SÉMINAIRE N. BOURBAKI

GÉRARD SCHIFFMANN

Un analogue du théorème de Borel-Weil-Bott dans le cas non compact

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 398, p. 323-336

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__323_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI

23e année, 1970/71, n° 398 Juin 1971

UN ANALOGUE DU THÉORÈME DE BOREL-WEIL-BOTT DANS LE CAS NON COMPACT

Par Gérard SCHIFFMANN

En 1965 ,à l'occasion d'un exposé sur la dimension de certains espaces de formes automorphes ,Langlands [11] a conjecturé que le théorème de Borel Weil-Bott [9] devait pouvoir s'étendre au cas de la série discrète .Cette extension a été obtenue par M.S. Narasimhan et K. Okamoto [12] dans le cas hermitien symétrique ,puis par W.Schmid [19] dans le cas général .Toutefois dans ces deux mémoires ,les auteurs sont obligés de faire la même hypothèse restrictive : "λ assez régulier " .

§ 1. Rappels sur la série discrète .

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple ,non compact ,connexe ,à centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G .On suppose que le rang de G est égal au rang de K .Soit H un sous-groupe de Cartan de K donc de G .Soient $\underline{g}$,$\underline{k}$,$\underline{h}$ les algèbres de Lie de G ,K ,H respectivement et $\underline{g}_{\mathbb{C}}$,$\underline{k}_{\mathbb{C}}$,$\underline{h}_{\mathbb{C}}$ leurs complexifiées .On note W le groupe de Weyl de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ et W_K celui de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ .Le groupe des caractères unitaires de H peut s'identifier à un réseau Λ dans $\underline{h}_{\mathbb{R}}^* = i\underline{h}^*$.Un point de Λ est régulier si son stabilisateur dans W est trivial ;soit Λ' l'ensemble des points réguliers.

Pour tout $\lambda \in \Lambda'$,Harish-Chandra a défini une représentation unitaire irréductible π_λ de G ,de carré intégrable .On obtient ainsi toutes les représentations de carré intégrable :c'est la série discrète .De plus π_λ

est équivalente à $\pi_{\lambda'}$ si et seulement si λ et λ' sont conjugués par W_K . Tout ceci est démontré dans [6] .

§2 . La première conjecture de Langlands .

Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie complexe ,connexe ,simplement connexe ,d'algèbre de Lie $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ .Pour simplifier ,on suppose que G est le sous-groupe analytique réel de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\underline{g}$ .Soit P un système de racines positives de $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}})$;avec les notations usuelles ,posons :

$$\underline{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \underline{g}^{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \underline{b} = \underline{h}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{n} .$$

Le sous-groupe B ,d'algèbre de Lie $\underline{b}$,est un sous-groupe complexe de $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{C}}/B$ est une variété analytique complexe ,compacte .Comme $B \cap G = H$,on peut identifier G/H à une sous-variété analytique réelle de $G_{\mathbb{C}}/B$ .Comme $\dim_{\mathbb{R}} G/H = \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/B$ cette sous-variété est ouverte .On munit G/H de la structure complexe induite ;on notera que cette structure dépend du choix de P .Soit $\lambda \in \Lambda$;le caractère correspondant e^{λ} de H se prolonge de façon unique en un caractère holomorphe de B donc définit un fibré holomorphe en droites de base $G_{\mathbb{C}}/B$,associé au fibré principal $B \longrightarrow G_{\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}/B$ .Par restric-tion ,on obtient un fibré holomorphe en droites ,de base $D = G/H$;soit $\mathcal{L}_{\lambda}$ ce fibré ;il est homogène (G opère par translations à gauche) .Les sections C^{∞} de $\mathcal{L}_{\lambda}$ s'identifient aux applications $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$,de classe C^{∞} et telles que $f(gh) = e^{-\lambda(h)} f(g)$;elles sont holomorphes si $f * \underline{n} = 0$.

Par analogie avec le cas compact ,on considère les espaces de cohomologie $H^j(D , O_{\lambda})$ où O_{λ} est le faisceau des germes de sections holomorphes de $\mathcal{L}_{\lambda}$. Ce sont des G-modules .Si ρ désigne la demi-somme des racines positives , on peut espérer que ,pour $\lambda + \rho$ régulier ,ces G-modules sont tous nuls sauf un et que ce dernier ,muni d'une structure hilbertienne convenable ,est équivalent à $\pi_{\lambda+\rho}$ .La thèse de Schmid contient quelques résultats dans cette

direction [17] , [18] .En fait Langlands propose de remplacer ces groupes de cohomologie par des groupes de L^2-cohomologie ,groupes qu'on va maintenant définir .

Soit $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$ l'espace des formes différentielles sur D ,de classe C^∞ , à support compact ,à valeurs dans $\mathcal{L}_\lambda$ et de type (O,j) .Le fibré $\mathcal{L}_\lambda$ étant holomorphe ,on dispose de l'opérateur

$$\overline{\partial} : A^j(\mathcal{L}_\lambda) \longrightarrow A^{j+1}(\mathcal{L}_\lambda) .$$

Faisons opérer H dans $C_c^\infty(G)$ (fonctions C^∞ à support compact) par translations à droite et dans $\Lambda^j \underline{n}^*$ par la représentation coadjointe .Soit

$$(C_c^\infty(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda}$$

le sous-espace des éléments qui se transforment suivant le caractère $e^{-\lambda}$ de H. Comme $\underline{n}$ s'identifie à l'espace des vecteurs tangents antiholomorphes à D au point eH ,on a :

$$A^j(\mathcal{L}_\lambda) \approx (C_c^\infty(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda} ,$$

cet isomorphisme étant compatible avec les structures de G-modules .Munissons $\Lambda^j \underline{n}^*$ d'une structure d'espace de Hilbert ,invariante par H et $C_c^\infty(G)$ de la structure préhilbertienne induite par celle de $L^2(G)$ .Par rapport à la structure produit (et induite) sur $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$,l'opérateur $\overline{\partial}$ possède un adjoint formel $\overline{\partial}^*$;soit $\omega = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}$,l'opérateur de Laplace-Beltrami .On peut appliquer ω ,au sens distributions ,à tout élément du complété

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = (L^2(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda}$$

de $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$ .Comme ω est elliptique ,son noyau $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$ est un sous-espace fermé ,donc de Hilbert dont les éléments sont de classe C^∞.Enfin comme $\overline{\partial}$

donc ω commute aux translations à gauche par G ,on obtient ainsi une repré-sentation unitaire de G dans $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$.

Conjecture. (Langlands)

a) Si $\lambda + \rho$ est singulier ,alors ,quel que soit j ,on a $K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0$.

b) Si $\lambda + \rho$ est régulier ,alors il existe un entier $j(\lambda + \rho)$ tel que

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq j(\lambda + \rho) .$$

c) Si $\lambda + \rho$ est régulier ,alors la représentation unitaire de G dans $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$ est irréductible et équivalente à $\pi_{\lambda+\rho}$.

§ 3. Résultats .

La partie a) de la conjecture reste ouverte .Pour b) et c) munissons $\underset{\sim}{h}_R^*$ du produit scalaire usuel et rappelons qu'une racine positive α est dite compacte si $\underset{\sim}{g}^\alpha \subset \underset{\sim}{k}_{\mathbb{C}}$,non compacte dans le cas contraire .Si λ est régulier soit

a_1 le nombre de racines positives compactes α telles que $\langle \lambda, \alpha \rangle < 0$,

a_2 le nombre de racines positives non compactes telles que $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$

et $j(\lambda) = a_1 + a_2$.

Théorème 1 (Griffiths).Il existe une constante $b > 0$ possédant la propriété suivante : si

(1) $\quad |\langle \lambda, \alpha \rangle| > b \quad$ pour toute racine $\alpha > 0$,

alors

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq j(\lambda + \rho) .$$

Ce résultat est déja signalé dans [11] et il est démontré dans [4] .Dans le cas où G/K est hermitien symétrique ,on peut attacher à toute représentation unitaire irréductible de K un fibré holomorphe de base G/K puis procéder

comme au §2 .L'analogue du théorème 1 (λ étant le poids dominant) est démontré dans [12] .

Si la condition 1 est satisfaite ,on dit que λ est assez régulier (ou suffisament non singulier ...) .

Théorème 2 .Si λ est assez régulier ,alors la représentation de G dans $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$ est unitaire ,irréductible et équivalente à $\pi_{\lambda+\rho}$.

Ce théorème (ou plutot son équivalent pour les fibrés sur G/K) est démontré dans [12] pour le cas hermitien symétrique et dans[19] pour le cas général . Si $j(\lambda+\rho) = 0$,on retrouve exactement le cas étudié par Harish-Chandra [5] . Il ne peut se produire que si G/K est hermitien symétrique et la construction du §2 se réduit à celle de [5] .

Revenons un instant aux groupes de cohomologie usuels .Soit ρ_K la demi-somme des racines positives compactes et ,pour $\mu \in \Lambda$,soit $Q(\mu)$ le nombre de manières distinctes dont μ peut s'écrire comme somme de racines positives non compactes .Soit s le nombre de racines positives compactes .

Théorème 3 [18] .Il existe une constante positive b possédant la propriété suivante : si $\langle \lambda, \alpha \rangle < -b$ pour toute racine $\alpha > 0$,alors $H^j(D,\mathcal{O}_\lambda) = 0$ pour $j \neq s$ et on peut munir $H^s(D,\mathcal{O}_\lambda)$ d'une structure d'espace de Fréchet sur lequel G opère continument .Si on restreint cette représentation à K ,alors le K-module irréductible de poids dominant μ intervient avec la multiplicité

$$(2) \qquad (-1)^s \sum_{w \in W_K} \varepsilon(w)\, Q(\lambda + \rho_K - w(\mu + \rho_K))$$

Remarquons que ,sous les hypothèses du théorème 3 ,on a $j(\lambda+\rho) = s$ .D'autre part les multiplicités (2) sont celles qui ont été conjecturées par Blattner . Enfin ,toujours sous les hypothèses du théorème ,Schmid construit une application injective de $K^s(\mathcal{L}_\lambda)$ dans $H^s(D,\mathcal{O}_\lambda)$ ...

§ 4.Bouts de démonstrations .

Pour le théorème 1 ,d'après un résultat d'Andreotti-Vesentini [1] ,il suffit de prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$(\omega f \mid f) \geqslant c\,(f \mid f) \text{ pour } f \in A^j(\mathcal{L}_\lambda) \text{ et } j \neq j(\lambda+\rho) .$$

Or ,en se donnant un peu de peine ,on peut calculer explicitement ω ce qui permet d'évaluer $(\omega f \mid f)$ et d'obtenir l'inégalité ,sous l'hypothèse assez régulier .L'expression de ω tenant quatre lignes ,on ne peut que ren--voyer le lecteur à [4] .

Pour le théorème 2 ,considérons l'espace $L^2(G)\otimes\Lambda\underline{n}^*$.On le munit d'une structure de $\underline{n}$-module en faisant opérer $\underline{n}$ sur le premier facteur par dériva--tions à droite et sur le deuxième par la représentation coadjointe .L'opéra--teur de cobord pour la cohomologie de ce $\underline{n}$-module a pour restriction à

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = (L^2(G)\otimes\Lambda^j\underline{n}^*)_{-\lambda}$$

précisément l'opérateur $\overline{\partial}$ .Bien entendu ces opérateurs sont non bornés ce qui est la source de pas mal d'ennuis .D'autre part ,si on fait opérer G par translations à gauche sur le premier facteur ,alors l'opérateur de cobord , donc aussi ω commute à G .En utilisant l'existence de la formule de Plancherel (mais non sa forme exacte) on peut donc espérer décomposer les groupes de L^2-cohomologie en somme continue de "groupes de cohomologie formels " associés à chaque représentation unitaire irréductible de G .C'est ce qu'on va essayer d'expliquer .

Première étape.Soit π une représentation unitaire irréductible de G ,d'espace E et E_o le sous-espace des vecteurs K-finis .Soit δ l'opérateur de cobord pour la cohomologie du $\underline{n}$-module E_o et δ^* son adjoint formel .Soit Ω_K l'opérateur de Casimir de K et $C = (1+\pi(\Omega_K))^{-1/2}\otimes 1$ .On constate aisément que C est un opérateur borné ,compact et auto-adjoint .D'autre part $\delta+\delta^*$

possède un unique prolongement fermé et le domaine de ce prolongement coincide avec celui de C^{-1} .Ce point n'est pas trivial .Il en résulte que $\partial + \partial^*$ est essentiellement auto-adjoint ,son unique prolongement fermé étant aussi son unique prolongement auto-adjoint .Enfin un calcul simple montre que $C(\partial + \partial^*)$ et $(\partial + \partial^*)C$ sont bornés et que $C(\partial + \partial^*)^2 C$ est somme d'un opérateur compact et d'un opérateur inversible ,donc est à indice .On en déduit que le noyau $K(\pi)$ de $\partial + \partial^*$ est de dimension finie .Soit alors

$$K^j(\pi) = K(\pi) \cap (E \otimes \wedge^j \underline{n}^*) .$$

$K(\pi)$ est la somme directe des $K^j(\pi)$ .Comme Ad(H) commute à ∂ ,chaque $K^j(\pi)$ est un H-module .

Soit q la dimension de $\underline{n}$ et posons :

$$\Delta_+ = \prod (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \qquad \text{pour } \alpha \text{ positive non compacte ,}$$

$$\Delta_K = \prod (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \qquad \text{pour } \alpha \text{ positive compacte .}$$

D'après Harish-Chandra ,pour $f \in C^\infty(K)$,l'opérateur

$$\int_K f(k) \pi(k)\, dk$$

est à trace et cette trace définit une distribution τ_π sur K .

Proposition 1.Les espaces $H^j(\pi)$ sont des H-modules de dimension finie et si g désigne la somme alternée de leurs caractères ,alors $(-1)^q e^{-\rho} \Delta_K^{-1} g$ se prolonge en une fonction analytique sur K qui est centrale et qui coincide avec la distribution $\Delta_+ \tau_\pi$.

Remarque.G' dénotant les points réguliers de G ,la restriction de γ_π à l'ou-vert $K \cap G'$ de K coïncide avec la restriction du caractère usuel de π (Harish-Chandra) .En particulier si π appartient à la série discrète ,on peut ,grace à la formule d'Harish-Chandra ,qui donne la valeur du caractère

sur les points elliptiques ,calculer explicitement g .Enfin dans le cas général la distribution γ_π sur K n'appartient pas à $L^1(K)$ .La proposition précédente montre que $\Delta_+ \gamma_\pi$ est une fonction analytique sur K .

Pour démontrer la proposition ,on remarque d'abord que $K(\pi)$ est aussi le noyau de $C(\delta + \delta^*)$ qui est borné .Le coefficient de e^λ dans g n'est autre que l'indice de

$$C(\delta + \delta^*) : (E \otimes \wedge^+ \underline{n}^*)_\lambda \longrightarrow (E \otimes \wedge^- \underline{n}^*)_\lambda .$$

A l'aide d'une homotopie ,on peut remplacer δ par δ_o opérateur de cobord associé à la sous-algèbre $\underline{n} \cap \underline{k}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{n}$ .Ceci permet de décomposer E suivant les composantes isotypiques de $\pi|_K$ et la démonstration s'achève aisément .

Deuxième étape.Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G .Pour chaque classe ,choisissons un représentant π_a ,d'espace E_a .Soit π_a^* la représentation contragrédiente dans l'espace E_a^* .La formule de Plancherel peut s'écrire

$$L^2(G) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes E_a^* \, da$$

où da est la mesure de Plancherel .On en déduit que

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes (E_a^* \otimes \wedge^j \underline{n}^*)_{-\lambda} \, da .$$

Par définition $K^j(\mathcal{L}_\lambda) = \mathrm{Ker}(\delta + \delta^*)^2$;en fait c'est aussi le noyau de $\delta + \delta^*$ et on établit sans trop de mal la proposition suivante :

Proposition 2.La famille de sous-espaces $E_a \otimes (K^j(\pi_a^*))_{-\lambda}$ dépend mesurablement de a et

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes (K^j(\pi_a^*))_{-\lambda} \, da .$$

Corollaire. Si $j \neq j(\lambda + \rho)$ et si λ est assez régulier, alors $K^j(\pi^*_a)_{-\lambda} = 0$ pour presque tout a .

Remarquons aussi que la multiplicité de π dans $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$ est égale à la dimension de $K^j(\pi^*)_{-\lambda}$.

Si $\pi = \pi_{\mu+\rho}$ appartient à la série discrète alors $\pi^* = \pi_{-\mu-\rho}$ est de mesure de Plancherel strictement positive .Pour λ assez régulier ,on a donc $K^j(\pi^*)_{-\lambda} = 0$ si $j \neq j(\lambda + \rho)$ et par suite le coefficient de $e^{-\lambda}$ dans la fonction g de la proposition 1 (pour $\pi_{-\mu-\rho}$) est au signe près la dimension de $K^{j(\lambda+\rho)}(\pi_{-\mu-\rho})$ c'est-a-dire la multiplicité de $\pi_{\mu+\rho}$ dans $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$. D'après la formule des caractères d'Harish-chandra ,on a

$$\Delta_K \Delta_+ e^\rho \gamma_{\pi^*_{\mu+\rho}} = \sum_{w \in W_K} \varepsilon(w)\, e^{-w(\mu+\rho)} .$$

Par suite la multiplicité cherchée est 1 ou 0 suivant que $\lambda+\rho$ et $\mu+\rho$ sont ou ne sont pas conjugués par W_K .Si on se rappelle que la série discrète est paramétrée par Λ' modulo W_K ,on voit que la démonstration du théorème sera terminée si on démontre que le spectre continu est vide .Ce dernier point résulte des deux remarques suivantes :

-si une représentation unitaire irréductible π de G est elle que $K^j(\pi)_{-\lambda} \neq 0$ pour un seul j ,alors $\pi(\Omega) = \|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2$ où Ω est le Casimir de G ;c'est une conséquence de la proposition 1 .

-l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G telles que $\pi(\Omega)$ soit la multiplication par une constante donnée est de mesure de Plancherel nulle (résultat provisoirement inédit d'Harish-Chandra) .

§ 5. Une deuxième conjecture de Langlands .

Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret à quotient compact .Soient toujours $D = G/H$ et $\mathcal{L}_\lambda$ un fibré holomorphe de base D . Soit $\mathcal{F}_\lambda$ le faisceau sur

$\Gamma\backslash G/H = \Gamma\backslash D$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à tout ouvert U de $\Gamma\backslash D$ l'espace vectoriel des sections holomorphes Γ-invariantes de $\mathcal{L}_\lambda$ au-dessus de l'image réciproque de U dans D. D'autre part, rappelons que la représentation évidente de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ se décompose discrètement avec multiplicités finies. Soit $n(\pi)$ la multiplicité d'une représentation unitaire irréductible .

Théorème 4. (Griffiths-Schmid [4], [19]). Il existe une constante $b > 0$ ayant la propriété suivante : si $|\langle \lambda, \alpha \rangle| > b$ pour toute racine $\alpha > 0$, alors

$$H^j(\Gamma\backslash D, \mathcal{F}_\lambda) = 0 \text{ pour } j \neq j(\lambda+\rho)$$

et

$$\dim. H^{j(\lambda+\rho)}(\Gamma\backslash D, \mathcal{F}_\lambda) = n(\pi_{\lambda+\rho}) .$$

Ce résultat avait été conjecturé par Langlands, avec seulement l'hypothèse $\lambda+\rho$ régulier .

La démonstration est très voisine de celle des théorèmes 1 et 2. Tout d'abord, d'après un théorème de Borel [3], il existe un sous-groupe Γ' de Γ normal et d'indice fini qui opère dans D sans points fixes. Utilisant ce fait et des arguments standarts (la base $\Gamma\backslash D$ est maintenant compacte), on montre que $H^j(\Gamma\backslash D, \mathcal{F}_\lambda)$ est isomorphe au noyau de

$$\bar{\partial} + \bar{\partial}^* : (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \wedge^j \underline{n}^*)_{-\lambda} \longrightarrow (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \wedge \underline{n}^*)_{-\lambda} .$$

En utilisant une forme explicite de $\omega = (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)^2$, on peut prouver que, pour λ assez régulier, la condition $\omega f = 0$ implique $f = 0$ pour $j \neq j(\lambda+\rho)$. Formellement c'est le même calcul que pour le théorème 1 .

Pour la deuxième partie du théorème (Schmid) on procède comme pour le théorème 2. On montre tout d'abord que

$$H^j(\Gamma\backslash D, \mathcal{F}_\lambda) \simeq \bigoplus_{a \in \hat{G}} \bigoplus_{1 \leq k \leq n(a)} (K^j(\pi_a)_{-\lambda}$$

ce qui donne :

$$\dim.H^j(\Gamma \backslash D, \mathcal{F}_\lambda) = \sum n(a) \dim.(K^j(\pi_a))_{-\lambda} .$$

Si λ est assez régulier et si $n(\pi) \neq 0$,on a donc

$$K^j(\pi)_{-\lambda} = 0 \quad \text{pour } j \neq j(\lambda + \rho) .$$

Dans ces conditions supposons d'abord que $\pi = \pi_{\mu+\rho}$ appartienne à la série discrète .On avu que la dimension de $K^{j(\lambda+\rho)}(\pi_{\mu+\rho})_{-\lambda}$ était 1 ou 0 suivant que que $-(\mu+\rho)$ et $\lambda+\rho$ étaient ou non conjugués par W_K .La contribution de la série discrète à la dimension de $H^j(\Gamma \backslash D, \mathcal{F}_\lambda)$ est donc égale à $n(\pi_{-\lambda-\rho})$ mais comme $\pi_{-\lambda-\rho} = \pi^*_{\lambda+\rho}$,on a $n(\pi_{-\lambda-\rho}) = n(\pi_{\lambda+\rho})$ .Il reste à vérifier que si π n'appartient pas à la série discrète alors

$$n(\pi) \dim.(K^{j(\lambda+\rho)}(\pi))_{-\lambda} = 0 .$$

Supposons $n(\pi) \neq 0$;on a $K^j(\pi)_{-\lambda} = 0$ pour $j \neq j(\lambda+\rho)$ .Soit

$$\chi = \Delta_K^{-1} \sum_{w \in W_K} \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}$$

c'est le caractère d'un K-module irréductible .Les hypothèses faites sur et la proposition 1 montrent alors aisément que $\tau_\pi(\Delta_+ \chi) \neq 0$ (regarder le coefficient de $e^{-\lambda-\rho}$ dans $\Delta_+ \Delta_K \tau_\pi$ et utiliser les propriétés de symétrie par rapport à W_K) .Comme on peut exprimer $\Delta_+ \chi$ comme combinaison linéaire de caractères de K-modules irréductibles ,les relations d'orthogonalité entre les caractères de K permettent d'obtenir des informations sur la décomposition de $\pi|_K$ .Par un raisonnement non trivial ,on prouve que π possède un poids dominant (relativement aux K-modules)et Schmid promet de démontrer [20] que ceci entraine l'appartenance de π à la série discrète . Chemin faisant ,on est obligé de supposer λ très régulier c'est-à-dire de remplacer la constante b qui donne la nullité des groupes de cohomologie par une constante plus grande .

La dernière partie du mémoire de Schmid contient un calcul explicite des multiplicités $n(\pi_{\lambda+\rho})$,pour λ assez régulier .La méthode utilisée généralise celle employée par Hirzebruch [7] et s'appuie sur le théorème de Lefschetz holomorphe d'Attiyah-Singer [2] .Une approche complètement diffé-rente (Langlands [10] [11]) utilise un cas particulier de la formule des traces de Selberg .On doit alors supposer $\pi_{\lambda+\rho}$ intégrable .Bien que ce soit très probable on ignore si λ assez régulier implique $\pi_{\lambda+\rho}$ intégrable .

Pour terminer signalons que ,dans le cas hermitien symétrique ,les démonstrations de [12] sont sensiblement différentes de celles de Schmid . Enfin le problème de la construction de la série discrète peut être abordé d'un point de vue voisin mais distinct :on part de certaines représentations de dimension finie de K et on considère le fibré C^∞ correspondant ,de base G/K ;dans l'espace des sections de carré intégrable on introduit un opérateur différentiel elliptique du premier ordre ,qui commute à G .Le noyau de cet opérateur est un G-module unitaire qui ,au moins dans certains cas ,appartient à la série discrète .Un certain nombre d'exemples sont traités dans [17].De plus on vient de recevoir ,trop tard pour pouvoir en tenir sérieusement compte ,deux "preprints " de Parthasarathy [15] [16] où ce point de vue est systématiquement utilisé .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.ANDREOTTI et E.VESENTINI ,Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds , Inst. Hautes Etudes Sci. Publ.Math. 25 (1965) ,313-362 .

[2] M.F. ATIYAH et I.M. SINGER - The index of elliptic operators III, Ann.of Math. 87 ,(1968) ,546-604 .

[3] A.BOREL ,Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces ,Topology 2 (1963) ,111-122 .

[4] P.GRIFFITHS et W.SCHMID ,Locally homogeneous complex manifolds ,Acta Math.

[5] HARISH-CHANDRA ,Representations of semi-simple Lie groups IV ,V ,VI Amer. J. Math. 77 (1955) ,743-777 , 78 (1956) ,1-41 et 564-628 .

[6] HARISH-CHANDRA ,Discrete series II ,Acta .Math. 116 (1966) ,1-111 .

[7] HIRZEBRUCH F. ,Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch ,in Symp. Intern. Top. Alg. 1956 ,129-144 ,Universidad de Mexico 1958 .

[8] R.HOTTA. , on a realization of the discrete series for semi-simple Lie groups ,à paraitre .

[9] B.KOSTANT ,Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Ann. of Math. ,74 (1961) ,329-387 .

[10] R.P.LANGLANDS ,The dimension of spaces of automorphic forms ,Amer.J.Math. 85 (1963) ,99-125 .

[11] R.P.LANGLANDS ,Dimension of spaces of automorphic forms ,in algebraic groups and discontinuous subgroups ,Proc. of Symposia in Pure Math. vol IX ,Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1966) .

[12] M.S.NARASIMHAN et K.OKAMOTO ,An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of the non compact type ,Ann. of Math.

[13] K.OKAMOTO ,on induced representations , Osaka J.Math. 4 (1967) ,85-94

[14] K.OKAMOTO et H.OZEKI ,on square integrable -cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces ,Osaka J.Math. (1967) 95-110 .

[15] R.PARTHASARATHY ,Dirac operators and the discrete series ,à paraitre

[16] R.PARTHASARATHY ,A note on the vanishing of certain L^2-cohomologies ,

[17] W.SCHMID ,Homogeneous complex manifolds and representations of semi-simple groups , non publié (thèse ,Berkeley 1967).

[18] W.SCHMID ,Homogeneous complex manifolds and representations of semi-simple Lie groups ,Proc. Nat.Acad. Sci. U.S.A. 59 (1968) ,56-59 .

[19] W.SCHMID ,On a conjecture of Langlands ,Annals of Math. 1971 .

[20] W.SCHMID ,Some properties of square integrable representations of semi-simple Lie groups ,à paraitre .