SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 388, p. 107-122

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__107_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 388 Février 1971

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par Pierre CARTIER

§ 1. Introduction et historique

L'équation d'onde relativiste d'un méson de masse m et spin 0 est due à Klein-Gordon et s'écrit sous la forme

$$\partial_0^2\varphi - \Delta\varphi + m^2\varphi = 0 . \tag{1}$$

Nous employons un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière c et la constante de Planck $\hbar = h/2\pi$ sont égales à 1 ; on note $t = x_0$, x_1, x_2, x_3 les coordonnées dans l'espace-temps et l'on pose $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ et $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$. Si l'on introduit la densité lagrangienne $\mathfrak{L}(\varphi)$ par

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \tfrac{1}{2}\Big[(\partial_0\varphi)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\partial_i\varphi)^2 - m^2\varphi^2 \Big] , \tag{2}$$

on peut écrire l'équation (1) sous la forme d'Euler-Lagrange

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} = \sum_{j=0}^{3} \partial_j \Big(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_j\varphi)} \Big)$$ correspondant au principe variationnel $\delta \int \mathfrak{L}(\varphi) dx_0 dx = 0$.

Selon le schéma usuel du calcul des variations, on introduit alors le champ conjugué π de φ et la densité hamiltonienne $\mathfrak{H}$ par $\pi = \dfrac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_0\varphi)}$ et $\mathfrak{H} = \pi.\partial_0\varphi - \mathfrak{L}$, d'où $\pi = \partial_0\varphi$ et

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}\Big[\pi^2 + \sum_{i=1}^{3} (\partial_i\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \Big] . \tag{3}$$

Les fondateurs de la Mécanique Quantique (Dirac, Pauli, Jordan) ont montré comment traîter heuristiquement un champ de mésons ; par extension de la méthode

d'Heisenberg pour la quantification des particules, on postule que les valeurs du champ $\varphi(x\,,\,t)$ et $\pi(x\,,\,t)$ sont des opérateurs dans un espace de Hilbert satisfaisant aux relations de commutation canoniques (à temps fixe) :

$$(4)\quad [\varphi(x\,,\,t)\,,\,\varphi(x'\,,\,t)] = [\pi(x\,,\,t)\,,\,\pi(x'\,,\,t)] = 0\,,$$
$$[\varphi(x\,,\,t)\,,\,\pi(x'\,,\,t)] = i\delta(x - x')\,.$$

La présence de la "fonction" de Dirac dans ces équations suggère que φ et π sont des <u>distributions</u> à valeurs opératorielles et que seules ont un sens les "moyennes" de champs de la forme $\Phi(u) = \int \varphi(x\,,\,t)u(x)\,dx$ et $\Pi(v) = \int \pi(x\,,\,t)v(x)\,dx$ pour des fonctions "tests" u et v convenables. De plus, si l'on définit formellement l'hamiltonien H_o comme l'opérateur $\int \mathcal{H}(x\,,\,t)\,dx$, on déduit formellement de (4) les équations d'évolution sous la forme

$$(5)\qquad i\dot{\varphi} = [\varphi\,,H_o] \quad , \quad i\dot{\pi} = [\pi\,,H_o]$$

(on note par un point la dérivée par rapport au temps).

Ce qui précède définit un "champ libre" de mésons ; on introduit une interaction entre les mésons par un terme supplémentaire dans l'équation (1) ; le cas que nous considèrerons dans la suite est l'équation

$$(6)\qquad \partial_o^2\varphi - \Delta\varphi + m^2\varphi + g.\varphi^3 = 0 \qquad \text{avec } g > 0\,.$$

Dans la discussion précédente, il convient d'ajouter le terme $-\frac{g}{4}\varphi^4$ à $\mathcal{L}(\varphi)$ et $\frac{g}{4}\varphi^4$ à $\mathcal{H}$; l'opérateur hamiltonien est alors $H = H_o + H_i$ avec l'hamiltonien d'interaction $H_i = g\int \varphi(x\,,\,t)^4\,dx$.

La difficulté dans l'interprétation de ces calculs, que tous les traîtés de Mécanique Quantique recopient, provient des carrés dans H_o , mais <u>surtout de φ^3 dans l'équation (6) et de φ^4 dans H_i</u> ; il est bien connu qu'<u>on ne peut pas en général multiplier des distributions</u>. La théorie du champ libre a

été mise au point mathématiquement par Cook [1] au moyen des algèbres tensorielles sur un espace de Hilbert ; elle a été ensuite considérablement approfondie par I. Segal [8] à qui l'on doit la "représentation d'onde" et le lien avec les processus gaussiens. On doit aussi à Segal [9] une définition générale des puissances $:\varphi(x,t)^n:$ introduites par Wick. Grâce à tous ces travaux, il est maintenant possible de définir en toute rigueur l'hamiltonien libre H_o comme un opérateur auto-adjoint, et l'hamiltonien d'interaction H_i comme une forme bilinéaire sur un domaine dense, donc aussi $H = H_o + H_i$ comme forme bilinéaire.

Le premier résultat vraiment profond de la théorie est dû à Nelson [7] ; remplaçant l'espace euclidien à 3 dimensions par un tore à une dimension, il montre que H est borné inférieurement, ce qui permet de lui trouver un prolongement auto-adjoint par la méthode de Friederichs. I. Segal [10] a ensuite esquissé une méthode pour passer du tore à une dimension à l'espace euclidien à une dimension, par la considération de groupes d'automorphismes de C^*-algèbres. Cette méthode, combinée avec des majorations d'un type nouveau pour les perturbations d'opérateurs auto-adjoints, a permis à J. Glimm et A. Jaffe (cf. [2 , 3 , 4]) d'obtenir dernièrement une grande quantité de résultats rigoureux sur l'équation $\partial_t^2\varphi(x,t) - \partial_x^2\varphi(x,t) + m^2\varphi(x,t) + g:\varphi(x,t)^3:$ avec $m > 0$ et $g > 0$. Ils traitent aussi le cas des interactions de Yukawa dans l'espace-temps de dimension 2 , cas notablement plus difficile [5].

Dans le reste de cet exposé, nous examinerons à l'usage du lecteur mathématicien les champs libres, et nous indiquerons le principe de la méthode récente de Segal [11] pour définir l'hamiltonien H pour l'espace-temps de dimension 2 (cf. aussi [6]). Cette méthode nous semble assez stable dans une théorie très mouvante, aux progrès très rapides.

§ 2. Résultats généraux de Mécanique quantique

2.1. Glossaire de Mécanique quantique.

Dans tout modèle quantique, on met à la base de la théorie un espace de Hilbert complexe $\underline{K}$; un vecteur d'état est un élément de norme 1 de $\underline{K}$, et deux tels vecteurs a et a' définissent le même état si et seulement s'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $a' = \lambda.a$. Un événement est un projecteur orthogonal dans $\underline{K}$. Soit $(M, \underline{M})$ un espace mesurable ; une variable quantique X à valeurs dans M est définie par une mesure spectrale E_X sur M à valeurs dans $\underline{K}$, c'est-à-dire une application de $\underline{M}$ dans l'ensemble des événements satisfaisant à l'axiome suivant : si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est une suite d'éléments de $\underline{M}$ deux à deux disjoints (de réunion A), les projecteurs $E_X(A_n)$ sont deux à deux orthogonaux et l'on a $E_X(A) = \sum_{n=1}^{\infty} E_X(A_n)$. Soit a un vecteur d'état ; on lui associe une mesure de probabilité $m_{a,X}$ sur $(M, \underline{M})$ par $m_{a,X}(A) = \|E_X(A).a\|^2$; cette quantité s'interprète comme la probabilité de trouver X dans A quand le système est dans l'état défini par a .

Les deux cas les plus fréquents sont les suivants :

a) M est l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels et $\underline{M}$ l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbf{R}$; une mesure spectrale sur $\mathbf{R}$ est la mesure spectrale d'un opérateur auto-adjoint bien déterminé dans $\underline{K}$. On peut donc identifier une variable quantique réelle à un opérateur auto-adjoint, borné ou non.

b) Plus généralement, une variable quantique dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$ est définie par une suite $X = (X_1, \ldots, X_d)$ d'opérateurs auto-adjoints dans $\underline{K}$, commutant deux à deux (au sens fort : les projecteurs spectraux commutent).

Soit X une variable quantique à valeurs dans $(M, \underline{M})$ et soit $L^\infty(M, \underline{M})$ l'algèbre à involution des fonctions complexes mesurables et bornées sur $(M, \underline{M})$. Il existe un homomorphisme φ_X de $L^\infty(M, \underline{M})$ dans l'algèbre à involution des opérateurs bornés dans $\underline{K}$, et un seul, qui transforme en $E_X(A)$ l'indicatrice I_A d'un ensemble $A \in \underline{M}$. On écrit $f(X)$ pour $\varphi_X(f)$; lorsque f est une fonction réelle mesurable sur $(M, \underline{M})$, non nécessairement bornée, on peut encore définir l'opérateur auto-adjoint $f(X)$ (calcul fonctionnel).

2.2. Principe de Dirac.

On utilise souvent la version suivante du théorème de décomposition spectrale. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints dans $\underline{K}$, commutant deux à deux. Il existe alors une variable quantique X à valeurs dans un espace mesurable $(M, \underline{M})$ et une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions mesurables réelles sur $(M, \underline{M})$ engendrant la tribu $\underline{M}$ et telles que $X_i = f_i(X)$ pour tout $i \in I$. Si $\underline{K}$ est séparable, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'algèbre des opérateurs bornés qui commutent à chaque X_i est commutative ;

b) il existe un vecteur d'état a générateur au sens suivant : il n'existe aucun sous-espace de Hilbert de $\underline{K}$ distinct de $\underline{K}$ qui contienne a et qui réduise chaque X_i ;

c) il existe une mesure σ-finie μ sur $(M, \underline{M})$ et un isomorphisme d'espaces de Hilbert $\varphi : \underline{K} \to L^2(M, \mu)$ qui transforme pour tout $i \in I$ l'opérateur X_i en la multiplication par f_i.

Si ces conditions sont remplies, on dit que X ou que la famille $(X_i)_{i \in I}$ est complète ; alors φ transforme $f(X)$ en l'opérateur de multiplication par f, et en particulier $E_X(A)$ en la multiplication par I_A. Soit a un vecteur générateur et prenons en particulier pour μ la mesure de probabilité $m_{a,X}$;

on peut normaliser φ par $\varphi(a) = 1$, d'où $\varphi^{-1}(f) = f(X).a$ pour f dans $L^{\infty}(M , \underline{M})$.

Dans les ouvrages de Physique, le résultat précédent est connu sous le nom de principe de Dirac : des variables quantiques sont simultanément observables si et seulement si elles commutent deux à deux ; si l'on a une famille complète $(X , X' , X'' , \ldots)$ de variables quantiques simultanément observables, on peut représenter les vecteurs d'états comme des fonctions $a(x , x' , x'' , \ldots)$ (notées traditionnellement $\langle x , x' , x'' \ldots | a \rangle$) des valeurs prises par ces variables quantiques.

2.3. Quantification d'un système mécanique.

Considérons un système mécanique dont l'espace de configuration est un espace vectoriel réel M de dimension finie. L'espace des phases associé est le fibré cotangent à la variété M , qu'on peut identifier à $M \times N$, où N est l'espace vectoriel dual de M ; la dualité entre M et N se désigne par $\langle q , p \rangle$ pour $q \in M$, $p \in N$.

En Mécanique quantique, on introduit alors un espace de vecteurs d'état $\underline{K}$ et deux variables quantiques : Q à valeurs dans M et P à valeurs dans N , représentant la position et le moment du système. Pour a dans M et b dans N , on peut donc définir les opérateurs auto-adjoints $\langle a , P \rangle$ et $\langle Q , b \rangle$ et les opérateurs unitaires $e^{i\langle a , P \rangle}$ et $e^{i\langle Q , b \rangle}$. On impose les relations de commutation suivantes :

a) forme globale (H. Weyl) : $e^{i\langle a , P \rangle} e^{i\langle Q , b \rangle} = e^{i\langle a , b \rangle} e^{i\langle Q , b \rangle} e^{i\langle a , P \rangle}$;

b) forme infinitésimale (Heisenberg) : $[\langle a , P\rangle , \langle Q , b\rangle] = -i\langle a , b\rangle$ ([1]) .
Si les relations de Weyl sont satisfaites, il existe un sous-espace dense $\underline{D}$ de $\underline{K}$, stable par les opérateurs $\langle a , P\rangle$ et $\langle Q , b\rangle$, et tel que la restriction de chacun de ces opérateurs à $\underline{D}$ soit essentiellement auto-adjointe ; de plus, les relations d'Heisenberg sont satisfaites sur $\underline{D}$. La réciproque n'est pas vraie sans hypothèse supplémentaire, bien que l'on puisse déduire formellement les relations de Weyl de celles d'Heisenberg. Dans les discussions rigoureuses, il convient donc de préférer la forme de Weyl des relations de commutation.

Faisons désormais l'hypothèse d'irréductibilité : il n'existe aucun sous-espace de Hilbert de $\underline{K}$, distinct de $\underline{K}$, et réduisant les opérateurs $\langle a , P\rangle$ et $\langle Q , b\rangle$. Cette hypothèse exclut toute structure interne des particules, et en particulier le spin . Notons α_M une mesure de Haar sur M et α_N la mesure duale sur N . D'après le théorème de Stone - von Neumann, il existe deux isomorphismes d'espaces de Hilbert

$$\varphi_Q : \underline{K} \to L^2(M , \alpha_M) \quad , \quad \varphi_P : \underline{K} \to L^2(N , \alpha_N)$$

avec les propriétés suivantes :

a) φ_Q transforme l'opérateur $f(Q)$ en la multiplication par f pour toute fonction f dans $L^\infty(M)$;

([1]) Lorsque $M = \mathbf{R}^d$, on peut identifier aussi N à $\mathbf{R}^d$ de sorte que $\langle q , p\rangle = \sum_{j=1}^{d} q_j p_j$; alors Q est une suite $(Q_1,\ldots,Q_d)$ d'opérateurs auto-adjoints et de même $P = (P_1,\ldots,P_d)$. Les relations de commutation prennent alors la forme usuelle

$$[Q_j , Q_k] = [P_j , P_k] = 0 \quad , \quad [P_j , Q_k] = -i\delta_{jk} \ .$$

b) propriété analogue à a) pour P ;

c) soient a dans $\underline{K}$, $f = \varphi_Q(a)$ et $g = \varphi_P(a)$; alors f et g sont transformées de Fourier l'une de l'autre (on note d la dimension de M) :

(7) $$f(q) = (2\pi)^{-d/2} \int g(p).e^{i\langle q\,,\,p\rangle} dp \quad , \quad g(p) = (2\pi)^{-d/2} \int f(q).e^{-i\langle q\,,\,p\rangle} dq \ .$$

De plus, φ_Q et φ_P sont définis à la multiplication près par un scalaire de module 1 .

La dynamique quantique du système est décrite par la donnée de la position $Q(t)$ et du moment $P(t)$ à chaque instant t ; pour tout t, ces variables quantiques satisfont aux relations de commutation de Weyl, et l'on fait l'hypothèse d'irréductibilité qui entraîne que chacune des variables quantiques $Q(t)$ et $P(t)$ est complète. Le caractère le plus original de la Mécanique quantique est que $Q(t)$ et $P(t)$ ne sont pas simultanément observables, non plus qu'en général $Q(t)$ et $Q(t')$ pour $t \neq t'$. Nous supposerons le système stationnaire et que $Q(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions fortement continues de t. Posons $P = P(0)$ et $Q = Q(0)$; en utilisant le théorème de Stone - von Neumann cité plus haut et le théorème de Stone sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires, on démontre l'existence d'un opérateur auto-adjoint H , l'hamiltonien du système, tel que l'on ait

(8) $$Q(t) = e^{itH} Q\, e^{-itH} \quad , \quad P(t) = e^{itH} P\, e^{-itH} \ .$$

L'hamiltonien n'est défini qu'à une constante additive près par ces conditions. Pour obtenir un résultat intrinsèque, on peut introduire l'algèbre $\underline{A}$ des opérateurs bornés dans $\underline{K}$ et le groupe à un paramètre d'automorphismes V_t de $\underline{A}$ par

(9) $$V_t(A) = e^{itH} A\, e^{-itH} \ .$$

On interprète $V_t(A)$ comme la valeur à l'instant t de la variable quantique égale à A pour $t = 0$.

2.4. L'oscillateur harmonique.

Dans tous les exemples usuels de Mécanique quantique non relativiste, l'hamiltonien est de la forme $H = T(P) + V(Q)$, où T est une forme quadratique définie positive sur N (énergie cinétique) et V une fonction sur M (potentiel). L'oscillateur harmonique est le système pour lequel V est une forme quadratique définie positive sur M . Nous identifierons $\underline{K}$ à $L^2(M, \alpha_M)$ par φ_Q (théorème de Stone - von Neumann), et nous noterons $\underline{S}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur M (espace de Schwartz).

Pour tout a dans M , l'opérateur $\langle a, P\rangle$ est essentiellement auto-adjoint sur $\underline{S}$; c'est un opérateur de dérivation transformant $u \in \underline{S}$ en $-i\frac{d}{dt}u(q+t.a)\big|_{t=0}$. Pour tout b dans N , l'opérateur $\langle Q, b\rangle$ est essentiellement auto-adjoint dans $\underline{S}$; il agit par multiplication par la fonction $\langle q, b\rangle$. De plus, les opérateurs $\langle a, P\rangle + \langle Q, b\rangle$ et H sont essentiellement auto-adjoints sur $\underline{S}$.

La théorie de l'oscillateur harmonique va être résumée sous une forme qui se prêtera aux généralisations ultérieures :

a) Relations de commutation : On pose $E = M \oplus N$; on définit une forme bilinéaire alternée B sur $E \times E$ par

(10) $\quad B(z, z') = \langle a, b'\rangle - \langle a', b\rangle \quad$ pour $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$.

Pour tout $z = (a, b)$ dans E , on note $h(z)$ l'opérateur $\langle a, P\rangle + \langle Q, b\rangle$ sur $\underline{S}$; on a alors

(11) $\quad [h(z), h(z')] = -i.B(z, z')$.

Comme $h(z)$ est essentiellement auto-adjoint, on peut définir l'opérateur unitaire $W(z) = e^{ih(z)}$; les relations de Weyl prennent la forme

(12) $\quad W(z).W(z') = e^{iB(z, z')/2}\, W(z + z')$.

b) Equations d'évolution : On note $(\ , \ )_V$ la forme bilinéaire symétrique réelle sur $M \times M$ telle que $V(a) = \frac{1}{2}(a \ , a)_V$: on définit de manière analogue $(\ , \ )_T$ sur N . Il existe deux applications linéaires C de M dans N et C' de N dans M caractérisées par les relations

$$(13) \qquad (a \ , a')_V = \langle a \ , Ca' \rangle \quad , \quad (b \ , b')_T = \langle C'b \ , b' \rangle$$

pour a , a' dans M et b , b' dans N . L'équation d'évolution est alors

$$(14) \qquad \dot{Q} = C'.P \quad , \quad \dot{P} = -C.Q$$

sous forme infinitésimale. Introduisons l'opérateur Λ dans E par

$$(15) \qquad \Lambda z = (C'b \ , -Ca) \qquad \text{pour} \quad z = (a \ , b) \ ;$$

on a alors les équations d'évolution

$$(16) \qquad \widehat{\dot{h}(z)} = h(\Lambda z) \quad , \quad V_t\{W(z)\} = W(e^{t\Lambda}z) \ .$$

c) Etat fondamental : On montre que l'hamiltonien H est diagonalisable (i.e. à spectre discret). Après ajustement de la constante additive arbitraire dans H , on peut supposer que H est positif et qu'il existe un vecteur d'état Ψ_o (essentiellement unique) annulé par H . On a (avec une constante $c > 0$ convenable)

$$(17) \qquad \Psi_o(q) = c \exp - V((C'C)^{-\frac{1}{4}} q) \qquad (q \in M)$$

(où $(C'C)^{-\frac{1}{4}}$ a un sens car $C'C$ est un opérateur symétrique positif dans M muni de la forme quadratique V). On définit une forme quadratique définie positive Q sur E par

$$(18) \qquad Q(z) = V((C'C)^{-\frac{1}{4}} a) + T((CC')^{-\frac{1}{4}} b) \qquad \text{pour} \quad z = (a \ , b) \ .$$

On a alors

$$(19) \qquad (\Psi_o | W(z) \Psi_o) = \exp - \frac{1}{2} Q(z) \qquad \text{pour} \quad z \ \text{dans} \ E \ .$$

d) Structure complexe sur E : On démontre qu'il existe sur E un opérateur J et un seul qui satisfasse aux relations

(20) $J^2 = -1$, $B(Jz, Jz') = B(z, z')$, $Q(z) = B(z, Jz)$

pour z et z' dans E . On peut alors considérer E comme un espace vectoriel complexe dans lequel J est la multiplication par i . De plus, on définit sur E un produit scalaire hermitien défini positif caractérisé par les relations

(21) $(z|z) = Q(z)$, $B(z, z') = \mathrm{Im}(z|z')$.

Autrement dit, E est un espace de Hilbert complexe de dimension finie et $i\Lambda$ est un opérateur auto-adjoint dans E .

§ 3. Théorie quantique des champs

3.1. Le champ libre.

L'analogie entre les formules heuristiques (3) et (4) et la théorie de l'oscillateur harmonique suggère la procédure suivante. Notons M et N deux copies de l'espace de Schwartz $\underline{S}(\mathbf{R}^3)$ des fonctions réelles à décroissance rapide sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. On met M et N en dualité par la forme bilinéaire

(22) $\langle u, v \rangle = \int uv \, dx$

et l'on définit des formes quadratiques définies positives V sur M et T sur N par

(23) $V(u) = \frac{1}{2}\int \{ \sum_{i=1}^{3} (\partial_i u)^2 + m^2 u^2 \} \, dx$, $T(v) = \frac{1}{2}\int v^2 \, dx$.

On pose encore $E = M \oplus N$ et l'on définit la forme bilinéaire alternée B sur $E \times E$ par (10), d'où

(24) $B(z, z') = \int (uv' - u'v) \, dx$ pour $z = (u, v)$ et $z' = (u', v')$.

Si l'on définit encore les opérateurs C et C' comme dans (13), on a

(25) $Cu = -\Delta u + m^2 u$, $C'v = v$.

Soit E^* l'espace des solutions réelles φ de l'équation de Klein-Gordon (1) telles que la fonction $x \longmapsto \varphi(x, t)$ appartienne à $\underline{S}(\mathbb{R}^3)$ pour tout t. L'application $\varphi \longmapsto (\varphi(x, 0), \partial_o\varphi(x, 0))$ est un isomorphisme γ de E^* sur E ; d'après (25), elle transforme ∂_o en l'opérateur Λ sur E. Par ailleurs, l'équation de Klein-Gordon peut se résoudre par transformation de Fourier. En effet, notons X l'ensemble des vecteurs $(k_o, k_1, k_2, k_3) = (k_o, k)$ tels que $k_o^2 - k.k = m^2$ et $k_o > 0$ (on pose $x.y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$) ; il existe sur X une mesure μ invariante par le groupe de Lorentz, que l'on peut normaliser de sorte que l'on ait

$$(26) \qquad \int_X f d\mu = \tfrac{1}{2}\int (k.k + m^2)^{-\frac{1}{2}} f((k.k + m^2)^{\frac{1}{2}}, k)\, dk .$$

Soit $\underline{S}(X)$ l'espace préhilbertien des fonctions complexes sur X qui se prolongent en une fonction de $\underline{S}(\mathbb{R}^4)$, avec le produit scalaire $\int \bar{f} g\, d\mu$: on définit un isomorphisme d'espaces vectoriels réels $\delta : \underline{S}(X) \to E^*$ qui associe à une fonction f la partie réelle de la transformée de Fourier de la mesure $f.\mu$. Alors, l'isomorphisme $\gamma\delta$ de $\underline{S}(X)$ sur E permet de transporter à E la structure préhilbertienne de $\underline{S}(X)$; elle est caractérisée par les conditions énoncées dans 2.4, d) et ne dépend donc que de la dualité entre M et N et des formes quadratiques V et T.

La construction du champ libre consiste à définir les objets suivants :

a) un espace de Hilbert $\underline{K}$;

b) un vecteur Ψ_o de norme 1 dans $\underline{K}$;

c) une application W de $E = M \oplus N$ dans l'ensemble des opérateurs unitaires de $\underline{K}$;

d) un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires U_t dans $\underline{K}$.

Ces données doivent satisfaire aux formules (12) et (19) et $W(t.z)$ doit être

une fonction fortement continue du paramètre réel t ; de plus, on a $U_t^{-1}W(z)U_t = W(e^{t\Lambda}z)$.

Voici l'interprétation de ces objets. L'état défini par Ψ_o est le vide ; l'hamiltonien libre est l'opérateur auto-adjoint H_o tel que $U_t = e^{-itH_o}$; enfin, si l'on note $h(z)$ l'opérateur auto-adjoint tel que $W(t.z) = e^{ith(z)}$ pour tout t réel, on a symboliquement

$$(27) \qquad h(z) = \int u(x).\pi(x,0)\,dx + \int v(x).\varphi(x,0)\,dx \qquad \text{pour } z = (u,v) .$$

Le champ à l'instant t est défini par

$$(28) \qquad \varphi(x,t) = U_t^{-1}\varphi(x,0)U_t \quad , \quad \pi(x,t) = U_t^{-1}\pi(x,0)U_t .$$

On connait actuellement deux constructions du champ libre. La première est celle de Fock, mise sous forme rigoureuse par Cook [1] ; elle n'utilise que la structure d'espace préhilbertien de E et construit $\underline{K}$ par complétion de l'algèbre symétrique de E . Elle est particulièrement adaptée à l'étude de l'aspect "corpusculaire", et donne une construction simple de U_t (donc de H_o) comme extension à l'algèbre symétrique de l'automorphisme $e^{t\Lambda}$ de E ; malheureusement, la définition des puissances de Wick n'y est pas commode

La deuxième méthode de construction du champ libre est due à Segal [8]. On construit $\underline{K}$ comme l'espace L^2 associé à une mesure de probabilité gaussienne ν sur le dual $\underline{S}'$ de $\underline{S}$; l'opérateur de champ $\Phi(v) = \int v(x).\varphi(x,0)\,dx$ est simplement la multiplication par la fonctionnelle $T \longmapsto T(v)$ sur $\underline{S}'$. La construction des puissances de Wick est tout à fait analogue à celle des intégrales multiples de Wiener-Ito. La construction de H_o n'est pas facile, mais le point fondamental, découvert par Nelson, est que le semi-groupe d'opérateurs e^{-tH_o} (pour $t > 0$) est le semi-groupe de transition d'un processus markovien se déroulant dans $\underline{S}'$. On en déduit des propriétés de régularité très fortes des opérateurs e^{-tH_o} dans $\underline{K}$; en particulier, cet opérateur est une con-

traction dans $L^1(\underline{S}', \nu)$ et définit un opérateur borné de L^2 dans L^4 pour t assez grand.

3.2. Interaction de champ.

La méthode employée aussi bien par Glimm et Jaffe que par Segal consiste à remplacer l'hamiltonien d'interaction $g \int : \varphi(x, 0)^4 : dx$ (qui n'existe pas) par une forme tronquée $H_i(g) = \int g(x) : \varphi(x, 0)^4 : dx$ où $g(\ .\ )$ est une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^3$. Dans la représentation de Segal, $H_i(g)$ est la multiplication par une fonction mesurable $V(g)$ sur $\underline{S}'$, et l'on a $V(g) \in L^p(\underline{S}', \nu)$ pour p assez grand et $e^{-tV(g)}$ est ν-intégrable pour tout $t > 0$ mais seulement à deux dimensions d'espace-temps. Ces propriétés ont suffi à Segal (et aussi à Simon et Hoegh-Krohn) pour montrer que $H_o + H_i(g)$ est essentiellement auto-adjoint ; soit $H(g)$ la fermeture de $H_o + H_i(g)$.

Il "reste" à faire tendre la fonction $g(\ .\ )$ vers la constante g. On n'a pas de limite de $H(g)$ lui-même, mais on peut définir une C^*-algèbre $\underline{A}$ d'opérateurs dans $\underline{K}$ et montrer que la limite de $e^{itH(g)} A e^{-itH(g)}$ existe pour tout A dans $\underline{A}$ et tout t réel. Pour cela, on utilise le fait bien connu qu'une équation hyperbolique ne permet pas une propagation à vitesse infinie des perturbations. C'est là l'idée essentielle de Segal [10].

Pour définir l'hamiltonien H lui-même, il faut "renormaliser" $\underline{K}$; cela signifie qu'il faut construire une forme linéaire positive τ sur la C^*-algèbre $\underline{A}$, qui joue le rôle de valeur moyenne dans le vide. C'est ensuite un jeu d'enfant de construire un nouvel espace de Hilbert $\underline{K}_{ren}$, une application W_{ren} de E dans l'ensemble des opérateurs unitaires de $\underline{K}_{ren}$ et un vecteur

d'état Ψ_o dans $\underline{K}_{ren}$ tels que $\tau(W(z)) = (\Psi_o | W_{ren}(z).\Psi_o)$ pour tout z dans E. Ce programme a été rempli par Glimm et Jaffe [3] ; mais ces auteurs n'ont établi ni l'unicité de τ, ni une forme satisfaisante de l'invariance de la théorie par le groupe de Lorentz (les constructions font jouer un rôle particulier au temps).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. COOK - The mathematics of second quantization, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), p. 222-245.

[2] J. GLIMM and A. JAFFE - Singular perturbations of self adjoint operators, Comm. Pure Appl. Math., 22 (1969), p. 401-414.

[3] J. GLIMM and A. JAFFE - A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory without cutoffs : I, Phys. Rev., 176 (1968), p. 1945-1951 ; II, Annals of Maths, 91 (1970), p. 362-401 ; III, Acta Math., 125 (1970), p. 203-268.

[4] J. GLIMM and A. JAFFE - Boson fields with non-linear self-interaction in two dimensions, Comm. Math. Phys., 8 (1968), p. 12-25.

[5] J. GLIMM - Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, Comm. Math. Phys., 5 (1967), p. 343-386.

[6] B. SIMON and R. HOEGH-KROHN - Hypercontractive semi-groups and two-dimensional self-coupled Bose fields, à paraître.

[7] E. NELSON - A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical theory of Elementary Particules, R. Goodman et I. Segal, editors, MIT Press, Cambridge 1966.

[8] I. SEGAL - Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom, Mat.-Fys. Medd. Kong. Danske Vides. Selskab, 31 (1959), n° 12.

[9] I. SEGAL - Nonlinear functions of weak processes : I, Journ. Funct. Anal., 4 (1969), p. 404-457 ; II, Journ. Funct. Anal., 6 (1970), p. 29-75.

[10] I. SEGAL - Notes toward the construction of nonlinear relativistic quantum fields : I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57 (1967), p. 1178-1183 ; II, Bull. A.M.S., 75 (1969), p. 1383-1389 ; III, ibid., p. 1390-1395.

[11] I. SEGAL - Construction of nonlinear local quantum processes : I, Ann. of Maths, 92 (1970), p. 462-481.