SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ GRAMAIN

Groupe des difféomorphismes et espace de Teichmüller d'une surface

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 426, p. 157-170

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__157_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
25e année, 1972/73, n° 426

GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES ET ESPACE DE TEICHMÜLLER D'UNE SURFACE

[d'après C. EARLE et J. EELLS]

par André GRAMAIN

Dans [6], C. Earle et J. Eells calculent le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte (variété différentiable réelle de dimension 2). Un article complémentaire ([7]) de C. Earle et A. Schatz fait le calcul pour les surfaces compactes à bord. Les résultats sont les suivants :

THÉORÈME 1.- Soit V une surface compacte connexe, orientable ou non, avec ou sans bord. Soit $D(V)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de V muni de la topologie C^∞ . Soit $D_0(V)$ le sous-groupe de $D(V)$ constitué des difféomorphismes homotopes à l'identité.

a) La composante connexe de l'identité dans $D(V)$ est $D_0(V)$, sauf dans les cas du disque et du cylindre où $D_0(V)$ a deux composantes.

b) Soit $\chi(V)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de V ; si $\chi(V) < 0$, le groupe $D_0(V)$ est contractile.

b') Les exceptions sont :
la sphère et le plan projectif : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $SO(3)$,
le tore orientable : $D_0(V)$ a le type d'homotopie du tore,
le tore de Klein et la bande de Moebius : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $SO(2)$,
le disque et le cylindre : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $O(2)$.

Remarques.- 1) L'assertion a) était déjà connue (démontrée par D. Epstein [8] reprenant un vieil article de R. Baer [2]). D'autre part, l'équivalence d'homotopie de $SO(3)$ à $D_0(S_2)$ avait été démontrée par S. Smale de façon purement topologique ([11], voir aussi [5]).

2) Le théorème 1 donne le type d'homotopie de la composante neutre de $D(V)$. On peut démontrer que ce résultat est équivalent à l'énoncé général suivant :

Soient V une surface compacte connexe quelconque, v un point de V et $D(V,v)$ le groupe des difféomorphismes de V qui sont tangents à l'identité en v . Les composantes connexes de $D(V,v)$ sont contractiles.

3) Le th. 1 vaut aussi pour les difféomorphismes de classe C^r $(r \geq 1)$.

4) Le type faible d'homotopie du groupe $H(V)$ des homéomorphismes d'une surface V a été calculé par M. Hamstrom ([10]). Le th. 1 permet de constater que l'injection canonique $D(V) \to H(V)$ est une équivalence faible d'homotopie. On ne sait pas démontrer que c'est une équivalence d'homotopie.

La démonstration du th. 1 que nous allons exposer ([6] et [7]) est tout à fait détournée. Elle utilise les structures analytiques complexes sur les surfaces et la théorie de Teichmüller (cf. [9]). La théorie a son origine dans un article de O. Teichmüller ([12]). Celui-ci munit l'espace des structures analytiques d'une surface V (ou, plus précisément, l'espace de Teichmüller $T(V)$ dont c'est un quotient) d'une structure topologique "naturelle" pour laquelle $T(V)$ est homéomorphe à R^{6g-6} , où g est le genre de V . La théorie fit des progrès, il y a une quinzaine d'années, avec les travaux de Ahlfors, Bers et Kodaira-Spencer qui permirent de définir sur $T(V)$ une structure analytique complexe "naturelle" (voir [13]). Ces résultats sont de nature locale (dans $T(V)$) ; c'est un résultat global (ci-dessous th. 4) qui permet de démontrer le th. 1 lorsque V est une surface orientable. Le cas des surfaces non orientables ou à bord se traite de façon voisine (§ 6).

1. Structures analytiques complexes et équations de Beltrami

Soit V une surface orientée de classe C^∞ . Une structure presque complexe sur V est une section C^∞ du fibré en $Gl_+(R^2)/Gl(C)$ associé au fibré tangent orienté de V . On identifie $Gl_+(R^2)/Gl(C)$ au disque unité ouvert Δ de C en associant à tout complexe μ , tel que $|\mu| < 1$, l'application $z \mapsto z + \mu\bar{z}$. On munit l'espace $M(V)$ des structures presque complexes de V

de la structure de la C^∞-convergence compacte. En dimension complexe 1 , une structure presque complexe est complètement intégrable. Il est alors connu qu'elle provient d'une structure analytique complexe sur V (compatible avec la structure C^∞).

Supposons que V soit un ouvert de C ; alors M(V) est le sous-espace $C^\infty(V,\Delta)$ de $C^\infty(V,C)$. Soit $\mu : V \to \Delta$ une fonction de classe C^∞ ; une fonction $w : V \to C$, de classe C^∞ , est holomorphe, pour la structure sur V définie par μ si dw est proportionnelle à $dz + \mu.d\bar{z}$, autrement dit si l'on a :

(1) $$w'_{\bar{z}} = \mu.w'_z \quad .$$

L'équation (1) se ramène à une équation elliptique si $|\mu(z)| < 1$, uniformément elliptique si $|\mu(z)| \leq k < 1$. On a alors :

THÉORÈME 2 ([4]).- Soit $\mu \in C^\infty(V,\Delta)$. Au voisinage de tout point de V , l'équation (1) possède une solution Z de classe C^∞ , à jacobien strictement positif. Toute solution w(z) de (1) est fonction holomorphe de Z .

THÉORÈME 3 (Ahlfors-Bers [1], Earle-Eells [6]).- Soit V le plan complexe C (resp. le demi-plan supérieur ouvert U). Soit $\mu \in C^\infty(V,C)$ une fonction telle que $|\mu(z)| \leq k < 1$. Il existe une unique solution w_μ de (1) qui soit un homéomorphisme de C (resp. $\bar{U}$) sur lui-même laissant fixes 0 et 1 . C'est un difféomorphisme. L'application $\mu \mapsto w_\mu$ est un homéomorphisme du sous-espace de M(V) des μ telles que $|\mu| \leq k$ sur son image dans $C^\infty(V,C)$.

Pour une surface compacte connexe orientée sans bord V , on va étudier l'opération de D(V) et $D_o(V)$ sur M(V) à droite définie par image réciproque. Désormais, D(V) est le groupe des difféomorphismes conservant l'orientation. Pour les surfaces de genre $g > 1$, on va montrer que $D_o(V)$ opère proprement et librement, que le quotient $T(V) = M(V)/D_o(V)$ est contractile et que l'application canonique $\Phi : M(V) \to T(V)$ possède des sections locales. Il en résulte alors que c'est une fibration principale de groupe $D_o(V)$. La contractilité de l'espace total et de la base entraîne celle de $D_o(V)$.

2. Difféomorphismes de la sphère

Pour la sphère, dont toutes les structures complexes sont isomorphes, le th. 1 résulte directement du th. 3. Soit S la sphère de Riemann. Les groupes $D(S)$ et $D_0(S)$ coïncident. Soient G le sous-groupe de $D(S)$ des isomorphismes de la structure complexe et D' le sous-groupe des éléments de $D(S)$ qui fixent les points 0, 1 et ∞.

Lemme 1.- L'espace $D(S)$ est homéomorphe au produit $G \times D'$.

L'application de composition $G \times D' \to D(S)$ est un homéomorphisme car une homographie $g \in G$ est déterminée de façon unique et continue par les points $g(0)$, $g(1)$ et $g(\infty)$.

L'injection canonique de $SO(3)$ dans G est une équivalence d'homotopie. Pour démontrer le th. 1, il reste donc à démontrer que D' est contractile. On va démontrer que cet espace est homéomorphe à l'espace contractile $M(S)$.

Soit $J \in M(S)$ une structure complexe sur S. On en déduit, par projection stéréographique de $S - \{\infty\}$ sur C une fonction $\mu \in C^\infty(C, \Delta)$ bornée en module par $k < 1$ puisque S est compacte. L'homéormorphisme w_μ de C (th. 3) se transpose en un homéomorphisme de $S - \{\infty\}$ sur $S - \{\infty\}$ qui se prolonge donc en un homéomorphisme $f : S \to S$. Celui-ci est holomorphe (sur $S - \{\infty\}$, donc partout) de la structure J sur la structure habituelle. C'est donc un élément de D'.

Lemme 2.- L'application $J \mapsto f$ de $M(S)$ dans D' est un homéomorphisme.

Elle est bijective et continue d'après le th. 3 ; la réciproque est évidemment continue.

3. Surfaces orientables de genre $g \geq 2$. Opération de $D(V)$ dans $M(V)$

Soit V une surface compacte connexe orientée de genre ≥ 2 ; soit V_o la surface V munie d'une structure complexe. Un revêtement universel de V_o est une variété analytique complexe de dimension 1 simplement connexe ; c'est donc S, C ou U. Le groupe Γ des automorphismes du revêtement est un groupe

de transformations holomorphes sans point fixe ; il est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(V)$, donc infini et non commutatif. Par suite, le revêtement universel de V_o est isomorphe à U . Choisissons un tel revêtement analytique $\pi : U \to V_o$. Soit G le groupe des automorphismes holomorphes de U . C'est le groupe des transformations homographiques $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, où a , b , c , $d \in R$ et $ad - bc = 1$. Le groupe Γ des automorphismes de π est un sous-groupe discret de G . Il opère dans U librement avec un domaine fondamental compact. Il en résulte qu'il est constitué de transformations hyperboliques du demi-plan.

Pour étudier l'opération de $D(V)$ et $D_o(V)$ dans $M(V)$, nous allons remonter dans U .

Lemme 3.- L'application $\pi^* : M(V) \to M(U)$ est un homéomorphisme de $M(V)$ sur son image. L'image $M(\Gamma)$ de π^* est l'ensemble des structures complexes sur U invariantes par Γ . Les fonctions $\mu \in C^\infty(U,\Delta)$ correspondantes sont caractérisées par la condition

$$\mu = (\mu \circ \gamma).\bar{\gamma}'/\gamma' , \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma . \tag{2}$$

L'application π^* associe à une structure complexe sur V la structure image réciproque sur U . La formule (2) résulte d'un petit calcul. Elle montre, comme Γ possède un domaine fondamental compact, qu'une fonction $\mu \in M(\Gamma)$ est majorée en module par un réel $k < 1$. Il résulte du lemme que $M(\Gamma)$ est un ouvert convexe dans l'espace de Fréchet $A^1(\Gamma)$ des fonctions de $C^\infty(U,C)$ satisfaisant à (2).

De même, soit $D(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans $D(U)$. C'est l'ensemble des difféomorphismes de U qui induisent un difféomorphisme de V . Soit $D_o(\Gamma)$ le centralisateur de Γ dans $D(\Gamma)$.

Lemme 4.- L'application naturelle $\pi_* : D(\Gamma) \to D(V)$ est un homomorphisme continu, ouvert et surjectif de noyau Γ . Elle induit un isomorphisme de $D_o(\Gamma)$ sur $D_o(V)$.

Dans la première assertion, la seule chose à démontrer est que π_* est

ouverte. Démontrons la deuxième. L'intersection $D_o(\Gamma) \cap \Gamma$ est le centre de Γ qui est trivial. Montrons que $\pi_*(f) \in D_o(V)$ si $f \in D_o(\Gamma)$. Pour tout point $z \in U$, soit D_z la droite (pour la géométrie de Poincaré) joignant z à $f(z)$, et soit $f_t(z)$ le point qui partage le segment $[z, f(z)]$ dans le rapport $t/(1-t)$, $t \in [0,1]$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $f(\gamma(z)) = \gamma(f(z))$, donc $\gamma(D_z) = D_{\gamma(z)}$ et $\gamma(f_t(z)) = f_t(\gamma(z))$ puisque γ est un déplacement (de Poincaré). L'application f_t passe au quotient et donne une homotopie entre $\pi_*(f)$ et l'identité. Inversement, si $g : V \to V$ est homotope à l'identité, on voit, en relevant l'homotopie que g possède un relèvement qui commute aux automorphismes du revêtement.

Démontrons que π_* est ouverte. Il suffit de démontrer que, pour toute suite (g_n) dans $D(V)$ convergeant vers l'identité pour la C^o-convergence, il existe une suite (f_n) dans $D(\Gamma)$ convergeant vers l'identité pour la C^o-convergence compacte et telle que $\pi_*(f_n) = g_n$. Or, si g_n est assez voisine de l'identité, il existe une petite homotopie entre g_n et l'identité. Par relèvement, on obtient une suite (f_n) dans $D_o(\Gamma)$ qui converge simplement vers l'identité de U. D'autre part, en considérant la métrique de Poincaré sur U, la famille (f_n) est équicontinue comme la famille (g_n). La suite (f_n) converge donc vers l'identité uniformément sur tout compact.

Remarque 5.- Supposons qu'on ait choisi une autre structure complexe V_1 et un autre revêtement holomorphe $\pi_1 : U \to V_1$ de groupe Γ_1. Il existe un isomorphisme de π sur π_1 qui est un difféomorphisme f de U. On a $\Gamma_1 = f \circ \Gamma \circ f^{-1}$. Les groupes $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma_1)$ sont isomorphes par transmutation par f. L'isomorphisme de $M(\Gamma)$ sur $M(\Gamma_1)$ est holomorphe et compatible avec les opérations respectives de $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma_1)$.

THÉORÈME 4.- L'opération de $D(V)$ dans $M(V)$ est continue, effective et propre. Le sous-groupe $D_o(V)$ opère librement et proprement.

La continuité est évidente. Pour le reste, regardons l'opération correspondante de $D(\Gamma)/\Gamma$ sur $M(\Gamma)$ et l'opération de $D(\Gamma)$ sur $M(\Gamma)$ qui s'en déduit. Le groupe Γ opère trivialement. C'est le plus grand sous-groupe opé-

rant trivialement. En effet, soit $\delta \in D(\Gamma) - \Gamma$; il existe des points z_1 , $z_2 \in U$ tels que $\delta(z_1) = z_2$ et $\pi(z_1) \neq \pi(z_2)$. Il existe une fonction $\mu \in M(\Gamma)$ nulle en z_1 et égale à $\frac{1}{2}$ en z_2 . La structure complexe de μ n'est pas invariante par δ .

Le groupe d'isotropie de 0 (structure de V_o) est $D(\Gamma) \cap G = N(\Gamma)$, normalisateur de Γ dans G . Comme $D_o(\Gamma) \cap G$ (centralisateur de Γ dans G) est trivial, $D_o(\Gamma)$ opère librement (compte tenu de la remarque 5).

Montrons que $D(\Gamma)/\Gamma$ opère proprement. Il s'agit de montrer que l'application $(\mu, g) \to (\mu, \mu.g)$ de $M(\Gamma) \times D(\Gamma)/\Gamma$ dans $M(\Gamma) \times M(\Gamma)$ est propre. Soit A un ensemble muni d'un ultrafiltre F et soient $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ des familles telles que $\mu_\alpha \in M(\Gamma)$, $g_\alpha \in D(\Gamma)/\Gamma$. Supposons que $\mu_\alpha \to \mu$ et $\nu_\alpha = \mu_\alpha . g_\alpha \to \nu$ suivant F . Soient $z_o \in U$, K un domaine fondamental compact de Γ et $f_\alpha \in D(\Gamma)$ un représentant de g_α tel que $f_\alpha(z_o) = z_\alpha \in K$. Pour tout $\alpha \in A$, soit $h_\alpha \in G$ tel que $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha} \circ f_\alpha$ laisse fixes les points 0 , 1 et ∞ . On a alors $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha} \circ f_\alpha = w_{\nu_\alpha}$ d'après l'assertion d'unicité du th. 3. D'après l'assertion de continuité de ce théorème, $w_{\nu_\alpha} \to w_\nu$; en particulier $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha}(z_\alpha) \to w_\nu(z_o)$. Les z_α sont dans K et $w_{\mu_\alpha} \to w_\mu$, donc pour un certain ensemble $B \in F$, les $(w_{\mu_\alpha}(z_\alpha))_{\alpha \in B}$ sont dans un compact. Comme $h_\alpha(w_{\mu_\alpha}(z_\alpha))$ a une limite, il résulte du théorème d'Ascoli que la famille (h_α) a une limite $h \in G$. La famille des $f_\alpha = w_{\mu_\alpha}^{-1} \circ h_\alpha^{-1} \circ w_{\nu_\alpha}$ a donc pour limite $f = w_\mu^{-1} \circ h^{-1} \circ w_\nu \in D(\Gamma)$, et l'on a $\mu.f = \lim \mu_\alpha . f_\alpha = \nu$, ce qui prouve la propreté de l'opération.

Enfin $D_o(V)$, qui est ouvert dans $D(V)$, opère proprement.

Remarques.- 6) Le groupe $N(\Gamma)/\Gamma$ d'isotropie de 0 , groupe des automorphismes complexes de V_o , est fini.

7) Le groupe discret $D(V)/D_o(V)$ opère proprement dans l'espace $M(V)/D_o(V) = T(V)$.

4. Sections locales

Soit V_o la surface V munie d'une structure complexe. On peut fixer le choix du revêtement $\pi : U \to V_o$. Soient $v \in V$ et $a_1,\ldots,a_g, b_1,\ldots,b_g$ des générateurs de $\pi_1(V,v)$ satisfaisant à la relation habituelle. Il existe alors un unique revêtement holomorphe $\pi : U \to V_o$ satisfaisant à la propriété suivante :

(N) il existe un point $u_o \in \pi^{-1}(v)$ tel que l'automorphisme A_1 du revêtement correspondant au relèvement de a_1 en u_o ait pour points fixes 0 et ∞ , et l'automorphisme B_1 correspondant à b_1 ait 1 pour point fixe attractif.

Soit en effet $\pi : (U,u) \to (V,v)$ un revêtement holomorphe. Il existe un unique $T \in G$ qui transporte les points fixes de A_1 en 0 et ∞ et le point fixe attractif de B_1 en 1 . Par suite, $\pi \circ T^{-1}$ est l'unique revêtement possédant la propriété (N).

Soit $S \subset G^{2g}$ l'ensemble des points $(A_1,\ldots,B_g)$ tels que

1) $\prod_{1 \le i \le g} [A_i , B_i] = 1$,

2) $A_1(0) = 0$, $A_1(\infty) = \infty$, $B_1(1) = 1$,

3) les A_i et les B_i sont des transformations hyperboliques dont les points fixes sont distincts.

Un calcul montre que S est une sous-variété analytique réelle de dimension $6g - 6$ de G^{2g} . Par les relèvements A_i , B_i en u_o des a_i , b_i dans le revêtement normalisé de V_o , on définit une application $P : M(V) \to S$.

Lemme 5.- L'application $P : M(V) \to S$ se factorise en une application injective $M(V)/D_o(V) \to S$.

Supposons que $P(V_o) = P(V_1)$ et soit Γ le groupe correspondant. L'application identique de U passe au quotient par Γ et induit un difféomorphisme holomorphe $g : V_1 \to V_o$. Soit d'autre part $f : (U,u_1) \to (U,u_o)$ le relèvement aux revêtements normalisés de l'application identique $V_1 \to V_o$. Comme $P(V_o) = P(V_1)$, l'application f commute à Γ. Il en résulte que g est homotope à l'identité (cf. lemme 4).

Inversement, soit $g : V_1 \to V_o$ un difféomorphisme holomorphe. Il se relève en un difféomorphisme $f : U \to U$ de sorte que $\pi \circ f = g \circ \pi$, et $\pi \circ f^{-1} : U \to V_1$ est holomorphe. Ceci présente V_1 comme quotient de U par $f \circ \Gamma \circ f^{-1}$. Si, de plus, g est homotope à l'identité, on peut choisir f commutant à Γ et l'on a $P(V_1) = P(V_o)$.

Ainsi, l'image de P n'est autre que l'espace des surfaces de Riemann X de genre g munies de la classe d'homotopie d'un difféomorphisme $X \to V$.

Plus généralement, identifions $M(\Gamma)$ à $M(V)$ par la structure V_o, et soit $\mu \in M(\Gamma)$ une structure complexe V_1 sur V. Le difféomorphisme w_μ (th. 3) laisse fixes 0, 1 et ∞. Par suite, si $s = P(V_o)$, on a $P(V_1) = w_\mu \circ s \circ w_\mu^{-1}$. Il en résulte que l'application P est continue (th. 3) et même analytique réelle sur les sous-espaces de dimension finie de $M(\Gamma)$ d'après un complément du th. 3 ([1]).

Pour montrer que l'application $\Phi : M(V) \to T(V)$ possède des sections locales, il suffit de démontrer que l'application $P : M(V) \to S$ possède des sections locales. Cela c'est la théorie locale (cf. [13]) : on constate que le noyau de la "dérivée" en 0 de $P : M(\Gamma) \to S$ est orthogonal à l'espace $Q(\Gamma)$ des formes différentielles holomorphes quadratiques invariantes par Γ, et on conclut par Riemann-Roch que la codimension de ce noyau est au moins $6g - 6$.

5. Contractilité de $T(V)$

THÉORÈME 5 (Teichmüller).- L'espace $T(V)$ est homéomorphe à R^{6g-6}.

La théorie classique de Teichmüller étudie les structures complexes compa-

tibles avec la structure quasi-conforme. On remplace $M(\Gamma)$ par l'espace (plus grand) $M'(\Gamma)$ des fonctions $\mu : U \to \Delta$ mesurables, bornées en module par $k < 1$ et satisfaisant à (2) ; on remplace $D(V)$ par les homéomorphismes quasi-conformes (i.e. les homéomorphismes w possédant des dérivées partielles généralisées telles que $|w'_{\bar{z}}| \leq k|w'_z|$). On a, comme au § 4, une application $Q : M'(\Gamma) \to S$; l'espace de Teichmüller $T'(V)$ est, par définition, l'image de Q .

Etant données deux surfaces de Riemann V_o et V_1 , Teichmüller montre que, dans chaque classe d'homotopie d'homéomorphismes de V_1 dans V_o , il y a un unique homéomorphisme quasi-conforme plus beau que tous les autres : il réalise le minimum du coefficient de dilatation $K(w)$ (borne supérieure de $(|w'_z| + |w'_{\bar{z}}|) / (|w'_z| - |w'_{\bar{z}}|)$). Ceci donne une section de Q et permet de démontrer que $T'(V)$ est homéomorphe à R^{6g-6} ; en fait, on trouve même une isométrie lorsque l'on munit $T'(V)$ de la distance définie à l'aide de $\mathrm{Log}(K(w))$ (pour une démonstration, voir [3]).

Il est clair que $Q|M(V) = P$. Pour voir que $T(V)$ est contractile, il suffit donc (th. 5) de montrer que P et Q ont même image. Or la classe d'homotopie d'un homéomorphisme $V_1 \to V_o$ contient un difféomorphisme.

6. Les autres cas

Parmi les surfaces orientables sans bord, il reste à s'occuper du tore. Soient V un tore, v un point de V et (a,b) une base de $\pi_1(V,v)$. Soit V_o la surface V munie d'une structure complexe ; il existe un unique revêtement holomorphe $\pi : C \to V$ tel que $\pi(0) = v$ et que l'opération de a soit la translation de 1 . A b correspond la translation d'un complexe τ_o , et on peut supposer b choisi de sorte que $\mathrm{Im}(\tau_o) > 0$.

On démontre que le groupe $D_o(V,v)$ (difféomorphismes laissant fixe v et homotopes à l'identité) opère dans $M(V)$ continûment, librement et proprement. On le voit en identifiant $M(V)$ à l'espace $M(\Gamma) \subset C^\infty(C,\Delta)$ des fonctions périodiques dont le groupe des périodes contient le groupe Γ engendré par 1 et

τ_o , et $D_o(V,v)$ au groupe $D_o(\Gamma,0)$ des difféomorphismes de C laissant 0 fixe et commutant à Γ .

L'espace S est remplacé par U et l'application P associe à toute structure complexe V_i le relèvement τ_i de b . Il y a alors une section holomorphe σ de $P : M(\Gamma) \to U$ donnée explicitement par $\sigma(z) = (\tau_o - z)/(z - \bar{\tau}_o)$.

Pour les surfaces à bord (de caractéristique d'Euler < 0), la démonstration de [7] est analogue à celle de [6] qu'on vient d'exposer. On passe au revêtement universel de V dont le groupe est un groupe Fuchsien Γ , mais, cette fois, de deuxième espèce. L'ensemble $L(\Gamma)$ des points d'accumulation des orbites est un Cantor dans $R \cup \{\infty\}$. Soit I son complémentaire dans $R \cup \{\infty\}$, on a un revêtement $\pi : U \cup I \to V$ de groupe Γ tel que $\pi^{-1}(bV) = I$. Il faut aménager le th. 3 pour $U \cup I$ et, en particulier, trouver des majorations au bord pour démontrer la continuité.

Enfin, pour les surfaces non orientables, on passe au revêtement connexe à deux feuillets et on développe la même théorie <u>modulo</u> l'opération du groupe à deux éléments.

ADDENDUM

L'équivalence d'homotopie faible $D(V) \to H(V)$ (cf. remarque 4) est une vraie équivalence d'homotopie ; R. Luke et W. Mason ([14]) ont en effet démontré que $H(V)$ est un A.N.R.

Indiquons d'autre part que J. Cerf ([15]) a donné une démonstration directe du fait que $D(V) \to H(V)$ est une équivalence d'homotopie faible n'utilisant pas le calcul de ces groupes, mais uniquement l'hypothèse que $D_o(S_2)$ a le type d'homotopie de $SO(3)$ (J. Cerf démontre même l'analogue pour les variétés de dimension 3).

Enfin, l'auteur ([16]) vient de donner une démonstration purement topologique du th. 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS and L. BERS - Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math., 72 (1960), 385-404.

[2] R. BAER - Isotopie von Kurven auf orientierbaren Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. reine angew. Math., 159 (1928), 101-111.

[3] L. BERS - Quasiconformal mappings and Teichmüller theorem, in Analytic functions, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[4] L. BERS, F. JOHN and M. SCHECTER - Partial differential equations, Interscience, New York, 1964.

[5] J. CERF - Théorèmes de fibration des espaces de plongements, Sém. Cartan, 15e année, 1962/63, exp. n° 8.

[6] C. EARLE and J. EELLS - A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Differential Geometry, 3 (1969), 19-43.

[7] C. EARLE and A. SCHATZ - Teichmüller theory for surfaces with boundary, J. Differential Geometry, 4 (1970), 169-185.

[8] D. EPSTEIN - Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115 (1966), 83-107.

[9] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction en géométrie analytique, Sém. Cartan, 13e année, 1960/61, exp. n^{os} 7-8.

[10] M. HAMSTROM - Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, Illinois J. Math., 10 (1966), 563-573.

[11] S. SMALE - Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 621-626.

[12] O. TEICHMÜLLER - Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Preuss. Akad., 22 (1940)

[13] A. WEIL - Modules des surfaces de Riemann, Sém. Bourbaki, 11e année, 1958/59, exp. n° 168, Addison-Wesley/Benjamin, New York.

[14] R. LUKE and W. MASON - The space of homeomorphisms on a compact 2-manifold is an A.N.R., Trans. of A.M.S., 164 (1972), 275-285.

[15] J. CERF - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. de la S.M.F., 89 (1961), 227-380.

[16] A. GRAMAIN - Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface, Ann. Sc. de l'E.N.S., 6 (1973), 53-66.