SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE GRISVARD

Résolution locale d'une équation différentielle

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 391, p. 183-196

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__183_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 391 Février 1971

RÉSOLUTION LOCALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

selon Nirenberg et Trèves

par Pierre GRISVARD

On cherche des conditions sur un opérateur différentiel linéaire P pour que l'équation

$$\square \qquad Pu = f$$

soit localement résoluble au point x_o, c'est-à-dire pour qu'il existe un voisinage V de x_o tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(V)$, il existe au moins une distribution u dans V, solution de l'équation $\square$.

Dans le cas particulier où P est à coefficients constants, la résolubilité locale résulte de l'existence d'une solution élémentaire E (solution de $PE = \delta$) démontrée par Ehrenpreis [2] et Malgrange [6] sans aucune restriction sur P.

Un contre-exemple dû à H. Lewy [5] montre que par contre, dans le cas où P est à coefficients variables même analytiques (ou polynômes !), il n'y a aucun espoir d'obtenir la résolubilité locale sans restriction sur P.

La méthode qui consiste à considérer localement un opérateur à coefficients variables comme une petite perturbation d'un opérateur à coefficients constants (ou méthode de "l'artifice de Korn") a permis à Peetre [8] de prouver la résolubilité locale pour les "opérateurs à force constante" ; ceci fait apparaître l'intérêt des opérateurs à caractéristiques réelles simples ou opérateurs de "type principal" (cf. plus loin).

L'étape suivante a été la démonstration de la résolubilité locale pour les opérateurs à caractéristiques réelles simples et à coefficients réels (au moins pour la partie principale) par Hörmander [3].

Enfin, récemment Nirenberg et Trèves [7] ont trouvé une condition nécessaire (dans le cas où les coefficients sont différentiables) et suffisante

(lorsque les coefficients sont analytiques) pour la résolubilité locale d'un opérateur de type principal ; ce sera l'objet essentiel de cet exposé. Des résultats très proches concernant l'hypoellipticité ont été annoncés par Egoroff [1]. Le cas à deux variables avait été précédemment résolu par Trèves [9].

1. Notations.

On utilisera les notations usuelles dans la théorie des équations aux dérivées partielles : Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions numériques différentiables et à support compact dans Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions dans Ω et enfin $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans Ω . Soit

$$P(x\,;D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha , \qquad x \in \Omega$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients a_α différentiables dans Ω (α est un multi-entier $\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\}$, de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1 , 2 , \ldots , n$) ; on désigne par $p(x\,;\xi)$ son symbole :

$$p(x\,;\xi) = e^{-i\langle x\,;\,\xi\rangle}\, P(e^{i\langle x\,;\,\xi\rangle}) , \qquad x \in \Omega , \ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

On désigne par P_m la partie principale (homogène de degré m) de P et p_m le symbole correspondant.

On notera (R.L. x_o) la propriété de résolubilité locale au voisinage de x_o :

(R.L. x_o) *Il existe un voisinage* V *de* x_o *tel que pour toute* $f \in \mathcal{D}(V)$, *il existe* $u \in \mathcal{D}'(V)$ *solution de l'équation* $\Box$.

2. Opérateurs à force constante.

Au symbole p on associe un nouveau symbole $\tilde{p}$ en posant

$$\tilde{p}(x ; \xi)^2 = \sum_{\beta} |D_{\xi}^{\beta} p(x ; \xi)|^2$$

et P est dit à "force constante" si le quotient $\tilde{p}(x ; \xi)[\tilde{p}(y ; \xi)]^{-1}$ reste borné lorsque ξ décrit $\mathbb{R}^n$ et (x , y) décrit $K \times K$ où K est un compact quelconque contenu dans Ω ; alors pour un tel opérateur on vérifie que si E_o est une solution élémentaire de $P(x_o ; D)$, la norme dans $L^2(V)$ de l'opérateur

$$f \longmapsto \{P(x ; D) - P(x_o ; D)\}E_o * f$$

peut être rendue arbitrairement petite en diminuant V ; ceci implique la propriété $(R.L.\ x_o)$.

Exemples.- (i) Si P est elliptique (c'est-à-dire $p_m(x ; \xi) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$) alors il est à force constante.

(ii) Si P_m est à coefficients constants et

$$|\mathrm{grad}_{\xi} p_m(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}(x ; \xi)|^2 \neq 0 , \qquad \xi \neq 0 ,$$

alors P est à force constante.

Ce second exemple amène à considérer les opérateurs de "type principal" :

DÉFINITION.- P est dit de "type principal" si $\mathrm{grad}_{\xi} p_m(x_o ; \xi_o) \neq 0$ pour tout couple $x_o \in \Omega$ et $\xi_o \neq 0$ tel que $p_m(x_o ; \xi_o) = 0$.

Il revient au même de supposer $\mathrm{grad}_{\xi} p_m(x_o ; \xi_o) \neq 0$ pour tout couple $x_o \in \Omega$ et $\xi_o \neq 0$ car si $p_m \neq 0$ alors $\mathrm{grad}_{\xi} p_m \neq 0$ grâce à l'identité d'Euler. En d'autres termes les racines réelles de $p_m(x ; \xi) = 0$ sont simples.

3. Le contre-exemple de H. Lewy.

Il est relatif à l'opérateur d'ordre $m = 1$ défini dans $\mathbb{R}^3$ par

$$P(x ; D) = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3$$

et il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que l'équation $\square$ n'ait pas de solution distribution et ceci dans aucun ouvert de $\mathbb{R}^3$. L'opérateur P est de type principal car

$$\operatorname{grad}_\xi p_1(x ; \xi) = \{-i ; 1 ; -2(x_1 + ix_2)\} \neq 0$$

pour tout x et tout ξ. Partant de cet exemple, Hörmander [3] a démontré qu'une condition nécessaire pour que P ait la propriété (R.L. x_o) est que $c_{2m-1}(x ; \xi) = 0$ dès que $p_m(x ; \xi) = 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ et x dans un voisinage de x_o, où c_{2m-1} désigne la partie homogène de degré $2m - 1$ du symbole c du commutateur

$$C(x ; D) = [\bar{P}(x ; D) ; P(x ; D)]$$

(avec $\bar{P}(x ; D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a_\alpha(x)}\, D^\alpha$). En particulier, cette condition est évidemment vérifiée lorsque P est à coefficients réels, et réciproquement Hörmander [3] a démontré la propriété (R.L. x_o) pour tout opérateur à coefficients réels et de type principal. Enfin tous ces résultats sont généralisés par

4. Le théorème de Nirenberg et Trèves.

Dans toute la suite, on suppose que P est de type principal ; soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle bande bicaractéristique de $\operatorname{Re} z p_m$ (au voisinage d'un point (x_o , ξ_o) tel que $\operatorname{grad}_{x,\xi} \operatorname{Re} z p_m(x_o , \xi_o) \neq 0$) une courbe Γ orientée dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$, passant par le point (x_o , ξ_o) et définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x'(t) = \operatorname{grad}_\xi \operatorname{Re} z p_m(x(t) ; \xi(t)) , \\ x(0) = x_o \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi'(t) = -\operatorname{grad}_x \operatorname{Re} z p_m(x(t) ; \xi(t)) \ ; \\ \xi(0) = \xi_o . \end{cases}$$

La fonction $\operatorname{Re} zp_m$ est évidemment constante sur Γ . L'hypothèse fondamentale dans ce qui suit est la suivante :

(H) Sur toute bicaractéristique Γ de $\operatorname{Re} zp_m$, sur laquelle $\operatorname{Re} zp_m$ est nulle, la fonction $\operatorname{Im} zp_m$ garde un signe constant.

THÉORÈME.- La condition (H) est nécessaire (si P est à coefficients différentiables) et suffisante (si P est à coefficients analytiques) pour que P ait la propriété (R.L. x_o) (en réalité seule l'analyticité des coefficients de P_m intervient).

Ce résultat redonne comme cas particulier la propriété (R.L. x_o) citée plus haut pour les opérateurs de type principal à coefficients réels ; par contre il n'englobe pas tous les cas d'opérateurs à force constante.

5. Un exemple simple.

L'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels permet de réduire la démonstration du cas général au cas particulier d'un opérateur du premier ordre de la forme

$$P(x ; D) = D_n - \Lambda(x ; D_1 , \ldots , D_{n-1}) \quad \text{(ou plus simplement } D_2 + ix_2^k D_1\text{)}$$

où Λ est un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre en $D_1 , \ldots , D_{n-1}$ dépendant différentiablement de x_n . Dans cette réduction, on est amené à modifier l'hypothèse (H) de façon à l'adapter aux symboles pseudo-différentiels :

(H') Sur toute courbe bicaractéristique Γ de $\operatorname{Re} p_m$, sur laquelle $\operatorname{Re} p_m$ est nulle, si $\operatorname{Im} p_m$ est strictement négative en un point, elle demeure négative ou nulle sur Γ à partir de ce point (en tenant compte de l'orientation de Γ). (Cette condition équivaut à k pair pour l'opérateur $D_2 + ix_2^k D_1$.)

On rappelle que l'opérateur pseudo-différentiel P est lié à son symbole

p par la relation

$$P(x\,;\,D)u(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x\,;\,\xi\rangle}\, p(x\,;\,\xi)\tilde{u}(\xi)\,d\xi$$

pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\tilde{u}$ désigne la transformée de Fourier de u .

Dans le cas d'un symbole différentiel, les hypothèses (H) et (H') coïncident car $p_m(x\,;\,\xi)$ est homogène de degré m en ξ . On va illustrer la signification de l'hypothèse (H') en démontrant directement l'existence locale pour l'opérateur très particulier $P(x\,;\,D) = D_n - \Lambda(x_n\,;\,D_1\,,\ldots,\,D_{n-1})$, c'est-à-dire lorsque Λ est à coefficients constants en $y = \{x_1\,,\ldots,\,x_{n-1}\}$. On notera η la variable duale de y et t à la place de x_n ; en désignant par $\hat{u}$ (resp. $\hat{f}$) la transformée de Fourier partielle de u (resp. f) et par λ le symbole de Λ , l'équation $\square$ s'écrit alors $\frac{d\hat{u}}{dt} - i\lambda(t\,;\,\eta)\hat{u} = i\hat{f}$; une solution de cette équation s'écrit

$$\hat{u}(\eta\,;\,t) \;=\; i\int_{c(\eta)}^{t} e^{i\{A(t\,;\,\eta) - A(s\,;\,\eta)\}}\,\hat{f}(\eta\,;\,s)\,ds$$

avec $A(t\,;\,\eta)$ primitive en t de $\lambda(t\,;\,\eta)$ et $c(\eta)$ constante qui reste à déterminer de manière que l'intégrale soit une distribution tempérée en η .

Si on pose $\lambda(t\,;\,\eta) = a(t\,;\,\eta) + ib(t\,;\,\eta)$ avec a et b symboles réels, on voit facilement que l'hypothèse (H') signifie que si $b(t_o\,;\,\eta) > 0$ alors $b(t\,;\,\eta) \geq 0$ pour tout $t \geq t_o$.

Si on se restreint à l'intervalle $|t| \leq \varepsilon$, alors pour chaque η fixé la fonction $B(t\,;\,\eta) = \operatorname{Im} A(t\,;\,\eta)$ atteint son minimum en un point $c'(\eta)$ où on a par conséquent $b(c'(\eta)\,;\,\eta) = 0$; il y a alors deux cas :

1er cas : $B(t\,;\,\eta)$ est constante pour $t \geq c'(\eta)$, on pose $c(\eta) = c'(\eta)$ et on a $B(t\,;\,\eta) - B(s\,;\,\eta) = 0$ pour tout $t \geq s \geq c(\eta)$.

2nd cas : $B(t\,;\,\eta)$ n'est pas constante pour $t \geq c'(\eta)$, on peut donc

trouver $c(\eta) > c'(\eta)$ tel que $b(c(\eta), \eta) > 0$; on a alors $b(t;\eta) \geq 0$ pour tout $t \geq c(\eta)$ et par conséquent $B(t;\eta) - B(s;\eta) \geq 0$ pour tout $t \geq s \geq c(\eta)$.

Dans les deux cas on en déduit que

$$|e^{i\{A(t;\eta) - A(s;\eta)\}}| = e^{-\{B(t;\eta) - B(s;\eta)\}} \leq 1 ,$$

et il est facile de vérifier que $\hat{u}(t;\eta)$ est la transformée de Fourier partielle en y d'une distribution u solution de l'équation $\Box$ dans la bande $V = \{|t| \leq \varepsilon\}$ lorsque $f \in \mathcal{D}(V)$.

6. Schéma de la démonstration de la condition suffisante.

(i) Réduction à une "estimation a priori".

On déduit facilement du théorème de Hahn-Banach que la propriété (R.L. x_o) est vérifiée dès qu'il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que

$$\|u\|_0 \leq C \, \|{}^t P u\|_{-m+1} , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V)$$

où $\|\cdot\|_s$ désigne la norme de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ (c'est-à-dire de l'espace des distributions dont les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $s \geq 0$, et du dual de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $s < 0$). Pour $f \in L^2(V)$ on trouvera $v \in H^{m-1}(V)$ solution de $Pv = f$.

Par dualité, il revient au même de prouver l'existence d'un voisinage V de x_o et d'une constante $C > 0$ tels que

$$\|u\|_{m-1} \leq C \, \|Pu\|_0 , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V) .$$

Techniquement, il sera plus commode de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_o tel que

$$* \qquad \|u\|_{m-1} \leq \varepsilon \, \|Pu\|_0 , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V) .$$

(On peut justifier partiellement l'introduction de cet ε en remarquant que cette propriété est stable lorsqu'on perturbe P par un opérateur d'ordre $\leq m - 1$.)

(ii) Réduction au cas où P est du premier ordre.

L'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels permet de "découper" le symbole p sur la sphère unité $|\xi| = 1$ pour x dans un voisinage de x_o ; ce découpage est rendu possible grâce à la remarque suivante : si les φ_j , $j = 1, \ldots, N$, forment une partition de l'unité différentiable sur la sphère $|\xi| = 1$, et si on prolonge les φ_j en fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$, homogènes de degré zéro pour $|\xi| \geq \frac{1}{2}$, alors les opérateurs pseudo-différentiels Φ_j de symboles φ_j forment une partition de l'identité dans le sens suivant :

$$\|u\|_{m-1} \leq \sum_{j=1}^{N} \|\Phi_j(D)u\|_{m-1} + C \|u\|_{m-2}$$

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit donc de prouver l'inégalité $*$ avec u remplacée par $\Phi_j(D)u$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

On choisit les φ_j de manière que dans un voisinage $V \times U_j$ de $\{x_o\} \times K_j$ (K_j support de φ_j dans la sphère $|\xi| = 1$) on ait

(i) soit $p_m(x ; \xi) \neq 0$ pour $x \in V$, $\xi \in U_j$;

(ii) soit $\operatorname{grad}_\xi p_m(x ; \xi) \neq 0$ pour $x \in V$, $\xi \in U_j$;

ce qui est possible puisqu'on a supposé que P est de type principal ; alors en négligeant quelques détails techniques, on a respectivement

(i) soit $P\Phi_j u = P_j \Phi_j u$ où P_j est un opérateur elliptique d'ordre m et par conséquent on a

$$\|\Phi_j(D)u\|_{m-1} \leq \varepsilon \|P\Phi_j u\|_o + C_j \|\Phi_j u\|_{m-2}$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$ (quitte à diminuer V) ;

(ii) soit $P\Phi_j u = Q_j L_j \Phi_j u$ où Q_j est un opérateur elliptique d'ordre $m - 1$ et L_j un opérateur du premier ordre et par conséquent on a

$$\|L_j \Phi_j u\|_{m-2} \leq C_j \|P\Phi_j u\|_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$, et on est ainsi réduit à prouver une inégalité de la forme * pour les opérateurs L_j .

Dans ce qui suit on peut omettre l'indice j . Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $x_0 = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial \xi_n} p_m(0 ; \xi) \neq 0$ pour $\xi \in U$. On a alors

$$p(x ; \xi) = q(x ; \xi)(\xi_n - \lambda(x ; \xi_1 , \ldots , \xi_{n-1}))$$

pour $(x ; \xi) \in V \times U$, avec λ homogène de degré un en $\eta = (\xi_1 , \ldots , \xi_{n-1})$; on a donc

$$L(x ; D) = D_n - \Lambda(x ; D_1 , \ldots , D_{n-1})$$

et l'opérateur L vérifie l'hypothèse (H') grâce au

Lemme 1.- L'hypothèse (H') reste vérifiée lorsqu'on multiplie p_m par une fonction différentiable q qui ne s'annule pas.

(iii) Etude de l'opérateur L .

Comme L est d'ordre 1 , l'inégalité * devient

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon \|Lu\|_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$, V voisinage de zéro.

On écrit $\lambda = a + ib$ avec des symboles a et b réels ; on a alors

$$Lu = \frac{1}{i} \frac{du}{dt} - A(t)u - iB(t)u$$

en notant t à la place de x_n et $A(t)$ (resp. $B(t)$) les opérateurs pseudo-

différentiels de symboles $a(x;\eta)$ (resp. $b(x;\eta)$) et en considérant u comme fonction de la seule variable t à valeurs vectorielles. Les opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ sont auto-adjoints dans $H = L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ à un opérateur d'ordre zéro (donc borné dans H) près ; on ne change pas la nature de l'inégalité à démontrer en les remplaçant par leurs parties auto-adjointes $A_o(t)$ et $B_o(t)$ respectivement ; on notera

$$L_o u = \frac{1}{i}\frac{du}{dt} - A_o(t)u - iB_o(t)u .$$

Soit $U(t)$ l'opérateur unitaire dans H, solution de l'équation opérationnelle $\frac{dU(t)}{dt} - iA_o(t)\,U(t) = 0$ avec $U(0) = 1$; si on pose $v(t) = U(t)^{-1}\,u(t)$, on a alors

$$L_o u(t) = U(t)\left(\frac{1}{i}\frac{dv}{dt} - i\tilde{B}_o(t)v\right)$$

en posant $\tilde{B}_o(t) = U(t)^{-1}\,B_o(t)\,U(t)$; puisque $U(t)$ est unitaire, on est ramené à démontrer l'inégalité $*$ avec L remplacé par $L_1 = \frac{d}{dt} + \tilde{B}_o(t)$, et u fonction à support dans une bande $|t| \leq \delta$ (car $U(t)$ n'a aucune raison de conserver le support par rapport à y). De plus $U(t)$ conserve l'espace $H^1(\mathbb{R}^{n-1})$ mais n'y est pas isométrique.

Toute la suite repose sur l'étude de l'opérateur $\tilde{B}_o(t)$.

(iv) Approximation explicite de l'opérateur $U(t)$.

L'opérateur $\frac{d}{dt} - iA_o(t)$ est de nature hyperbolique ; on peut donc approcher $U(t)$ à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier $K(t)$ construit comme dans Hörmander [4]. Précisément, on cherche K sous la forme

$$K(t)u(y) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} k(y,t,\eta)\,e^{i\varphi(y,t,\eta)}\,\hat{u}(\eta)\,d\eta$$

où φ est homogène de degré un en η et sans point critique pour $\eta \neq 0$, avec $K(0) = 1$ et $\frac{dK(t)}{dt} - iA_o(t)\,K(t)$ opérateur régularisant. On note a_o le symbole de A_o ; son symbole principal est nécessairement a et à des termes de degré

≤ 0 en η près on a

$$e^{-i\langle y;\eta\rangle} A_o(t)(e^{i\langle y;\eta\rangle}\theta(y)) = a(y,t,\eta) , \qquad y \in \omega$$

avec $\theta \in \mathcal{D}$ et $\theta \equiv 1$ dans un voisinage de $\bar{\omega}$; on en déduit

$$e^{-i\varphi(y,t,\eta)} A_o(t)(e^{i\varphi(y,t,\eta)}\theta(y)) = a(y,t,\mathrm{grad}_y\varphi) , \qquad y \in \omega$$

et dans le calcul de $\{\frac{d}{dt} - iA_o(t)\}(ke^{i\varphi})$ apparaît le terme

$$i\{\frac{d\varphi}{dt} - a(y,t,\mathrm{grad}_y\varphi)\}(ke^{i\varphi}) + \ldots$$

c'est pourquoi la fonction de phase φ est construite comme solution du problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(y,t,\mathrm{grad}_y\varphi) \\ \varphi(y,0,\eta) = \langle y;\eta\rangle . \end{cases}$$

(La condition initiale est imposée par la condition $K(0) = 1$, on imposera aussi $k(y,0,\eta) = 1$.) Il n'est pas utile pour la suite de la description de la méthode d'insister sur la construction de la fonction d'amplitude k : c'est un symbole qu'on obtient comme solution d'une équation différentielle linéaire.

(v) Etude de l'opérateur $\tilde{B}_o(t)$.

Le calcul symbolique sur les opérateurs intégraux de Fourier, montre que si Q (resp. $Q^{\#}$) est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal q (resp. $q^{\#}$) on a à des termes de degré inférieur près

$$QK(t)u(y) = (2\pi)^{-n} \int_{R^{n-1}} e^{i\varphi(y,t,\eta)}\, k(y,t,\eta) q(y,t,\mathrm{grad}_y\varphi)\, \hat{u}(y)\, dy$$

$$K(t)Q^{\#}u(y) = (2\pi)^{-n} \int_{R^{n-1}} e^{i\varphi(y,t,\eta)}\, k(y,t,\eta)\, q^{\#}(\mathrm{grad}_\eta\varphi, t, \eta)\, \hat{u}(y)\, dy$$

donc on aura $Q^{\#}(t) = K(t)^{-1}QK(t)$ si les symboles principaux q et $q^{\#}$ sont liés par la relation

$$(2) \qquad q^{\#}(\mathrm{grad}_\eta\varphi, t, \eta) = q(y,t,\mathrm{grad}_y\varphi) .$$

On applique ce qui précède avec Q remplacé par $B_o(t)$; on en déduit que $\widetilde{B}_o(t)$ est approché par l'opérateur pseudo-différentiel $B_o^{\#}(t)$ donc le symbole est donné par

$$b_o^{\#}(x_o , t , \xi_o) = b(x(x_o , t , \xi_o) , t , \xi(x_o , t , \xi_o))$$

où $x(x_o , t , \xi_o) = x(t)$, $\xi(x_o , t , \xi_o) = \xi(t)$ est la courbe intégrale du système

$$(3) \qquad \begin{cases} x'(t) = -\operatorname{grad}_\xi a(x , t , \xi) , & x(0) = x_o \\ \xi'(t) = \operatorname{grad}_x a(x , t , \xi) , & \xi(0) = \xi_o , \end{cases}$$

(ceci est obtenu en résolvant le système (1), (2) avec q remplacé par b).

(vi) Factorisation de l'opérateur $B_o^{\#}(t)$.

L'hypothèse (H') appliquée à l'opérateur $L = D_n - \Lambda$ montre que $b(x , t , \xi)$ ne change pas de signe sur chaque courbe intégrale de (3) ; par conséquent le signe de $b_o^{\#}$ ne dépend pas de t , ceci permet d'appliquer le

Lemme 2.- Soit $y , t \longmapsto f(y , t)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^{N+1}$ (de point courant noté (y , t) , $y \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$) ; on suppose que le signe de $f(y , t)$ est indépendant de t ; alors quitte à restreindre V on peut écrire

$$f(y , t) = g(y)\, \pi(y , t)$$

où g et π sont analytiques réelles et $\pi \geq 0$.

On en déduit qu'on peut approcher $B_o^{\#}(t)$ par un opérateur de la forme $GJ(t)$ où G est un opérateur auto-adjoint indépendant de t dans H et $J(t)$ un opérateur continu hermitien positif dans H dépendant régulièrement de t , tel que $[G , J(t)]$ et $[[G ; J(t)] ; G]$ soient bornés.

La dernière étape consiste à prouver une inégalité de la forme * pour une équation abstraite relative à l'opérateur

$$\frac{d}{dt} - GJ(t) ,$$

ceci utilise les techniques usuelles pour l'étude des équations opérationnelles abstraites, avec cependant une difficulté supplémentaire provenant du fait que $J(0)$ peut être nul (exemple : $G = i\frac{d}{dx}$ et $J(t) = t^k$).

N.B. - Cette description de la démonstration a passé sous silence de nombreux détails techniques très astucieux et elle ne peut en aucun cas dispenser de la lecture des cinquante pages de L. Nirenberg et F. Trèves.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ju. V. EGOROFF - On subelliptic pseudodifferential operators [en russe], Dokl. Akad. Nauk CCCP, 1969, n° 1, tome 188, p. 20-22. [Trad. anglaise : Soviet Math. Dokl., 10 (1969), n° 5, p. 1056-1059.]

[2] L. EHRENPREIS - Solutions of some problems of division, Amer. J. of Math., 76 (1954), p. 883.

[3] L. HÖRMANDER - Linear partial differential operators, Die Grundlehren der math., Band 116, Springer-Verlag.

[4] L. HÖRMANDER - The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., vol. 121, 1968, p. 193.

[5] H. LEWY - An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math., (2) 66, 1957, p. 155.

[6] B. MALGRANGE - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier 6, 1955/56, p. 271.

[7] L. NIRENBERG - F. TRÈVES - On local solvability of linear partial differential equations, Part I and Part II, Comm. Pure and Applied Math., vol. 23, p. 1 and p. 459, 1970.

[8] J. PEETRE - Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, Thèse à Lund, 1959.

[9] F. TRÈVES - On the local solvability of linear partial differential equations in two independant variables, Amer. J. of Math., vol. XCII, n° 1, 1970.