_1 - a_2$, $\delta_2 = a_2 - a_3, \ldots, \delta_k = a_k - a_{k+1}$ forment une base distinguée de $E(f)$ (identi-

fié au module des combinaisons linéaires des a_i de somme des coefficients nulle). Le graphe de Dynkin correspondant est

(19) 

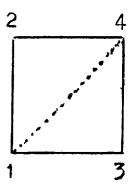
traditionnellement appelé A_k ; la transformation de monodromie T_i est la transposition (a_i , a_{i+1}) , le groupe de monodromie le groupe symétrique, et la monodromie T la permutation circulaire des a_i .

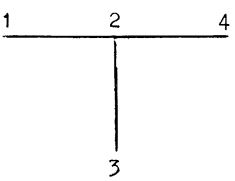
2.5 Le cas monomial. Par 1.9, on en déduit aussitôt ce qu'il se passe pour les germes $z_o^{m_o+1} + z_1^{m_1+1} + \ldots + z_n^{m_n+1}$. Donnons quelques exemples :

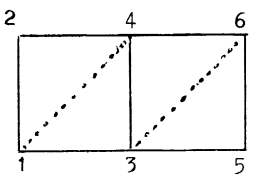
a) Le germe $x^3 + y^3$ donne pour la base distinguée naturelle (produit tensoriel des bases 2.4) le diagramme (20) ; par des manipulations simples (voir [8]), on en déduit une nouvelle base distinguée de diagramme (21) (Type D_4).

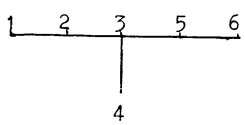
b) Le germe $x^3 + y^4$ donne pour la base distinguée naturelle le diagramme (22) ; par des manipulations simples (loc. cit.), on en déduit une nouvelle base distinguée de diagramme (23) (Type E_6).

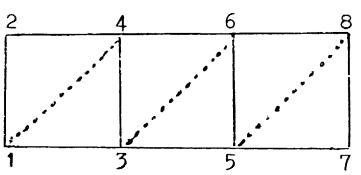
c) De même pour le germe $x^3 + y^5$ et les diagrammes (24) et (25) (Type E_8).

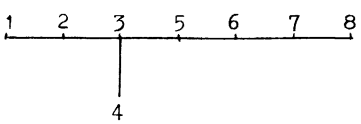
(20) 

(21) 

(22) 

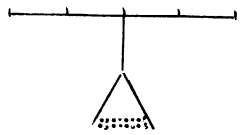
(23) 

(24) 

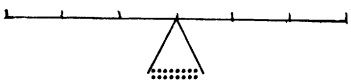
(25) 

d) Plus amusants sont les cas de $x^3 + y^3 + z^3$, $x^4 + y^4$, $x^6 + y^3$, de nombres de Milnor respectifs 8 , 9 , 10 , pour lesquels des manipulations analogues (loc. cit.) donnent des bases faiblement distinguées de diagramme de Dynkin (26), (27), (28) que l'on pourrait appeler $\bar{E}_6$, $\bar{E}_7$, $\bar{E}_8$ (ils sont obtenus par dédoublement d'un vecteur de base partir des diagrammes de Dynkin complété $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$), ou, par anticipation sur une notation introduite ci-après $T_{3,3,3}$, $T_{4,4,2}$, $T_{3,6,2}$.

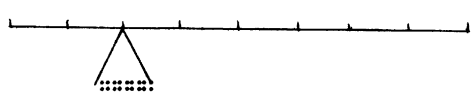
(26)



(27)



(28)

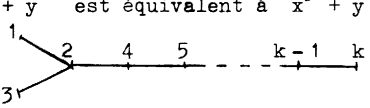


On tire aussitôt de ceci les groupes de monodromie correspondant (voir Théorème 3 ci-dessous).

2.6 Le cas quasi-homogène. Le germe f est quasi-homogène si c'est un polynôme, isobare pour des poids convenables donnés aux variables. Une classe d'équivalence est quasi-homogène si elle peut se représenter par un germe quasi-homogène. Les germes quasi-homogènes sont justiciables de méthodes particulières, voir [13] et [14]. Outre les exemples précédents, voici quelques germes quasi-homogènes.

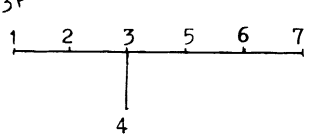
a) Les germes $x^2y + y^{k-1}$ $(k \geq 3)$ et $x^3 + xy^3$, pour lesquels on obtient des bases distinguées donnant les diagrammes (29) et (30) (Types D_k et E_7) ; noter que $x^2y + y^2$ est équivalent à $x^3 + y^2$ (d'ailleurs $D_3 = A_3$).

(29)



(k sommets)

(30)



b) Les familles à un paramètre $\tilde{E}_6(\lambda) : x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz$, $\tilde{E}_7(\lambda) : x^4 + y^4 + \lambda x^2y^2$, $\tilde{E}_8(\lambda) : x^6 + y^3 + \lambda x^4y$, où λ parcourt $\mathbf{C}$, et qui, pour $\lambda = 0$, donnent les trois germes de 2.5 d). Ils ont des bases faiblement distinguées de diagrammes (26), (27), (28).

2.7 Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes de classification d'Arnol'd, d'abord pour les germes simples (2.1) :

THÉORÈME 1 ([1,2]).- Les germes simples sont exactement, à équivalence près, les germes suivants : x^{k+1} , $k \geq 1$ (Type A_k) ; $x^2y + y^{k-1}$, $k \geq 4$ (Type D_4) ; $x^3 + y^4$, $x^3 + xy^3$, $x^3 + y^5$ (Types E_6, E_7, E_8). Soit $f \in \underline{E}_n$ ($n \equiv 0$ mod. 4) un germe simple. Dans l'espace $E(f)$, les vecteurs de longueur 2 forment un système de racines du type correspondant ; un système de racines simples convenable est une base distinguée ; la transformation de monodromie est une transformation de Coxeter ; le groupe de monodromie est le groupe de Weyl, l'homomorphisme de monodromie (17) est l'homomorphisme dans le groupe de Weyl du groupe de tresses Π correspondant ([5]), et l'espace B de 1.8 est un $K(\Pi,1)$. Enfin, pour $f \in \underline{E}_n$ ($n \equiv 0$ mod. 4) , la forme-intersection est positive et de discriminant non nul si et seulement si f est simple.

La première assertion se vérifie par un calcul long et élémentaire. Les assertions concernant Π et B sont beaucoup plus difficiles (voir [5] et [6]) . La caractérisation des germes simples par la forme-intersection résulte d'un théorème de semi-continuité de Tjurina. Les autres assertions se constatent.

2.8 Pour énoncer les autres théorèmes donnons une définition : Soient f un germe, $f' \in \underline{E}_n$ ($n \equiv 0$ mod. 4) un germe stablement équivalent, Q la forme-intersection sur $E(f') \otimes \mathbf{R}$. On dit que f est parabolique (resp. hyperbolique) si Q est positive et dégénérée (resp. si elle possède exactement un carré négatif). De manière analogue, les germes simples pourraient être appelés "elliptiques".

THÉORÈME 2 ([2]).- Les germes paraboliques sont, à équivalence stable près, ceux des trois familles $\tilde{E}_i(\lambda)$, $i = 6 , 7 , 8$ de nombre de Milnor $i+2$, de 2.6 b). Ils sont de nombre de modules 1 . Soit $f \in E_n$ $(n \equiv 0 \bmod. 4)$ un germe stablement équivalent à un germe de la famille $\tilde{E}_i(\lambda)$; la forme-intersection sur $E(f)$ est somme directe de la forme (positive) correspondant à E_i et d'une forme nulle à 2 variables ; le groupe de monodromie est une extension du groupe de Weyl de E_i par un groupe $\mathbb{Z}^{2i}$.

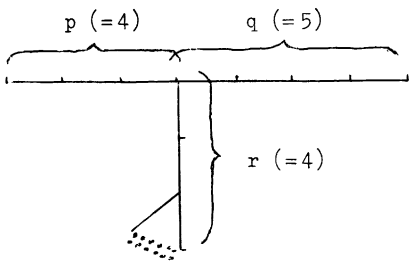
On peut aussi citer le théorème suivant de Saito :

THÉORÈME 3 ([14]).- Les germes quasi-homogènes dont toute déformation est quasi-homogène sont les germes simples et les germes paraboliques.

2.9 Passons au cas hyperbolique :

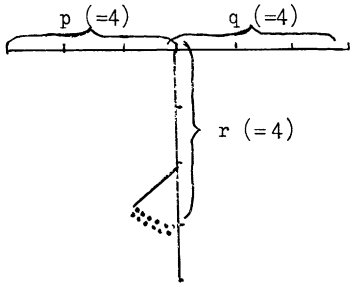
THÉORÈME 4 ([2]).- Les germes hyperboliques sont à équivalence stable près les germes des familles $T_{p,q,r}(\lambda) : x^p + y^q + z^r + \lambda xyz$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, où (p,q,r) parcourt les triplets non ordonnés d'entiers ≥ 2 tels que $1/p + 1/q + 1/r < 1$. Ils sont de nombre de modules 1 , de nombre de Milnor $\mu = p + q + r - 1$. Si $f \in E_n$ $(n \equiv 0 \bmod. 4)$ est un germe hyperbolique de type $T_{p,q,r}$, $E(f)$ possède une base faiblement distinguée de diagramme de Dynkin (31) (Type $T_{p,q,r}$).

(31)



2.10 Les germes de nombre de modules 1

THÉORÈME 5 ([2]).- Les germes de nombre de modules 1 sont : les germes paraboliques, les germes hyperboliques et les germes dits exceptionnels, stablement équivalents aux éléments de l'une des 14 familles à un paramètre données au tableau I. Soit $f \in E_n$ ($n \equiv 0 \bmod 4$) un germe exceptionnel ; $E(f)$ possède une base faiblement distinguée de diagramme de Dynkin (32) (Type $T'_{p,q,r}$) où le triplet (p,q,r) est donné dans le tableau I , avec $\mu = p + q + r$.



2.11 Dans [2], on trouvera une classification poussée un peu plus loin. Les familles que nous avons données ici épuisent les germes de nombre de modules ≤ 1 et aussi les germes de nombre de Milnor ≤ 13 . Il convient aussi de parler de déformations : disons que le type X se déforme en le type Y , si, dans tout voisinage de tout germe de type X , il y a des germes de type Y . Pour les types simples, cette relation est exactement ce qu'on pense (voir tableau II) ; pour les autres types, on a recopié aux notations près (tableau III) des diagrammes de [2] donnant certaines relations de déformations.

Pour les types simples on a l'énoncé plus général suivant (Grothendieck) :

Soient f un germe simple de diagramme X , $\tilde{f}$ une déformation de f et Y la somme disjointe des diagrammes associés aux divers points critiques sur $\tilde{f} = 0$. Alors Y s'obtient à partir de X en supprimant certains sommets et toutes les arêtes qui y arrivent. De plus, tous les sous-diagrammes (non nécessairement connexes) de X de ce type peuvent être obtenus.

TABLEAU I

nom du type	représentant	μ	nom du diagramme	dessin du diagramme	nombre de modules	S = simple H=hyperbolique P=parabolique E=exceptionnel
A_k, $k \geq 1$	x^{k+1}	k	A_k	(19)	0	S
D_k, $k \geq 3$	$x^2y + y^{k-1}$	k	D_k	(29)	0	S
E_6	$x^3 + y^4$	6	E_6	(23)	0	S
E_7	$x^3 + xy^3$	7	E_7	(30)	0	S
E_8	$x^3 + y^5$	8	E_8	(25)	0	S
$\tilde{E}_6(\lambda)$	$x^3+y^3+z^3+\lambda xyz$	8	$T_{3,3,3}$	(26)	1	P
$\tilde{E}_7(\lambda)$	$x^4+y^4+\lambda x^2y^2$	9	$T_{4,4,2}$	(27)	1	P
$\tilde{E}_8(\lambda)$	$x^6+y^3+\lambda x^4y$	10	$T_{3,6,2}$	(28)	1	P
$Q_{10}(\lambda)$	$x^2z+y^3+\lambda yz^3+z^4$	10	$T'_{3,3,4}$	(32)	1	E
$Q_{11}(\lambda)$	$x^2z+y^3+yz^3+\lambda z^5$	11	$T'_{3,3,5}$	"	1	E
$Q_{12}(\lambda)$	$x^2z+y^3+\lambda yz^4+z^5$	12	$T'_{3,3,6}$	"	1	E
$Z_{11}(\lambda)$	$x^3y+3\lambda xy^4+y^5$	11	$T'_{2,4,5}$	"	1	E
$Z_{12}(\lambda)$	$x^3y+3xy^4+\lambda y^6$	12	$T'_{2,4,6}$	"	1	E
$Z_{13}(\lambda)$	$x^3y+3\lambda xy^5+y^6$	13	$T'_{2,4,7}$	"	1	E
$S_{11}(\lambda)$	$x^2z+yz^2+y^4+\lambda y^3z$	11	$T'_{3,4,4}$	"	1	E
$S_{12}(\lambda)$	$x^2z+yz^2+xy^3+\lambda y^5$	12	$T'_{3,4,5}$	"	1	E
$U_{12}(\lambda)$	$x^3+y^3+z^4+3\lambda xyz^2$	12	$T'_{4,4,4}$	"	1	E
$W_{12}(\lambda)$	$x^4+y^5+2\lambda x^2y^3$	12	$T'_{2,5,5}$	"	1	E
$W_{13}(\lambda)$	$x^4+4xy^4+\lambda y^6$	13	$T'_{2,5,6}$	"	1	E
$K_{12}(\lambda)$	$x^3+\lambda xy^5+y^7$	12	$T'_{2,3,7}$	"	1	E
$K_{13}(\lambda)$	$x^3+\lambda xy^5+y^8$	13	$T'_{2,3,8}$	"	1	E
$K_{14}(\lambda)$	$x^3+xy^6+\lambda y^8$	14	$T'_{2,3,9}$	"	1	E
$T_{p,q,r}(\lambda)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$	$\lambda xyz + x^p + y^q + z^r$	p+q+r-1	$T_{p,q,r}$	(31)	1	H

Signalons enfin que les relations entre germes simples et systèmes de racines données par le Théorème 1 ne sont pas entièrement fortuites, bien que non entièrement élucidées ; on pourra consulter par exemple [4], [10] et [11]. Par ailleurs, [2] contient une bibliographie importante sur l'ensemble de la question.

Note ajoutée après l'exposé oral :

Dans une note à paraître : "Singularités facteur-coniques des surfaces complexes" [en russe], I. V. Dolgačev donne une description unifiée des 14 germes exceptionnels du théorème 5, à l'aide de pavages triangulaires du plan hyperbolique.

TABLEAU II

Toutes les déformations entre germes simples et paraboliques

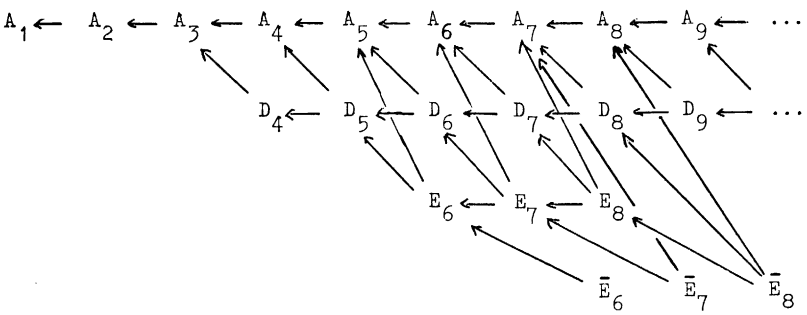
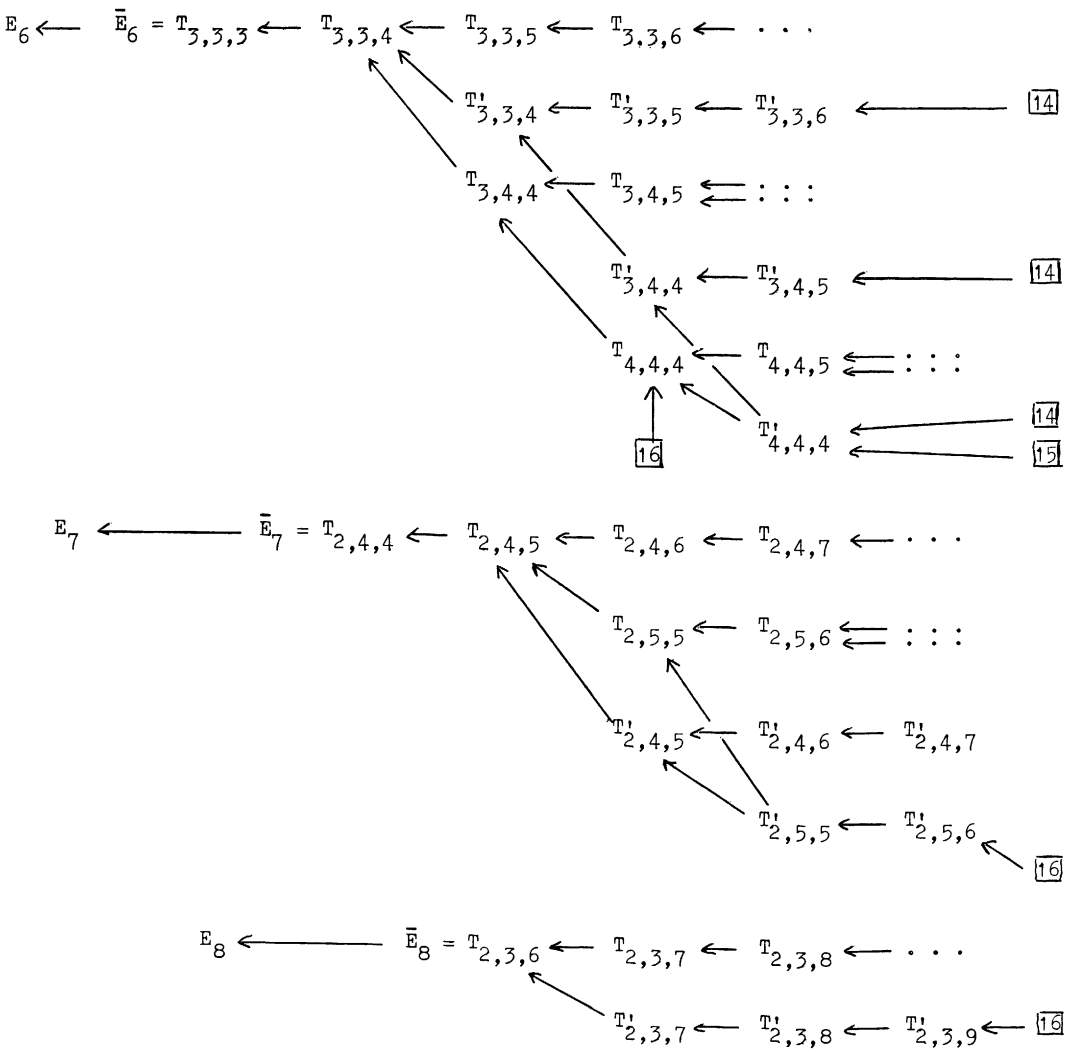


TABLEAU III

Quelques déformations

Légende : ← ... ou ← ::: pro ongement que le lecteur devine.

[μ] type donné dans [2] et de nombre de Milnor μ .



BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOL'D - Normal forms for functions near degenerate critical points..., Functional Analysis and its Applications, vol. 6, n° 4 (1972), p. 254-272 [traduction anglaise]

[2] V. I. ARNOL'D - Remarques sur la méthode de la phase stationnaire..., Uspekhi Mat. Nauk, tome XXVIII, 5 (1973), p. 17-45 [en russe].

[3] E. BRIESKORN - Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächer, Manuscripta Math., 2 (1970), p. 103-161.

[4] E. BRIESKORN - Singular elements of semi-simple algebraic groups, Proc. of the Int'l Cong. of Math., Nice, 1970.

[5] E. BRIESKORN - Groupes de tresses, Sém. Bourbaki n° 401, 24 p., Lecture Notes in Math. 317, Springer-Verlag, 1973.

[6] P. DELIGNE - Les immeubles des groupes de tresses généralisés, Invent. Math., 17, 1972, p. 273-302.

[7] P. DELIGNE - Le formalisme des cycles évanescents, exposé XIV (§ 3) de SGA 7, Lecture Notes in Math. 340, 1973.

[8] A. M. GABRIELOV - Matrices d'intersection pour certaines singularités, Funktionalny Analyz., t. 7, b. 3, 1973, p. 18-32 [en russe].

[9] H. HAMM et LE DUNG TRANG - Un théorème du type de Lefschetz, CRACS, 272 (1971), p. 946-949.

[10] E. BRIESKORN - Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorphen Abbildungen, Math. Ann, 178 (1968), p. 255-270.

[11] J. LIPMAN - Rational Singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorisation, Pub. Math. IHES, 36 (1969), p. 195-280

[12] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies, Princeton 1968.

[13] K. SAITO - Quasi-homogene isolierte Singularitäten..., Invent. Math., 14 (1971), p. 123-142.

[14] K. SAITO - Einfach Elliptische Singularitäten, preprint 1973.

[15] M. SEBASTIANI et R. THOM - Un résultat sur la monodromie, Invent. Math., 13, n° 1-2 (1971), p. 90-96.