SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS VERDIER

Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ-adique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 423, p. 98-115

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__98_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
25e année, 1972/73, n° 423

423-01
Novembre 1972

INDÉPENDANCE PAR RAPPORT À ℓ DES POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES DES ENDOMORPHISMES DE FROBENIUS DE LA COHOMOLOGIE ℓ-ADIQUE

[d'après P. DELIGNE]

par Jean-Louis VERDIER

1. Résultat

Soient X une variété algébrique propre sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et $\bar{X}$ la variété sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ déduite de X par extension des scalaires. On dispose, pour tout nombre premier ℓ premier à q, d'une théorie cohomologique $H^*(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ à valeurs dans les $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels [13]. Le $\bar{\mathbb{F}}_q$-endomorphisme de Frobenius $F_q : \bar{X} \to \bar{X}$ agit sur les espaces de dimension finie $H^r(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. Les polynômes caractéristiques, en la variable t, de ces actions sont notés

1.1 $$\det(1 - tF_q ; H^r_\ell(\bar{X})) .$$

Ces polynômes sont à coefficients entiers ℓ-adiques et les racines de ces polynômes dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ sont des unités car ce sont des polynômes caractéristiques d'automorphismes de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Lorsque X est propre et lisse, on a une égalité de séries formelles en la variable t à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$:

1.2 $$\zeta(X,t) = \prod_r \det(1 - tF_q ; H^r_\ell(\bar{X}))^{(-1)^{r+1}}$$

avec

$$\zeta(X,t) = \prod_x (1 - t^{\deg(x)})^{(-1)}$$

où x décrit les points fermés du schéma X [7]. Ces séries formelles sont donc à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

ON conjecture généralement que [19]

W 1) Les polynômes $\det(1 - tF_q ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et sont indépendants de ℓ .

W 2) Les racines dans $\mathbb{C}$ de $\det(1 - tF_q ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont de module $q^{-r/2}$.

THÉORÈME A (P. Deligne).- Soit X une variété projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$, qui se remonte avec sa polarisation en caractéristique 0. Alors les polynômes $\det(1 - tF_q ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et indépendants de ℓ .

On dit que X propre sur $\mathbb{F}_q$ se remonte en caractéristique 0 s'il existe un anneau de valuation discrète A d'inégale caractéristique et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, et un schéma propre et plat Z sur spec A dont la fibre au-dessus du point fermé soit isomorphe à X. Si X est lisse, Z est lisse sur spec A , On dit que X projective se remonte avec sa polarisation, si on peut trouver un schéma Z , comme ci-dessus, projectif sur spec A qui induise sur X un multiple du plongement projectif donné.

2. Géométrie des pinceaux

Soient k un corps, $X \xhookrightarrow{i} P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de l'espace projectif sur k de dimension N . L'ensemble des hyperplans de P^N est paramétré par un espace projectif $\check{P}^N$. Pour $s \in \check{P}^N$, on pose $Y_s = X \cap s$. Le lieu $\check{X} = \{s \in \check{P}^N \mid Y_s \text{ est singulier}\}$ est appelé la variété duale de X . Un pinceau de sections hyperplanes de X , ou simplement un pinceau, consiste en la donnée d'une droite projective $P^1 \subset \check{P}^N$, i.e. d'un point fermé de la grassmanienne $Gr(1,\check{P}^N)$, tel que $S = P^1 \cap \check{X}$ soit fini et tel que, pour tout $s \in S$, Y_s ne

possède qu'un seul point singulier. Un pinceau d'hypersurfaces de degré d est un pinceau de sections hyperplanes du d-ième multiple du plongement i. L'axe d'un pinceau d'hyperplan est l'intersection commune des hyperplans du pinceau. On dit qu'un pinceau est de Lefschetz si pour les valeurs exceptionnelles $s \in S$ du paramètre, le point singulier de Y_s est un point singulier quadratique ordinaire [4] et si l'axe du pinceau est transverse à X. Le plongement $i : X \hookrightarrow P^N$ est dit de Lefschetz s'il existe un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes.

PROPOSITION 2.1.- a) Le carré du plongement i est de Lefschetz.

b) L'ensemble des pinceaux de Lefschetz est ouvert dans l'ensemble des points fermés de $Gr(1,\check{P}^N)$.

c) Soient Y_o une section hyperplane lisse de X et $Gr(1,\check{P}^N)_{Y_o}$ la sous-variété des droites de $\check{P}^N$ passant par Y_o. L'ensemble des pinceaux de Lefschetz est ouvert dans l'ensemble des points fermés de $Gr(1,\check{P}^N)_{Y_o}$, ouvert dense si $X \xhookrightarrow{i} P^N$ est un plongement de Lefschetz.

d) Si le plongement $i : X \hookrightarrow P$ est de Lefschetz, un point fermé de $Gr(1,\check{P}^N)$ est un pinceau de Lefschetz si et seulement s'il est en position générale par rapport à $\check{X}$.

Voir [8] pour la démonstration.

3. Cohomologie des sections hyperplanes

3.1. Le théorème de Lefschetz facile. Soient k un corps algébriquement clos, $X \xhookrightarrow{i} P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de dimension $n+1$ de l'espace projectif à N dimensions sur k et Y une section hyperplane lisse de X. Alors pour tout nombre premier ℓ premier à la caractéristique de k, l'homomorphisme de restriction

$$H^r(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^r(Y,\mathbb{Q}_\ell)$$

est bijectif pour $i < n$ et injectif pour $i = n$.

(Voir [9] et [16] pour le cas de la cohomologie ℓ-adique et [2] pour le cas de la cohomologie transcendante (cohomologie "ordinaire").)

3.2. Le théorème de Lefschetz difficile. Soit X une variété projective purement de dimension $n+1$ sur un corps algébriquement clos k . Soient $u \in H^2(X,\mathbb{Q}_\ell[1])$, ℓ premier à $\mathrm{car}(k)$, la classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_X(1)$ et $L : H^\cdot(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^{\cdot+2}(X,\mathbb{Q}_\ell[1])$ la multiplication par u . On note (LV) la propriété :

(LV) Pour tout r tel que $0 \leq r \leq n$, l'application

$$L^{n-r+1} : H^r(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^{2n+2-r}(X,\mathbb{Q}_\ell[n-r+1]) ,$$

est bijective.

Lorsque $k = \mathbf{C}$ et lorsque X est lisse, la cohomologie ordinaire à coefficient dans $\mathbb{Q}$ possède la propriété (LV) (cf. [18] pour une démonstration utilisant la théorie des variétés kählériennes). On en déduit par le théorème de comparaison [13] que la propriété (LV) est satisfaite lorsque X est lisse et k de caractéristique zéro et par le théorème de spécialisation [13] que la propriété (LV) est satisfaite si X est lisse et se remonte avec sa polarisation en caractéristique zéro.

Soit maintenant X une variété projective de dimension $n+1$ lisse et connexe sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, qui se remonte en caractéristique zéro. Alors $\bar{X}$ possède la propriété (LV) . On en déduit les équations fonctionnelles pour $0 \leq r \leq n$:

3.2.1. $$\det(1 - tF_q ; H_\ell^{2n+2-r}(\bar{X})) = \det(1 - q^{n+1-r}tF_q ; H_\ell^r(\bar{X})) .$$

4. La cohomologie évanescente

Soient $\bar{k}$ un corps algébriquement clos, $\bar{X} \xhookrightarrow{i} P^N$ une sous-variété fermée de dimension $n+1$, lisse et connexe de l'espace projectif sur $\bar{k}$, qui se

remonte en caractéristique zéro, $\bar{Y}$ une section hyperplane lisse. Le cup-produit

$$H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) \times H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) \to H^{2n}(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)$$

induit sur $\mathrm{Im}(H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \to H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell))$ une forme bilinéaire non dégénérée (la démonstration de cette propriété utilise (LV) pour X et pour Y [9]). On a donc une décomposition orthogonale

$$4.0 \qquad H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Im}(H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \to H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)) \oplus E_\ell^n .$$

Le sous-espace $E_\ell^n \hookrightarrow H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)$ est appelé l'espace de la <u>cohomologie évanescente</u>.

Soient maintenant X une sous-variété fermée de dimension $n+1$ lisse et connexe de l'espace projectif P^N sur un corps k, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. Soient $(Y_s)_{s \in P^1}$ un pinceau rationnel sur k, S l'ensemble des valeurs exceptionnelles du pinceau. Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de $P_1 - S$ (à valeur dans $\bar{k}$) $Y_{\bar{s}}$ est une section lisse de $\bar{X}$ et $\bar{s} \longmapsto H^n(Y_{\bar{s}},\mathbb{Q}_\ell)$ est un système local au sens étale sur $P^1 - S$. Si $\bar{s}_o$ est un point géométrique fixe de $P^1 - S$, ce système local est décrit par une action de $\hat{\Pi}_1(P_1 - S, \bar{s}_o)$ sur $H^n(Y_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell)$ appelée action de <u>monodromie globale</u>.

On a une suite exacte :

$$4.1 \qquad 0 \to \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_o) \to \hat{\Pi}_1(P_1 - S, \bar{s}_o) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 0 ,$$

où $\hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}})$ est le $\hat{\Pi}_1$ <u>géométrique</u>, obtenu après extension des scalaires à $\bar{k}$. La restriction de la monodromie globale au $\hat{\Pi}_1$ géométrique est appelée <u>monodromie globale géométrique</u>.

Le système local $\bar{s} \longmapsto H^n(X_{\bar{s}},\mathbb{Q}_\ell)$ s'identifie à un sous-système local de $\bar{s} \longmapsto H^n(Y_{\bar{s}},\mathbb{Q}_\ell)$ (3.1) et l'action de $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$ sur $H^n(X_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell)$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et s'identifie alors à l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$.

Lorsque X se remonte en caractéristique zéro, la décomposition $H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Im}(H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell)) \oplus E^n_\ell$ est préservée par l'action de la monodromie.

PROPOSITION 4.2.- *Si* $\mathrm{car}(k) \neq 2$, *si* X *se remonte en caractéristique zéro et si* $(Y_s)_{s \in P^1}$ *est un pinceau de Lefschetz,* $H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ *s'identifie aux points fixes de* $H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell)$ *sous l'action de la monodromie géométrique.*

Voir [9] pour la démonstration.

Etudions l'action de la monodromie sur la cohomologie évanescente. Notons $\mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$ (resp. $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$) le groupe des similitudes (resp. des automorphismes) de la forme bilinéaire sur E^n_ℓ induite par le cup-produit. Ce sont aussi les points rationnels sur $\mathbb{Q}_\ell$ de groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}_\ell$ et notés $\mathrm{Sim}(E^n_\ell)$ et $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n) \to \mathrm{Sim}(E^n) \to G_m \to 0 ,$$

donnant lieu à une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell^* .$$

Notons $\chi : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathbb{Q}_\ell^*$ le caractère décrivant l'opération de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\mathbb{Q}_\ell[1]$. La monodromie induit sur E^n_ℓ des similitudes et on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_o) & \to & \hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o) & \to & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) & \to & 0 \\ & & \downarrow \bar{\rho} & & \downarrow \rho & & \downarrow \chi^{-n} & & \\ 0 & \to & \mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) & \to & \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) & \to & \mathbb{Q}_\ell^* & & \end{array} \qquad 4.3$$

où ρ (resp. $\bar{\rho}$) est la représentation de monodromie (resp. géométrique).

THÉORÈME B.- On suppose que car(k) $\neq 2$ et que X se remonte en caractéristique zéro avec sa polarisation. Il existe un entier $d_o > 0$, tel que, pour tout nombre premier ℓ premier à car(k), tout entier $d \geq d_o$ et tout pinceau de Lefschetz d'hypersurface de degré d, l'image de $\bar{\rho}$ (4.3) soit dense pour la topologie de Zariski dans $\mathrm{Aut}(E_\ell^n)$.

Pour n impair, on peut prendre $d_o = 1$ et le théorème B dans ce cas est dû à Kajdan et Margoulis. Pour n pair, le théorème B est dû à P. Deligne. La démonstration de ce théorème est indiquée au n° 6.

5. Théorème B $\Rightarrow$ Théorème A

5.1. Soit $i : X \hookrightarrow P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de dimension $n+1$ d'un espace projectif sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$, qui se remonte en caractéristique zéro. Quitte à remplacer i par un multiple convenable, on peut supposer que i est un plongement de Lefschetz (2.1) et que l'entier d_o du théorème B est égal à 1. On se propose de démontrer le théorème A pour X et pour cela on raisonne par récurrence sur la dimension de X, l'assertion étant triviale lorsque cette dimension est nulle.

5.2. On se ramène tout d'abord au cas où $i : X \hookrightarrow P^N$ possède un pinceau de Lefschetz rationnel sur $\mathbf{F}_q$ ayant une section lisse rationnelle sur $\mathbf{F}_q$. En effet, il existe un entier m_o tel que pour tout $m \geq m_o$, il existe un pinceau de Lefschetz rationnel sur $\mathbf{F}_{q^m}$ ayant une section lisse rationnelle sur $\mathbf{F}_{q^m}$ (2.1). Si on sait démontrer le théorème A sous cette hypothèse supplémentaire, on en déduit que pour tout $m \geq m_o$ et tout r, les polynômes $\det(1 - tF_q^m ; H_\ell^r(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et indépendants de ℓ. Il en résulte facilement le théorème A pour X.

5.3. Soit donc $(Y_s)_{s \in P^1}$ un pinceau de Lefschetz rationnel sur $\mathbf{F}_q$, $s_o \in P^1 - S$,

$\deg(s_o) = 1$, et $\bar{s}_o$ un point géométrique au-dessus de s_o à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. D'après le théorème de Lefschetz facile (3.1), on a des isomorphismes, compatibles avec l'action du Frobenius

$$H^r(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \simeq H^r(Y_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell) \qquad r < n .$$

Utilisant alors 3.2.1, on voit que l'hypothèse de récurrence entraîne que les polynômes $\det(1 - tF_q ; H^r(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers indépendants de ℓ pour $r \neq n$, $n+1$, $n+2$.

5.4. Il suffit alors de montrer que les polynômes $\det(1 - tF_q ; H^n_\ell(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et indépendants de ℓ . En effet, en vertu de 3.2.1, on en déduit que $\det(1 - tF_q ; H^{n+2}_\ell(\bar{X}))$ est à coefficients entiers et ne dépend pas de ℓ et en utilisant la fonction $\zeta(X,t)$ (1.2) on en déduit que $\det(1 - tF_q ; H^{n+1}_\ell(\bar{X}))$ est à coefficients entiers et indépendants de ℓ .

5.5. Pour tout $s \in P^1 - S$, on a une section lisse Y_s définie sur le corps résiduel $\varkappa(s)$ de $X_s = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \varkappa(s)$. Notons F_s la substitution de Frobenius relative à $\varkappa(s)$. La décomposition 4.0 fournit la relation

5.5.1. $$\det(1 - tF_s ; H^n_\ell(\bar{Y}_s)) = \det(1 - tF_q^{\deg(s)} ; H^n_\ell(\bar{X}))\det(1 - tF_s ; E^n_{\ell,s}) .$$

Le deuxième facteur du deuxième membre peut encore s'interpréter ainsi :

Pour tout $s \in P^1 - S$, on a un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\varkappa(s)) \to \hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o)$ défini à conjugaison près. L'image de F_s par cet homomorphisme est encore notée F_s . Elle est définie à conjugaison près dans $\hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o)$. On a de plus la représentation de monodromie $\rho : \hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o) \to \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$ et on a

$$\det(1 - tF_s ; E^n_{\ell,s}) = \det(1 - t\rho(F_s) ; E^n_\ell) .$$

PROPOSITION 5.6.- Soient $P(t) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$ et $Q(t) = \prod_j (1 - \beta_j t)$ deux polynômes tels que les α_i et les β_j soient des unités d'une extension algébrique

finie $\mathbb{Q}'_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. Pour tout point fermé $s \in P^1 - S$ posons

$P^{\deg(s)}(t) = \prod_i (1 - \alpha_i^{\deg(s)} t)$, $Q^{\deg(s)}(t) = \prod_j (1 - \beta_j^{\deg(s)} t)$. Si pour tout point fermé $s \in P^1 - S$, $P^{\deg(s)}(t)$ divise $Q^{\deg(s)}(t).\det(1 - t\rho(F_s) ; E_\ell^n)$, alors $P(t)$ divise $Q(t)$.

5.7. L'assertion Théorème B $\Rightarrow$ Théorème A résulte de 5.6

En effet, 5.6 caractérise $\det(1 - tF_q ; H_\ell^n(\bar{X}))$ comme étant le plus petit commun multiple des polynômes $P(t) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$, α_i unités dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$, tels que $P^{\deg(s)}(t)$ divise pour tout $s \in P^1 - S$, les polynômes à coefficients entiers et indépendants de ℓ , $\det(1 - tF_s ; H_\ell^n(\bar{Y}_s))$.

5.8. Démontrons la proposition 5.6. Par récurrence sur le degré de P , on peut supposer que $P(t) = (1 - \alpha t)$ et par l'absurde, on peut supposer que $\alpha \neq \beta_j$ pour tout j . Comme α est une unité ℓ-adique, il existe un et un seul caractère continu $\sigma \longmapsto \alpha^\sigma$ de $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$ dans $\mathbb{Q}_\ell'^*$ tel que pour les Frobenius F_s , $s \in P^1 - S$, on ait

$$\alpha^{F_s} = \alpha^{\deg(s)} .$$

Le $\hat{\Pi}_1$ géométrique est contenu dans le noyau de ce caractère. Comme $\alpha \neq \beta_j$ pour tout j , l'ensemble des σ tels que $\alpha^\sigma \neq \beta_j^\sigma$ pour tout j , est un ouvert U non vide stable par translation à droite par le $\hat{\Pi}_1$ géométrique. Donc, pour tout s tel qu'un conjugué de F_s soit dans U . $\alpha^{\deg(s)}$ est racine de $\det(1 - \rho(F_s)t ; E_\ell^n)$. D'après le théorème de Čebotarev [12], les conjugués des F_s sont denses dans $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$. Donc, pour tout σ dans U , α^σ est racine de $\det(1 - \rho(\sigma)t ; E_\ell^n)$. En particulier, soit $\sigma_o \in U$; α^{σ_o} est racine de $\det(1 - \rho(\sigma_o)\rho(\tau) ; E_\ell^n)$ pour tout élément τ du $\hat{\Pi}_1$ géométrique. D'après le théo-

rème B, l'image par ρ du $\hat{\Pi}_1$ géométrique est dense dans $\mathrm{Aut}(E_\ell^n)$ pour la topologie de Zariski. Donc α^{σ_o} est racine de $\det(1 - \rho(\sigma_o)v ; E_\ell^n)$ pour tout $v \in \mathrm{Aut}(E_\ell^n)(\mathbb{Q}_\ell)$. On se convainc facilement que c'est idiot.

6. Démonstration du théorème B

6.1. Réduction à la caractéristique zéro. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, A un anneau de valuation discrète complet dont le corps des fractions soit de caractéristique zéro. Soient X un sous-schéma fermé lisse et connexe de dimension $n+1$ sur $\mathrm{spec}(A)$ de P_A^N , X_o la fibre spéciale, $X_{\bar{\eta}}$ la fibre générale au-dessus d'un point géométrique générique de $\mathrm{spec}(A)$. Soit $(Y_s)_{s \in P^1(k)}$ un pinceau de Lefschetz pour X_o . Alors ce pinceau se remonte en caractéristique zéro et s'étend en un pinceau paramétré par P_A^1 avec un lieu exceptionnel S_A fini et étale sur $\mathrm{spec}(A)$. La cohomologie évanescente pour ce pinceau est un système local sur $P_A^1 - S_A$ [13]. On peut montrer que l'action de monodromie de $\hat{\Pi}_1(P_A^1 - S_A)$ sur la cohomologie évanescente est modérément ramifiée [9]. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\Pi}_1^{mr}(P_k^1 - S_k) \\ & & \downarrow \\ \hat{\Pi}_1(P_{\bar{\eta}}^1 - S_{\bar{\eta}}) & \to & \hat{\Pi}_1^{mr}(P_A^1 - S_A) \end{array}$$

où, faute de préciser les points bases, les flèches ne sont pas définies qu'à automorphisme intérieur près (mr indique la ramification modérée). On a aussi un théorème de spécialisation qui affirme que ces flèches sont des isomorphismes [17]. Par suite, les images dans $\mathrm{Aut}(E_\ell^n)$ de l'action de monodromie de la fibre spéciale et de la fibre géométrique générale sont égales. On est donc ramené à démontrer le théorème B lorsque $\mathrm{car}(k) = 0$.

De plus, par application du principe de Lefschetz, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$.

6.2. Réduction à la cohomologie transcendante. Notons $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ le groupe d'homotopie des lacets, $\iota : \Pi_1(P^1 - S, s_o) \to \hat{\Pi}_1(P^1 - S, s_o)$ l'homomorphisme canonique dans son complété profini, E^n l'espace de cohomologie évanescente sur $\mathbb{Q}$, $\rho_t : \Pi_1(P^1 - S, s_o) \to \mathrm{Aut}(E^n)(\mathbb{Q})$ l'opération de monodromie transcendante. On en déduit une action $\rho_t \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}_\ell}$ de $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ sur $E^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$. Il résulte du théorème de comparaison qu'il existe un isomorphisme $E^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq E^n_\ell$ compatible avec les monodromies [13].

Notons $M(E^n)$ la fermeture de Zariski de $\rho_t(\Pi_1(P^1 - S, s_o))$ dans $\mathrm{Aut}(E^n)$, $\mathrm{Der}(E^n)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(E^n)$, $\mathcal{M}(E^n)$ l'algèbre de Lie de $M(E^n)$, sous-algèbre de $\mathrm{Der}(E^n)$. Comme la formation de la fermeture de Zariski commute à l'extension des scalaires, il suffit pour démontrer le théorème B de montrer que $M(E^n) = \mathrm{Aut}(E^n)$.

6.3. La formule de Picard-Lefschetz. Soient $S = s_1, \ldots, s_m$ les valeurs exceptionnelles du pinceau de Lefschetz $(Y_s)_{s \in P^1}$. Choisissons des lacets σ_j qui engendrent $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ et qui, pour tout j , tournent autour de s_j . Quitte à prendre un multiple convenable du plongement $X \hookrightarrow P^N$, il existe, pour tout j , des éléments $\delta_j \in E^n$ tels qu'on ait pour tout $x \in E^n$ la formule de Picard-Lefschetz :

6.3.1. $$\rho_t(\sigma_j)(x) = x - (-1)^k (x \cup \delta_j)\delta_j \quad , \quad n = 2k \text{ ou } 2k+1 \ ,$$

avec $(\delta_j \cup \delta_j) = (-1)^k 2$ si $n = 2k$.

Les éléments δ_j sont uniquement déterminés, au signe près, par ces propriétés. Ils engendrent la cohomologie évanescente. Ils sont conjugués sous l'action de la monodromie. (Cf. [6] pour le cas transcendant, et [9] pour le cas étale.)

On en déduit en particulier que dans le cas n pair, $M(E^n)$ comporte des symétries. Pour démontrer le théorème B, il suffit donc de montrer que $\mathcal{M}(E^n) = \mathrm{Der}(E^n)$.

6.4. Semi-simplicité. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz et du fait que les cycles évanescents sont conjugués et engendrent E^n que la représentation de $M(E^n)$ sur E^n est absolument simple.

PROPOSITION 6.4.1.- a) Si n est impair, $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C}$ est une algèbre simple, E^n est un $\mathcal{M}(E^n)$-module absolument simple.

b) Si n est pair, deux cas seulement sont possibles :

1) $\mathcal{M}(E^n)$ est semi-simple, $E^n \otimes \mathbf{C} \simeq V^k$ où V est un $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C}$ - module simple ;

2) $\mathcal{M}(E^n)$ est abélienne, E^n est un $\mathcal{M}(E^n)$-module semi-simple.

Supposons n impair. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz que $M(E^n)$ est engendré par des éléments unipotents et par suite $M(E^n)$ est connexe. Donc E^n est un $\mathcal{M}(E^n)$-module absolument simple. Le centre de $\mathcal{M}(E^n)$ opère scalairement. Comme il doit préserver une forme alternée, le centre est nul, d'où a).

Supposons que n soit pair. Notons $M^o(E^n)$ la composante neutre de $M(E^n)$. Le radical unipotent de $M^o(E^n)$ est trivial. Donc $M^o(E^n)$ est réductif. Soit $E^n \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_\alpha V_\alpha^{k(\alpha)}$ une décomposition de E^n en modules isotypiques sous $M^o(E^n)(\mathbf{C})$. Le groupe $M(E^n)/M^o(E^n)$ opère sur l'ensemble des α . Comme E^n est un $M(E^n)$-module absolument simple, l'ensemble des α est un espace homogène sous $M(E^n)/M^o(E^n)$ et $k(\alpha)$ ne dépend pas de α . Mais $M(E^n)/M^o(E^n)$ est engendré par des symétries et les symétries laissent des hyperplans fixes. Si l'ensemble des

α n'est pas réduit à un élément, on a $\dim(V_\alpha^k) = 1$ pour tout α ; d'où $k = 1$ et $\dim(V_\alpha) = 1$. Par suite $\mathcal{M}(E^n)$ est abélienne. Sinon, on a $E^n \otimes C \simeq V^k$. Le centre de $M^o(E^n)(C)$ opère scalairement. Comme il préserve une forme bilinéaire non nulle, ce centre est contenu dans $\{-1 , +1\}$; d'où b).

6.5. Un lemme sur les algèbres de Lie

LEMME 6.5.1.- Soit $w : \mathfrak{g} \to gl(V)$ une représentation simple et fidèle d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Soit $U \in \mathfrak{g}$.

a) Si $w(U)^2 = 0$ et si $\dim \operatorname{Im} w(U) = 1$, trois cas seulement sont possibles

1) $\mathfrak{g} \simeq sl$ et w est la représentation usuelle.

2) $\mathfrak{g} \simeq sl$ et w est la représentation contragrédiante de la représentation usuelle.

3) $\mathfrak{g} \simeq sp$ et w est la représentation usuelle.

b) S'il existe une forme quadratique non dégénérée invariante par w , si $w(U)^2 = 0$ et si $\dim \operatorname{Im} w(U) = 2$, deux cas seulement sont possibles

1) $\mathfrak{g} \simeq so$ et w est la représentation usuelle.

2) $\mathfrak{g} \simeq g_2$ et w est la représentation sur les nombres de Cayley purs

La démonstration de ce lemme se fait en inspectant les tables [cf. 14].

6.6. Fin de la démonstration du théorème B dans le cas n impair. Soit δ_j un cycle évanescent relatif au lacet σ_j (6.3). Posons $U = \rho_t(\sigma_j) - Id$. Alors $U^2 = 0$ et $\dim \operatorname{Im} U = 1$. D'après 6.4.1 et 6.5.1, on est dans un des cas a_1) a_2) a_3). Les cas a_1 et a_2 sont exclus, car il y a sur E^n une forme alternée invariante.

6.7. Démonstration dans le cas n pair : un énoncé intermédiaire.

Admettons provisoirement le lemme suivant (on suppose n pair) :

LEMME 6.7.1.- Pour tout multiple assez grand du plongement $X \hookrightarrow P^N$, il existe $\sigma \in \Pi_1(P^1 - S, s_o)$ tel que $(\rho_t(\sigma) - Id)^2 = 0$ et $\dim \mathrm{Im}\,(\rho_t(\sigma) - Id) = 2$.

Montrons que le lemme entraîne le théorème B. On pose $U = \rho_t(\sigma) - Id$. Tout d'abord $U \in \mathcal{M}(E^n)$ car $U^2 = 0$ et on a $E \otimes \mathbb{C} \simeq V^k$ avec V simple et $k = 1$ ou 2 (6.4.1) sinon on ne pourrait pas avoir $\dim \mathrm{Im}(\rho_t(\sigma) - Id) = 2$ et on ne peut avoir $\mathcal{M}(E^n)$ abélienne car $U \in \mathcal{M}(E^n)$ est un nilpotent non trivial. Supposons $k = 2$. La forme quadratique de E^n induit sur V une forme quadratique qui est soit nulle, soit non dégénérée car V est simple. Comme $\dim \mathrm{Im}(U)(V) = 1$, on a d'après le lemme 6.5.1 $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbb{C} \simeq sp(V)$ ou $sl(V)$ et il ne peut y avoir sur V une forme quadratique invariante. Donc V est totalement isotrope. Il existe $s \in M(E^n)/M^o(E^n)$ tel que $sV \cap V = 0$ car E^n est simple sous $M(E^n)$. La forme quadratique sur E^n fournit une forme symétrique non dégénérée sur V, $b(x,y) = x \cup sy$.

La forme $b(x,y)$ fournit un isomorphisme de sV avec le dual V^* de V. Comme $E^n \otimes \mathbb{C} \simeq V^2$, on a un isomorphisme de V avec son dual ce qui exclu le cas $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbb{C} = sl(V)$ avec $\dim V > 2$. On a donc, d'après 6.5.1 a), $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbb{C} \simeq sp(V)$. Comme $Sp(V)$ n'a pas d'automorphisme extérieur, $M(E^n)(\mathbb{C})$ est un quotient de $Z \times Sp(V)$ où Z est un groupe fini isomorphe au centralisateur de $Sp(V)$ dans $M(E^n)(\mathbb{C})$. La représentation simple $M(E^n) \to Aut(E^n)$ fournit une représentation de $Z \times Sp(V)$ du type $L \otimes V$ où L est une représentation simple de degré 2 de Z. Les formes bilinéaires invariantes sur $L \otimes V$ sont uniques à un scalaire près. Il existe sur L une

forme bilinéaire invariante par l'action de Z et sur V une forme bilinéaire alternée invariante par l'action de $Sp(V)$. Le produit tensoriel de ces deux formes est symétrique et invariant par l'action de $Z \times Sp(V)$. Donc la forme bilinéaire sur L est alternée. Mais alors, les opérations de $Z \times Sp(V)$ sur $E^n \otimes C$ sont unimodulaires, ce qui contredit le fait que ce groupe contient des symétries.

On a donc $k = 1$. Supposons $\mathcal{M}_b(E^n) \otimes C = \underline{g}_2$, la représentation étant sur les nombres purs de Cayley. Le groupe G_2 opère transitivement sur les vecteurs de longueur 1 . Donc $M(E^n)(C)$ contient toutes les symétries et par suite est égal au groupe orthogonal, contradiction. On a donc $\mathcal{M}_b(E^n) \otimes C = \underline{so}(E^n \otimes C)$. Donc $M(E^n) = Aut(E^n)$.

6.8. Changement de pinceaux. Le système local de la cohomologie évanescente sur $P^1 - S$ est la restriction à $P^1 - S$ du système local de la cohomologie évanescente sur $\check{P}^N - \check{X}$ (cf. 2). D'après un théorème de Lefschetz [10], l'application naturelle $\Pi_1(P^1 - S) \to \Pi_1(\check{P}^N - \check{X})$ est surjective. Il suffit donc de construire un lacet dans $\check{P}^N - \check{X}$ qui fournisse l'opération demandée sur E^n dans le lemme 6.7.1 pour démontrer celui-ci. Mais on peut prendre alors l'image d'un lacet provenant d'un pinceau qui n'est pas nécessairement un pinceau de Lefschetz.

6.9. Monodromie locale. Soit $f : C^{n+1} \to C$ un germe de fonction holomorphe à l'origine tel que $f(0) = 0$ et que 0 soit un point singulier isolé pour f . Soit B_ε une boule centrée en 0 de rayon ε petit. Pour η très petit $\neq 0$, $\eta \longmapsto \tilde{H}^n(f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon, \mathbb{Q})$ est un système local sur le disque pointé et est donc décrit par un automorphisme m_f d'un espace vectoriel E_f appelé automorphisme de monodromie locale.

PROPOSITION 6.9.1.- La monodromie locale ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la singularité 0 de $f^{-1}(0)$

En effet la classe d'isomorphisme du germe de morphisme $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme analytique de la singularité de 0 dans $f^{-1}(0)$.

THÉORÈME 6.9.2 (N. A'Campo) [1].- Lorsque $n = 1$ et $f = (y^2 - x^3)(x^2 - y^3)$, on a

a) le polynôme caractéristique $\det(tm_f - 1; E_f)$ est $(t-1)(t+1)^2\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]^2$.

b) Le polynôme minimal de m_f est $(t-1)(t+1)^2\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]$.

En particulier, m_f^{10} est unipotent et $\dim \mathrm{Im}(m_f^{10} - 1) = 1$.

THÉORÈME 6.9.3 (Thom-Sebastiani) [15].- Soient $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}$ deux germes de fonctions holomorphes en 0 tels que $f(0) = g(0) = 0$ et tels que 0 soit un point singulier isolé pour f et g . Alors $E_{f+g} = E_f \otimes E_g$ et $m_{f+g} = m_f \otimes m_g$.

De ces deux théorèmes, on déduit

PROPOSITION 6.9.4.- Pour $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$, $n \geq 2$, défini par l'équation

$$f = x_0^3 + (x_1^3 - x_2^2)(x_2^3 - x_1^2) + \sum_3^n x_i^2 ,$$

on a

1) $\dim E_f = 22$.

2) m_f n'a pas la valeur propre 1 .

3) $\dim \mathrm{Im}(m_f^{30} - \mathrm{Id})) = 2$, $(m_f^{30} - \mathrm{Id})^2 = 0$.

6.10. Fin de la démonstration. Soient Z une variété analytique (lisse), C une courbe, 0 un point de C , $z_0 \in Z$, $f : Z \to C$ une application holomorphe

telle que

a) f soit propre, lisse en dehors de z_o , $f(z_o) = 0$;

b) la singularité de $f^{-1}(0)$ en z_o soit analytiquement isomorphe à celle décrite en 6.9.4.

Pour $\eta \in C$, posons $Z_\eta = f^{-1}(\eta)$. On a une suite exacte compatible avec l'action de monodromie autour de 0 [11] :

$$0 \to H^n(Z_o) \to H^n(Z_\eta) \to E_f \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Z_o) \to H^{n+1}(Z_\eta) \to 0 .$$

Par définition la monodromie agit trivialement sur $H^n(Z_o)$ et $H^{n+1}(Z_o)$. On en déduit (6.9.4, 2) et 6.9.1) un isomorphisme $H^n(Z_\eta) \simeq H^n(Z_o) \oplus E_f$ compatible avec l'action de la monodromie. Si m_f désigne l'automorphisme de monodromie sur $H^n(Z_\eta)$, on a :

$$(m_f^{30} - Id)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Im}(m_f^{30} - Id) = 2 .$$

Pour terminer la preuve du lemme 6.7.1, il suffit, vu (6.8), de construire un pinceau d'hypersurfaces de degré d présentant pour une valeur s_o du paramètre, une singularité analytiquement isomorphe à celle décrite en 6.9.4. D'après [3], il suffit pour cela que l'équation locale de l'intersection, coïncide avec l'équation de 6.9.4 à un ordre M assez grand (il suffit de prendre $M \geq 13$). Ceci peut toujours se faire en prenant d assez grand (il suffit de prendre $d \geq 13$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'CAMPO - Thèse, 1972/73, Orsay.

[2] A. ANDREOTTI and T. FRANKEL - In global analysis, Princeton Univ. Press, 1969.

[3] J.-C. TOUGERON - Idéaux de fonctions différentiables, Ergebnisse n° 71, Springer 1972

[4] P. DELIGNE - SGA 7, exp. XIII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[5] P. DELIGNE - Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES, 40, 1971, p. 5-58.

[6] I. FÁRY - Cohomologie des variétés algébriques, Annals of Maths. 65 (1957), p. 21-73.

[7] A. GROTHENDIECK - Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Sém. Bourbaki, n° 279, 1964/65, Benjamin, New York.

[8] N. KATZ - SGA 7, exp. XVII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[9] N. KATZ - SGA 7, exp. XVIII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[10] S. LEFSCHETZ - L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique, Gauthier-Villars, Paris.

[11] J. MILNOR - Singular Points of Complex hypersurfaces, Annals of Maths. Studies n° 61, Princeton Univ. Press.

[12] J.-P. SERRE - Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.

[13] SGA 4, Tome 3, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Maths n° 305, Springer-Verlag.

[14] B. KOSTANT - A characterization of the classical groups, Duke J., 25(1958), p.107-123.

[15] R. THOM - M. SEBASTIANI - Un résumé sur la monodromie, Invent. M., 13 (1971), p.90-96.

[16] M. RAYNAUD - SGA 2, Exp. XIV, Profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale, North-Holland.

[17] M. RAYNAUD - Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse, 1972.

[18] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kähleriennes, Hermann, 1958.

[19] A. WEIL - Number of solutions of equations, Bulletin A.M.S. 55 (1949), p. 497-508.