SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HYMAN BASS

K_2 des corps globaux

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 394, p. 233-255

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__233_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 394 Juin 1971

K_2 DES CORPS GLOBAUX

[d'après J. TATE, H. GARLAND, ...]

par Hyman BASS

1. Introduction

Soit F un corps (toujours supposé commutatif). On note $F^\cdot$ son groupe multiplicatif. Par symbole sur F à valeurs dans un groupe abélien C on entend une fonction $(\ ,\ ): F^\cdot \times F^\cdot \to C$ telle que

$$(aa',b) = (a,b)(a',b) \text{ et } (a,bb') = (a,b)(a,b')$$

pour tout $a,a',b,b' \in F^\cdot$ et telle que

$$(a,1-a) = 1$$

pour tout $a \neq 0,1$. De l'égalité $(a^{-1},1-a^{-1}) = 1$ $(a \neq 0,1)$ on déduit que $(a,-a) = 1$ et $(a,a) = (a,-1)$ pour tout $a \in F^\cdot$. De l'égalité $(ab,-ab) = 1$ on déduit aussi $(a,b) = (b,a)^{-1}$ pour tout $a,b \in F^\cdot$.

Exemples.

(1) Le symbole modéré

$$(\ ,\ )_v : F^\cdot \times F^\cdot \longrightarrow k_v^\cdot$$

associé à une valuation discrète v de F, de corps résiduel k_v, est défini par

$(a,b)_v$ = le reste dans k_v de $(-1)^{v(a)v(b)}a^{v(b)}/b^{v(a)}$.

(cf,[13], Ch. III, § 1, n° 4, ou [10]). On note

$$\lambda_{mod,v}: K_2F \longrightarrow k_v^{\cdot}$$

l'homomorphisme induit.

(2) Le symbole réel $(\ ,\ )_\infty: \underline{\underline{R}}^{\cdot} \times \underline{\underline{R}}^{\cdot} \to \mu_2 = \{\pm 1\}$ défini par $(a,b)_\infty = -1 \Leftrightarrow a < 0$ et $b < 0$.

(3) (Tate) Le symbole différentiel

$(\ ,\ )_{diff}: F^{\cdot} \times F^{\cdot} \longrightarrow \Omega^2_{F/\underline{\underline{Z}}}$ défini par

$$(a,b)_{diff} = \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b} \quad .$$

(4) Le groupe K_2F est le récepteur d'un symbole universel $F^{\cdot} \times F^{\cdot} \longrightarrow K_2F$, noté $(a,b) \longrightarrow \{a,b\}_F$, de sorte que $\mathrm{Hom}(K_2F,C)$ s'identifie au groupe des symboles à valeurs dans C.

Le foncteur K_2 était introduit par Milnor [10] (n° 5). Sa définition (pour tout anneau) est inspirée du travail de Steinberg [17] sur les extensions centrales de groupes algébriques semi-simples. De ce point de vue la description ci-haut de K_2F est un théorème difficile de Matsumoto [9] (n° 5). C'est ainsi que C. Moore [11] a inauguré l'étude arithmétique de K_2F comme outil pour calculer certains groupes de cohomologie de groupes linéaires.

Cet exposé est consacré aux résultats amenant à un calcul de K_2F lorsque F est un corps global, c'est-à-dire un

corps de nombres (extension finie de $\underline{\underline{Q}}$) ou un corps de fonctions (en une variable sur un corps fini). Les résultats de Moore (n^o 3) précisent la contribution à K_2F fait par les symboles locaux de la théorie des corps de classes. D'après un théorème récent de Garland [7] il ne reste en plus qu'un groupe fini (n^o 7).

La description de K_2F en termes d'invariants classiques est maintenant complète pour les corps de fonctions, grâce à des beaux résultats récents de Tate ([19] et [20], cf n^o 8). Pour les corps de nombres ces résultats de Tate ramènent le calcul de K_2F à une question de cohomologie galoisienne (n^o 10) ayant des liens étroits avec la théorie d'Iwasawa [8] des corps cyclotomiques. Les démonstrations de Tate étaient inspirées directement par des conjectures (non publiées) de Lichtenbaum. Signalons aussi que le rapport de K_2F avec la théorie d'Iwasawa a été précisé récemment par Coates [5].

Notation. Soient X un groupe abélien et m un entier > 0. On note $X \xrightarrow{m} X$ l'homothétie de rapport m et X_m son noyau. Si X est fini on note $|X| = \text{Card } X$.

2. Symboles locaux continus

Soient F un corps global, v une place non complexe de F, F_v le complété de F en v, μ_v le groupe des racines de l'unité dans

F_v, et $m_v = |\mu_v|$. Soit

$$(\frac{\ ,\ }{v}) : F_v^* \times F_v^* \longrightarrow \mu_v$$

le m_v-symbole de restes normiques ([12], Ch. XIV, § 2). C'est un symbole continu. Réciproquement:

Théorème 1 (C. Moore [11]). Tout symbole continu sur F_v à valeurs dans un groupe abélien localement compact C s'obtient par composition de $(\frac{\ ,\ }{v})$ avec un homomorphisme $\mu_v \to C$.

Notons $\lambda_v : K_2 F_v \to \mu_v$ l'homomorphisme associé à $(\frac{\ ,\ }{v})$. Tate a montré que $\mathrm{Ker}(\lambda_v)$ est un groupe divisible.

Supposons que v soit une place finie, de corps résiduel k_v. Le symbole modéré $(\ ,\ )_v$ (ex.(1)) est lié à $(\frac{\ ,\ }{v})$ par la formule

$$\lambda_{\mathrm{mod},v}(x) = \text{le reste dans } k_v \text{ de } \lambda_v(x)^{m_v/(q_v-1)}$$

ou $q_v = |k_v|$. Ainsi λ_v s'identifie à $\lambda_{\mathrm{mod},v}$ si $m_v = q_v - 1$. Cette égalité vaut pour toute place v si F est un corps de fonctions, et pour toute sauf un nombre fini de v si F est un corps de nombres.

3. L'homomorphisme λ et son conoyau

Soient F un corps global, μ_F le groupe des racines de l'unité de F, et $m_F = |\mu_F|$. Soit $\nu : \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v \longrightarrow \mu_F$ l'homomorphisme induit par les homomorphismes $\mu_v \xrightarrow{m_v/m_F} \mu_F$.

Si $a,b \in F^*$ il résulte des remarques dans le n°2 que $(\frac{a,b}{v}) = 1$ en dehors d'un nombre fini de places v, d'où un homomorphisme

$$\lambda : K_2F \longrightarrow \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v .$$

La loi de réciprocité "explicite" s'exprime par la formule $\nu \circ \lambda = 0$. ([1], Ch.12, Th.13).

Théorème2 (C. Moore [11]) - La suite

$$K_2F \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v \xrightarrow{\nu} \mu_F \longrightarrow 0$$

est exacte.

Ce théorème précise tous les renseignements sur K_2F apportés par les symboles "classiques." Il reste à déterminer la partie "exotique," $\mathrm{Ker}(\lambda)$, de K_2F.

4. Première approximation à $\mathrm{Ker}(\lambda)$; l'homomorphisme λ_R.

Soient R un anneau de Dedekind, R^* son groupe multiplicatif, F son corps de fractions, et $\{R^*, R^*\}$ le sous-groupe de K_2F engendré par les $\{a,b\}_F$ où $a,b \in R^*$. Les symboles modérés aux places v de F associées aux idéaux maximaux de R définissent un homomorphisme

$$\lambda_R : K_2F \longrightarrow \bigoplus_v k_v^*$$

qui s'annulle sur $\{R^*, R^*\}$.

Soient F un corps global, S_∞ l'ensemble des places infinies de F, et S un ensemble fini non vide de places contenant S_∞. Si R est l'anneau des S-entiers de F il résulte du Th.2 que λ_R est surjectif et que $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Ker}(\lambda_R)$. Par ailleurs $\{R^*, R^*\}$ est un groupe de type fini

Choisissons une énumération $v_1, v_2, \ldots$ des places finie de F telle que $|k_{v_n}| \leq |k_{v_{n+1}}|$ pour tout n.

Théorème3 (cf.[18] ou [19])- Si n est suffisamment grand et si R est l'anneau des S-entiers de F où $S = S_\infty \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$, la suite

$$0 \to \{R^*, R^*\} \longrightarrow K_2 F \xrightarrow{\lambda_R} \bigoplus_{v \notin S} k_v^* \to 0$$

est exacte. En particulier $\mathrm{Ker}(\lambda_R) = \{R^*, R^*\}$, un groupe de type fini.

La démonstration du Th.3 (pas encore publiée) est élémentaire mais assez longue. Pour le cas où $R = \underset{=}{Z}$ ou $\underset{=}{F}_q[t]$ la méthode, découverte par Tate, montre que $\mathrm{Ker}(\lambda) = 0$ (cf.[10]). L'argument ressemble beaucoup à la première démonstration de Gauss de la loi quadratique de réciprocité.

5. Lien de K_2 avec les extensions centrales de groupes linéaires.

Soit G un groupe égal à son groupe dérivé. Il y a une extension centrale universelle (découverte par Schur)

$$0 \to H_2(G,\underline{\underline{Z}}) \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1$$

dont la classe dans $H^2(G,H_2(G,\underline{\underline{Z}})) \tilde{=} \mathrm{Hom}(H_2(G,\underline{\underline{Z}}),H_2(G,\underline{\underline{Z}}))$ correspond à l'identité.

Soient F un corps, n un entier ≥ 3, et $G = SL_n(F)$. Si $a,b \in F^*$ soient $\tilde{h}_{12}(a),\tilde{h}_{13}(b) \in \tilde{G}$ des relèvements des éléments $h_{12}(a) = \mathrm{diag}(a,a^{-1},1,1,\ldots)$ et $h_{13}(b) = \mathrm{diag}(b,1,b^{-1},1,\ldots)$ de G. Le commutateur $\langle a,b\rangle = (\tilde{h}_{12}(a),\tilde{h}_{13}(b))$ est indépendant des relèvements et définit une fonction bilinéaire antisymétrique

$$\langle\ ,\ \rangle : F^* \times F^* \longrightarrow H_2(SL_n(F),\underline{\underline{Z}}).$$

<u>Théorème 4</u> (Matsumoto [9] et Steinberg [17]) - <u>La fonction $\langle\ ,\ \rangle$ est un symbole et l'homomorphisme</u>

$$s_n : K_2F \longrightarrow H_2(SL_n(F),\underline{\underline{Z}})$$

<u>qu'elle définit est un isomorphisme</u>.

Steinberg a montré que $\langle\ ,\ \rangle$ est un symbole et que s_n est surjectif. Matsumoto a démontré l'injectivité de s_n. Ils ont démontrés en même temps des résultats analogues pour tous les groupes de Chevalley simplement connexes.

Les s_n sont compatibles avec les plonqements $\begin{pmatrix} SL_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ de SL_n dans SL_{n+m}, d'où un isomorphisme $s : K_2F \longrightarrow H_2(SL(F),\underline{\underline{Z}})$ où $SL = \bigcup_n SL_n$.

De cette façon on voit que la définition de K_2F donnée ici s'accorde avec celle de Milnor [10]. Milnor pose, pour tout anneau A, $K_2A = H_2(E(A), \underline{\underline{Z}})$ où $E(A) = \bigcup_n E_n(A)$ est le groupe dérivé de $GL(A) = \bigcup_n GL_n(A)$.

M. Stein ([15] et [16]) a récemment généralisé le Th. 4 aux anneaux semi-locaux. K. Dennis [6] a démontré aussi un théorème de stabilité pour K_2 ($H_2(E_n(A), \underline{\underline{Z}}) \to K_2A$ est surjectif pour $n >> 0$) dans un cadre très large.

6. Le transfert

Un homomorphisme d'anneaux $j:A \to B$ induit un homomorphisme $GL(A) \to GL(B)$ et donc aussi $j:K_2A \to K_2B$. Supposons que B soit un A-module libre de rang $d = [B:A]$. Le choix d'une base du A-module B définit des A-isomorphismes $B^n \tilde{=} A^{dn}$ d'où des homomorphismes $GL_n(B) \to GL_{dn}(A)$. La limite inductive $GL(B) \to GL(A)$ induit un homomorphisme

$$Tr_{B/A}: K_2B \to K_2A$$

(le transfert) qui ne dépend pas du choix de base de B (cf.[10]).

Pour une extension finie de corps E/F l'homomorphisme $Tr_{E/F}$ ne se voit pas facilement sur les symboles. Son existence de notre point de vue s'appuie donc sur le Th. 4 de Matsumoto-Steinberg. Son utilité provient des propriétés suivantes:

a) Tr fait de K_2 un foncteur contravariant pour les extensions libres de rang fini.

(b) Si $R \to R'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs et si $j:A \to B$ est un homomorphisme de R-algèbres le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_2B & \longrightarrow & K_2(R'\otimes_R B) \\ {\scriptstyle Tr}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tr} \\ K_2A & \longrightarrow & K_2(R'\otimes_R A) \end{array}$$

est commutatif.

(c) Le composé $K_2A \xrightarrow{j} K_2B \xrightarrow{Tr} K_2A$ est l'homothétie de rapport $d = [B:A]$. En particulier $\mathrm{Ker}(j) \subset (K_2A)_d$. Si m est un entier premier à d les homomorphismes $(K_2A)_m \to (K_2B)_m$ et $K_2A/mK_2A \to K_2B/mK_2B$ induits par j sont injectifs, et les homomorphismes au sens inverse induits par Tr sont surjectifs.

(d) Soit $j:F \to E$ une extension finie de corps. Si $a \in F^*$ et $\beta \in E^*$ on a

$$Tr_{E/F}\{a,\beta\}_E = \{a, N_{E/F}\beta\}_F.$$

Si $\alpha \in E^*$ est tel que $\alpha^m = a$ il en résulte que $\{a, N_{E/F}\beta\}_F = (Tr_{E/F}\{\alpha,\beta\}_E)^m$.

(e) Si l'extension E/F est galoisienne de groupe G on a

$$j(Tr_{E/F}(x)) = \sum_{s\in G} s(x).$$

Vu (c) il en résulte que j induit des isomorphismes

$$(K_2F)_m \xrightarrow{\sim} (K_2E)_m^G \text{ et } K_2F/mK_2F \xrightarrow{\sim} (K_2E/mK_2E)^G$$

pour tout entier m premier à $d = [E:F]$.

Voici une application typique du transfert.

Lemme 1 (Tate) - Soit F un corps de caractéristique $p > 0$ tel que $[F:F^p] = p^e$ avec $e \leq 1$. Alors K_2F est divisible par p (et même uniquement si $e = 0$).

Soient $a,b \in F^\cdot$ et posons $\alpha = a^{1/p}$. L'hypothèse fournit un $\beta \in E = F(\alpha)$ tel que $N_{E/F}(\beta) = b$. D'après (d) on a $\{a,b\}_F = (\mathrm{Tr}_{E/F}\{\alpha,\beta\}_E)^p$, d'où le lemme.

Théorème 5 - Soit F un corps global de caractéristique $p > 0$. Alors $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est un groupe fini d'ordre premier à p.

Lemme 1 entraîne que K_2F est divisible par p. On a une suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}(\lambda) \to K_2F \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_v \mu_v$ où les $|\mu_v|$ sont premiers à p. Donc $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est aussi divisible par p. Mais (Th. 3) $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est un groupe de type fini, d'où le théorème.

7. Finitude de $\mathrm{Ker}(\lambda)$ (d'après Garland [7])

Soient R un anneau de Dedekind, F son corps de fractions, $\lambda_R : K_2F \to \bigoplus_v k_v^\cdot$ l'homomorphisme du n° 4, n un entier ≥ 3, et $K_2F \to H_2(SL_n(F),\underline{\underline{Z}})$ l'isomorphisme du Th. 4. L'inclusion $SL_n(R) \to SL_n(F)$ fournit ainsi un homomorphisme $H_2(SL_n(R),\underline{\underline{Z}}) \to K_2F$ qui figure ci-dessous.

Théorème 6 (cf. [2]) - Supposons que l'ensemble d'idéaux maximaux de R soit dénombrable. Il existe un homomorphisme g tel que la suite

$$H_2(SL_n(R),\underline{\underline{Z}}) \to K_2F \xrightarrow{\lambda_R} \bigoplus_v k_v^\cdot \xrightarrow{g} H_1(SL_n(R),\underline{\underline{Z}}) \to 0$$

soit exacte.

Supposons maintenant que R soit l'anneau d'entiers algébriques dans un corps de nombres F. On sait que le groupe $SL_n(R)$ est de présentation finie, et donc le groupe $H_2(SL_n(R), \underline{\underline{Z}})$ est de type fini. On trouve ainsi une autre démonstration que $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est de type fini (cor. du Th.3). La finitude de $\mathrm{Ker}(\lambda)$ résulte, vu l'isomorphisme

$$H^2(SL_n(R), \underline{\underline{R}}) = \mathrm{Hom}(H_2(SL_n(R), \underline{\underline{Z}}), \underline{\underline{R}})$$

du théorème suivant:

Théorème 7 (Garland, [7]) - Pour tout $n \geq 7$ on a $H^2(SL_n(R), \underline{\underline{R}}) = 0$.

Corollaire - $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est fini.

Remarques.

(1) Le Th. 7 est un cas particulier de résultats de Garland sur $H^2(\Gamma, \underline{\underline{R}})$ pour certains groupes arithmétiques Γ. Il étudie la cohomologie de Γ par son action sur un espace symétrique X et à l'aide du théorème de deRham pour $\Gamma\backslash X$ (lorsque Γ est sans torsion). L'espace $\Gamma\backslash X$ n'est pas compact , et le point essentiel est un résultat sur le comportement à l'infini de certaines formes harmoniques sur $\Gamma\backslash X$.

(2) À l'aide de la compactification de $\Gamma\backslash X$ construite par Borel et Serre [4] Borel a maintenant calculé tout l'anneau de cohomologie

"stable", "$H^*(\Gamma_\infty, \underline{\underline{R}})$", pour les groupes arithmetiques dans une famille classique. (Cf. l'exposé de Serre dans le présent Séminaire , n° 4.)

(3) La finitude de $Ker(\lambda^F)$, lorsque F est une extension abélienne totalement réelle de $\underline{\underline{Q}}$, était démontrée par Brumer par voie arithmétique, avant la démonstration de Garland (lettre à Tate datée Feb. 2, 1970). Brumer utilise des résultats de Iwasawa et de Kubota-Leopoldt.

8. La structure de K_2F et de $Ker(\lambda)$ sur un corps de fonctions (d'après Tate [19]).

Soit F un corps de fonctions de corps de constants $k_o = \underline{\underline{F}}_q$. Soient k la clôture algébrique de k_o, $\Gamma = Gal(k/k_o)$, et $F_\infty = Fk$. Considérons les suites exactes

$$(1) \qquad 0 \to k^* \to F_\infty^* \xrightarrow{\text{div}} D \to C \to 0$$

et

$$(2) \qquad 0 \to J(k) \to C \xrightarrow{\deg} \underline{\underline{Z}} \to 0$$

où D est le groupe de diviseurs, C est le groupe des classes de diviseurs, et J est la jacobienne de F_∞. Les groupes k^* et $J(k)$ sont de torsion et divisibles. Le produit tensoriel d'un groupe divisible avec un groupe de torsion est nul. Donc le produit tensoriel de k^* avec (1) fournit une suite exacte

$$(3) \qquad 0 \to Tor(k^*, C) \longrightarrow k^* \otimes F_\infty^* \longrightarrow k^* \otimes D \to k^* \to 0$$

D'autre part on a la suite exacte

$$(4) \qquad 0 \to \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty}) \longrightarrow K_2F_\infty \xrightarrow{\lambda^{F_\infty}} k^\cdot \otimes D \longrightarrow k^\cdot \to 0$$

(cf. n°3) où l'on identifie le λ du n°3 avec λ_{mod}, ce qui est licite pour un corps de fonctions. Introduisons

$$e : k^\cdot \otimes F_\infty^\cdot \longrightarrow K_2F_\infty \ , \ e(w \otimes a) = \{w,a\}_{F_\infty}$$

qui figure dans le diagramme commutatif

$$(5) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Tor}(k^\cdot, C) & \longrightarrow & k^\cdot \otimes F_\infty^\cdot & \longrightarrow & k^\cdot \otimes D & \longrightarrow & k^\cdot \to 0 \\ & & \downarrow e_o & & \downarrow e & & \| & & \| \\ 0 & \to & \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty}) & \longrightarrow & K_2F_\infty & \xrightarrow{\lambda^{F_\infty}} & k^\cdot \otimes D & \longrightarrow & k^\cdot \to 0 \end{array}$$

Par ailleurs l'inclusion $F \subset F_\infty$ induit un diagramme commutatif

$$(6) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty})^\Gamma & \longrightarrow & (K_2F_\infty)^\Gamma & \longrightarrow & (k^\cdot \otimes D)^\Gamma & \longrightarrow & k^{\cdot\Gamma} \to 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \to & \mathrm{Ker}(\lambda^F) & \longrightarrow & K_2F & \longrightarrow & \bigoplus_v k_v^\cdot & \longrightarrow & k_o^\cdot \to 0 \end{array}$$

Théorème 8 (Tate [19]) - Toute flèche verticale dans les diagrammes (5) et (6) est un isomorphisme.

On en déduit des isomorphismes $\mathrm{Ker}(\lambda^F) \tilde{=} \mathrm{Tor}(k^\cdot, C)^\Gamma \tilde{=} \mathrm{Tor}(k^\cdot, J(k))^\Gamma$ et donc un isomorphisme non canonique de $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$ avec le noyau de $J(k) \xrightarrow{1-q\gamma} J(k)$, où $\gamma \in \Gamma$ désigne l'automorphisme de Frobenius. Soient $r_1, \ldots, r_{2g}$ les valeurs propres de γ sur (le module de Tate de) $J(k)$. On conclut que

$| \ker(\lambda^F) | = \prod_{i=1}^{2g} (1 - qr_i) = (q-1)q^2-1)\ \zeta_F(-1)$, où ζ_F est la fonction zêtà de F.

Corollaire - On a

$$(7) \qquad \frac{| \mathrm{Ker}(\lambda^F) |}{|\mathrm{Coker}(\lambda^F) |} = (q^2-1)\ \zeta_F(-1).$$

Une fois interprété le facteur q^2-1 la formule (7) garde un sens lorsque F est un corps de nombres. Mais alors ζ_F a un zéro d'ordre r_2 en s = -1! Néanmoins dans le cas totalement réel ($r_2 = 0$) Tate et Birch, à l'aide des expériences de Atkin sur le calculateur Atlas, ont été amenés à conjecturer la formule

$$(8) \qquad | \mathrm{Ker}\ \lambda_R | = w_F^{(2)} | \zeta_F(-1) |$$

où R est l'anneau d'entiers de F et où $w_F^{(r)}$ désigne le plus grand entier m tel que $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ opère trivialement sur $\mu_m^{\otimes r}$. Dans le cas des corps de fonctions on a $w_F^{(r)} = q^r-1$. Vu la surjectivité de λ_R (conséquence du Th.2) la formule (8) est bien analogue à (7).

La conjecture (8) n'est démontrée que dans des cas très particuliers (cf. par exemple Coates [5]). Certaines propriétés de divisibilité de $\zeta_F(-1)$ qu'elle entraîne ont été vérifiées par Serre ([14] (3.7)) en interprétant $\zeta_F(-1)$ comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de $SL_2(R)$.

La démonstration du beau théorème 8 se fait à l'aide des symboles galoisiens (n° 9) que Tate utilise aussi dans le cas des corps de nombres.

9. Les symboles galoisiens de Tate ([16]).

Soit F un corps, soit p sa caractéristique, et posons

$G_F = Gal(F_s/F)$ où F_s est une clôture séparable de F.

Pour tout G_F-module topologique M on pose $H^r(F,M) = H^r(C^\cdot(G_F,M))$ où $C^\cdot(G_F,M)$ désigne le complexe des cochaînes standard continues sur G_F à valeurs dans M.

Nous n'aurons à considérer que des limites projectives de modules discrets. Pour ces modules, on définit un produit tensoriel, noté $\otimes$, par passage à la limite projective à partir des quotients discrets.

Soit

$$(\varepsilon) \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow F_s^\cdot \longrightarrow 0$$

une suite exacte de G_F-modules topologiques. La suite exacte de cohomologie fournit un homomorphisme $\delta : F^\cdot = H^0(F,F_s^\cdot) \longrightarrow H^1(F,M)$, et le cup-produit $(a,b)_\varepsilon^F = \delta a \cdot \delta b$ définit une fonction bilinéaire antisymétrique

$$(\ ,\ )_\varepsilon^F : F^\cdot \times F^\cdot \longrightarrow H^2(F, M \otimes M).$$

Pour voir si c'est un symbole introduisons le sous-groupe D de $H^2(F,M \otimes M)$ engendré par les éléments $cor(a,1-a)_\varepsilon^E$ où E parcourt les extensions séparables finies de F et où $a \in E^\cdot$, $a \neq 0,1$.

Lemme 2 - Le groupe D est divisible par tout entier m, non divisible par p.

Ceci se démontre à l'aide de la formule $cor(a,b)_\varepsilon^E = (a, N_{E/F}b)_\varepsilon^F$ pour $a \in F^\cdot$, $b \in E^\cdot$ et des algèbres séparables

$$E_a = F[T]/(T^m - a) \qquad (a \in F^\cdot)$$

Lemme 3 - Soit M un G_F-module topologique et soit $m > 0$ un entier tel que

$$(9) \qquad M \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_n M/m^n M.$$

Alors pour tout entier $r \geq 0$ aucun sous-groupe de $H^r(F,M)$ n'est divisible par m.

En appliquant le lemme 3 (à $M \otimes M$) et le lemme 2 on déduit la proposition suivante.

Proposition 1 - Supposons qu'il existe un entier m non divisible par p tel que le module M dans la suite exacte (ϵ) satisfait à la condition (9). Alors $(\ ,\ )_\epsilon^F$ est un symbole.

Le symbole $(\ ,\ )_m$. C'est le symbole $(\ ,\ )_{\epsilon_m}$ associé à la suite exacte

$$(\epsilon_m) \qquad 0 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow F_s^\cdot \xrightarrow{m} F_s^\cdot \longrightarrow 0$$

où m est un entier non divisible par p. On note

$$h_m^F : K_2F \longrightarrow H^2(F, \mu_m \otimes \mu_m)$$

l'homomorphisme correspondant. On a les équivalences

$$(10) \qquad (a,b)_m = 1 \Leftrightarrow \{a,b\}_F \in mK_2F \Leftrightarrow b \in N_{E_a/F}(E_a^\cdot)$$

pour tout $a,b \in F^\cdot$.

Lorsque $\mu_m \subset F$ on a

$$H^2(F,\mu_m \otimes \mu_m) = H^2(F,\mu_m) \otimes \mu_m = Br(F)_m \otimes \mu_m$$

et l'on retrouve le symbole de [12], Ch.XIV, §2, Prop.5. Si $F = F_v$ comme dans le n°2 et si $m = m_v$ le symbole $(\ ,\ )_{m_v}$ s'identifie ainsi à $(\frac{\ ,\ }{v})$.

Proposition 2 (cf. [12]) - Si $\mu_m \subset F$ et si $a \in F^*$ la suite

$$F(a^{1/m})^* \xrightarrow{\text{norme}} F^* \xrightarrow{(a,\ )_m} Br(F(a^{1/m})/F) \otimes \mu_m \to 0$$

est exacte.

On se demande si l'homomorphisme

$$\bar{h}_m^F : K_2F/mK_2F \longrightarrow H^2(F,\mu_m \otimes \mu_m)$$

induit par h_m^F est un isomorphisme. On se ramène aussitôt au cas où $m = \ell^n$, ℓ étant un nombre premier différent de p. Posons $E = F(\mu_\ell)$. Tate a démontré les implications:

(11) $\bar{h}_\ell^E$ injectif $\Rightarrow$ $\bar{h}_{\ell^n}^E$ injectif pour tout n

$\Rightarrow$ $\bar{h}_{\ell^n}^F$ injectif pour tout n

et

(12) $\bar{h}_\ell^E$ surjectif $\Rightarrow$ $\bar{h}_{\ell^n}^E$ surjectif pour tout n

$\Rightarrow$ $\bar{h}_{\ell^n}^F$ surjectif pour tout n.

Par ailleurs $\bar{h}_\ell^E$ est injectif si $Br(E)_\ell$ est monogène, et surjectif si tout élément de $Br(E)_\ell$ est neutralisé par une extension cyclique de E. Si F est un corps global ces conditions sont

satisfaites par tous les E_v, et la dernière condition aussi par E. On a même:

Théorème 9 (Tate [19]) - Si F est un corps global l'homomorphisme $\overline{h}_m^F : K_2F/mK_2F \longrightarrow H^2(F, \mu_m \otimes \mu_m)$ est un isomorphisme pour tout entier m non divisible par p = car.(F).

Ce théorème fournit très peu de renseignements sur $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$ car Tate a montré que $\bigcap_m mK_2F$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$ d'indice ≤ 2, et que $\mathrm{Ker}(\lambda^F) \subset mK_2F$ pour tout m non divisible par 8.

Corollaire - Si m n'est pas divisible par 8 l'homomorphisme

$$K_2F/mK_2F \longrightarrow \oplus\, \mu_v/m\mu_v$$

induit par λ^F est injectif.

10. L'homomorphisme $h : K_2F \longrightarrow H^2(F, T^{(2)})$

Notation. Soit X un groupe abélien. On note X_{tors} son sous-groupe de torsion, X_{div} son plus grand sous-groupe divisible, $X/div = X/X_{div}$, et $X(\ell)$ sa composante ℓ-primaire, ℓ étant un nombre premier.

Soit F un corps de caractéristique $p \neq \ell$. Les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{lccccccc}
(\varepsilon_{\ell^n}) & 0 \longrightarrow & \mu_{\ell^n} & \longrightarrow & F_s^\cdot & \xrightarrow{\ell^n} & F_s^\cdot & \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \ell^n} & & \uparrow{\scriptstyle \ell^m} & & \uparrow{\scriptstyle 1} & \\
(\varepsilon_{\ell^{n+m}}) & 0 \longrightarrow & \mu_{\ell^{n+m}} & \longrightarrow & F_s^\cdot & \xrightarrow{\ell^{n+m}} & F_s^\cdot & \longrightarrow 0
\end{array}$$

fournissent, par passage à la limite projective, une suite exacte

$$(\varepsilon_{\ell^\infty}) \qquad 0 \longrightarrow T \longrightarrow L \longrightarrow F_S^{\cdot} \longrightarrow 0.$$

T est un Z_ℓ-module libre de rang 1 où G_F opère suivant son action sur les μ_{ℓ^n}. On note

$$(13) \qquad 0 \longrightarrow T^{(r)} \longrightarrow V^{(r)} \longrightarrow W^{(r)} \longrightarrow 0$$

le produit tensoriel r fois sur Z_ℓ avec T de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underset{=}{Z}_\ell \longrightarrow \underset{=}{Q}_\ell \longrightarrow \underset{=}{Q}_\ell/\underset{=}{Z}_\ell \longrightarrow 0,$$

où G_F opère trivialement. On a $T^{(1)} = T$ et $W = W^{(1)}$ s'identifie à $\varinjlim_n \mu_{\ell^n}$. Les groupes $H^q(F,V^{(r)})$ sont des $\underset{=}{Q}_\ell$-modules, les groupes $H^q(F,W^{(r)})$ sont de torsion, et le lemme 3 (n° 9) entraîne que $H^q(F,T^{(r)})_{div} = 0$ pour tout q et r. De la suite exacte

$$H^q(F,V^{(r)}) \to H^q(F,W^{(r)}) \to H^{q+1}(F,T^{(r)}) \to H^{q+1}(F,V^{(r)})$$

on déduit donc un isomorphisme

$$(14) \qquad H^q(F,W^{(r)})/div \xrightarrow{\cong} H^{q+1}(F,T^{(r)})_{tors}$$

pour tout q et r.

D'après la Prop. 1 la suite exacte $(\varepsilon_{\ell^\infty})$ définit un homomorphisme

$$(15) \qquad h: K_2F \longrightarrow H^2(F,T^{(2)}).$$

Il figure dans le théorème fondamental suivant qui ramène la plupart des questions sur K_2 d'un corps global à la cohomologie galoisienne.

Théorème 10 (Tate [16] et [17]) - Soit F un corps global. L'homomorphisme h de (15) induit un isomorphisme

$$K_2F(\ell) \longrightarrow H^2(F,T^{(2)})_{tors} = H^1(F,W^{(2)})/div$$

La démonstration de Tate du théorème 10 utilise de façon essentielle le théorème 2 de C. Moore, et, pour les corps de nombres, le théorème 7 de Garland (et donc implicitement le théorème 4 de Matsumoto-Steinberg), aussi bien qu'un théorème fondamental d'Iwasawa [7] sur les corps cyclotomiques.

Il se ramène aussitôt (à l'aide du transfert) au cas où $\mu_\ell \subset F$. Supposons en plus que $\sqrt{-1} \in F$ si $\ell = 2$, de sorte que, si $F_\infty = F(W)$, le groupe $\Gamma = Gal(F_\infty/F)$ est isomorphe à $\underset{=}{Z}_\ell$. On démontre facilement que $H^i(\Gamma,W^{(2)}) = 0$ pour $i \geq 1$, d'où un isomorphisme

$$(16) \qquad H^1(F,W^{(2)}) \xrightarrow{\cong} H^1(F_\infty,W^{(2)})^\Gamma.$$

La théorie de Kummer fournit en plus une identification

$$(17) \qquad H^1(F_\infty,W^{(2)}) = W \otimes F_\infty^*$$

Notons S_F (resp., S_{F_∞}) l'ensemble des places de F (resp., de F_∞) ne divisant pas $\ell\infty$ (i.e. toutes les places si F est un corps de fonctions). Posons $D' = \underset{=}{Z}^{(S_{F_\infty})}$. L'homomorphisme divisoriel $F_\infty^* \to D'$ induit un homomorphisme

$$d: W \otimes F_\infty^* \longrightarrow W \otimes D'.$$

D'autre part on a l'homomorphisme

$$e : W \otimes F_\infty^\bullet \longrightarrow K_2 F_\infty(\ell)$$
$$w \otimes a \longmapsto \{w,a\}_{F_\infty}$$

(cf. n° 8). Notons $\oplus'_v \mu_v(\ell) = \oplus_{v \in S_F} \mu_v(\ell)$. Considérons le diagramme

(18)
$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(F_\infty, W^{(2)})^\Gamma & = & (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma & \xrightarrow{d^\Gamma} & (W \otimes D')^\Gamma & & \\
\cong \uparrow & & & \searrow^{e^\Gamma} \quad \nearrow_{\lambda^{F_\infty}_{mod}(\ell)^\Gamma} & & & \uparrow \cong \\
H^1(F, W^{(2)}) & \to & H^2(F, T^{(2)})_{tors} & \xleftarrow{h} & K_2 F(\ell) & \xrightarrow{\lambda^F_{mod}(\ell)} & \oplus'_v \mu_v(\ell)
\end{array}$$

Le théorème 10 fournit ainsi un homomorphisme

$$f : (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma \to K_2 F(\ell)$$

qui, vu l'isomorphisme (14), induit un isomorphisme

(19) $$(W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma / \mathrm{div} \xrightarrow{\cong} K_2 F(\ell)$$

et qui, d'après Tate [20], rend commutatif le diagramme

(20)
$$\begin{array}{ccccc}
(W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma & & \xrightarrow{d^\Gamma} & & (W \otimes D')^\Gamma \\
\downarrow f & \searrow^{e^\Gamma} & & \nearrow_{\lambda_{mod}(\ell)^\Gamma} & \| \\
K_2 F(\ell) & \nearrow & K_2 F_\infty(\ell)^\Gamma & & \\
 & \searrow & \xrightarrow{\lambda_{mod}(\ell)} & & \oplus'_v \mu_v(\ell)
\end{array}$$

En appliquant ces conclusions aux corps $F(\mu_{\ell^n})$ et passant à la limite inductive on conclut:

(21) $$e : W \otimes F_\infty^\bullet \longrightarrow K_2 F_\infty(\ell)$$

est surjectif, et $\mathrm{Ker}(e) = \bigcup_n ((W \otimes F_\infty^\bullet)^{\Gamma_n})_{\mathrm{div}}$, où $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty / F(\mu_{\ell^n}))$.

Lorsque F est un corps de fonctions on voit (cf. (3) du n° 8) que $((W \otimes F_\infty^\cdot)^\Gamma)_{div} = 0$ et donc le théorème 8 du n° 8 résulte de (19) et de (21).

Dans le cas des corps de nombres Coates [5] a trouvé une interprétation naturelle de Ker(e) dans la théorie d'Iwasawa. Notant $F_n = F(\mu_{\ell^n})$ il montre aussi que les homomorphismes

$$K_2F_n(\ell) \longrightarrow K_2F_\infty(\ell)^{Gal(F_\infty/F_n)}$$

sont surjectifs et à noyau "constant" pour $n \gg 0$.

Références

[1] E. Artin et J. Tate, Class field theory.

[2] H. Bass, K_2 of global fields, AMS Taped Lecture (Cambridge, Mass., Oct. 1969).

[3] B. J. Birch, K_2 of global fields, Proc. Symp. Pure Math., vol. 20, AMS (1970).

[4] A. Borel et J.-P. Serre, Adjonction de coins aux espaces symétriques; applications à la cohomologie des groupes arithmétiques, C.R. Acad. Sc. Paris t. 271 (9 Dec. 1970) 1156-1158.

[5] J. Coates, Notes d'un cours à Harvard, 1971.

[6] K. Dennis, K_2 and the stable range condition (à paraître).

[7] H. Garland, A finiteness theorem for K_2 of a number field (à paraître aux Annals).

[8] K. Iwasawa, Notes d'un cours à Princeton, 1969-70 (à paraître chez Springer).

[9] H. Matsumoto, Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann. Sci. ENS(4) 2 (1969) 1-62.

[10] J. Milnor, Notes on algebraic K-theory (à paraître).

[11] C. Moore, Group extensions of p-adic and adelic linear groups, Publ. IHES, n° 35 (1968), 157-221.

[12] J.-P. Serre, Corps locaux, Hermann (1962).

[13] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Hermann (1959).

[14] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1971.

[15] M. Stein, Generators, relations and coverings for Chevalley groups over commutative rings (à paraître dans Am. Jour. Math.)

[16] M. Stein, Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors. (à paraître).

[17] R. Steinberg, Générateurs, relations, et revêtements de groupes algébriques, Colloq. Th. des Groupes Alg. Bruxelles, 1962) Lib. Univ., Louvain, et Gauth.-Villars, Paris (1962) 113-127.

[18] J. Tate, K_2 of global fields, AMS Taped Lecture (Cambridge, Mass., Oct. 1969).

[19] J. Tate, Symbols in arithmetic, Hour lecture, Internatl. Cong. Math., Nice, 1970.

[20] J. Tate, Lettre à Iwasawa, 20 janvier, 1971.