SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ADRIEN DOUADY

Prolongement de faisceaux analytiques cohérents

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 366, p. 39-54

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__39_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 366 Novembre 1969

PROLONGEMENT DE FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

(Travaux de TRAUTMANN, FRISCH-GUENOT et SIU)

par Adrien DOUADY

1. Faisceaux prolongeables.

Soient X un espace analytique complexe, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique et $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $X - Z$. Notons i l'injection canonique de $X - Z$ dans X. On dit que $\underline{E}$ est prolongeable s'il existe un faisceau cohérent sur X qui prolonge $\underline{E}$. C'est le cas notamment si le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.

Les problèmes de prolongeabilité sont propres à la géométrie analytique : en géométrie algébrique, tous les faisceaux cohérents sont prolongeables [2].

Exemples. 1) Le faisceau $\underline{O}_{X-Z}$ est prolongeable. Si Z est de codimension 1, le faisceau $i_*\underline{O}_{X-Z}$ n'est pas cohérent. Si X est normal et Z de codimension ≥ 2, on a $i_*\underline{O}_{X-Z} = \underline{O}_X$, donc $i_*\underline{O}_{X-Z}$ est cohérent.

2) Pour tout point a, on note $\mathbf{C}_a$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en a et 0 ailleurs. Si (a_n) est une suite de points de X tendant vers un point de Z, le faisceau $\Sigma\, \mathbf{C}_{a_n}$ est cohérent mais non prolongeable.

3) Prenons $X = \mathbf{C}^2$ et $Z = \{0\}$. Posons $U_1 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : x \neq 0\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : y \neq 0\}$. Le faisceau localement libre $\underline{E}$ obtenu en recollant $\underline{O}_{U_1}$ et $\underline{O}_{U_2}$ par multiplication par $e^{\frac{1}{xy}}$ sur $U_1 \cap U_2$ n'est pas prolongeable. En effet,

supposons que $\underline{F}$ soit un faisceau cohérent prolongeant $\underline{E}$. Quitte à remplacer $\underline{F}$ par son bidual, on peut supposer $\underline{F}$ réflexif. Mais il résulte du théorème des syzygies que, sur $\mathbf{C}^2$, tout faisceau réflexif est localement libre, donc il existe un bidisque ouvert V de centre 0 dans X tel que $\underline{E}_{V-Z}$ soit libre. D'autre part, l'élément défini par $\frac{1}{xy} \in \underline{O}(U_{1,2})$ dans $H^1(V - Z , (U_i)_{i=1,2} ; \underline{O})$ n'est pas nul, donc son image par exp n'est pas triviale car dans la suite exacte

$H^1(V - Z ; \mathbf{Z}) \xrightarrow{2i\pi} H^1(V - Z ; \underline{O}) \xrightarrow{\exp} H^1(V - Z ; \underline{O}^*)$ on a $H^1(V - Z ; \mathbf{Z}) = 0$, d'où contradiction.

4) Prenons $X = \mathbf{C}^3$ et $Z = \{0\}$. Il existe sur $X - Z$ un faisceau localement libre prolongeable qui n'admet aucun prolongement localement libre. En effet, soit $\mathbf{C}_o$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en 0 et 0 ailleurs, soit $0 \to \underline{L}_3 \to \underline{L}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{L}_o \to \mathbf{C}_o \to 0$ une résolution de $\mathbf{C}_o$, soit $\underline{F}$ l'image de $\underline{L}_2$ dans $\underline{L}_1$ et posons $\underline{E} = \underline{F}|_{X-Z}$. Le faisceau $\underline{E}$ est localement libre et $\underline{F}$ est de profondeur 2 , donc $\underline{F} = i_*\underline{E}$ d'après le cor. de la prop. 3 ci-dessous. Si $\underline{E}$ admettait un prolongement localement libre $\underline{F}'$, on aurait $\underline{F}' = i_*\underline{E}$, d'où $\underline{F}' = \underline{F}$ et prof $\underline{F} = 3$, ce qui n'est pas.

Dans [8], Serre donne un premier critère de prolongeabilité :

THÉORÈME 1.- *Si X est normal, Z partout de codimension ≥ 2 et $\underline{E}$ sans torsion, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.*

(ii) *Le faisceau $\underline{E}$ est prolongeable.*

(iii) *Pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que la restriction de $\underline{E}$ à $U - (Z \cap U)$ soit engendrée par ses sections.*

L'inconvénient de ce critère est que la condition (iii) n'est pas locale sur

$X - Z$. Dans [8], Serre posait la question de trouver des critères de prolongeabilité plus utilisables.

2. Profondeur.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U . Pour tout $x \in U$, on note $\mathrm{Tordim}_x \underline{F}$ le plus petit k tel qu'il existe une résolution libre $0 \to \underline{L}_k \to \ldots \to \underline{L}_o \to \underline{F} \to 0$ de $\underline{F}$ au voisinage de x . C'est aussi le plus grand k tel que $\mathrm{Tor}_k^{\underline{O}_x}(\underline{F}_x, \mathbb{C}) \neq 0$.

Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et $x \in X$. Soit φ un plongement d'un voisinage de x dans X dans un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{C}^n$; l'entier $n - \mathrm{Tordim}_{\varphi(x)} \varphi_* \underline{F}$ ne dépend pas du choix de φ , on l'appelle profondeur de $\underline{F}$ en x et on le note $\mathrm{prof}_x \underline{F}$. C'est aussi le plus grand entier p tel qu'il existe un morphisme π d'un voisinage de x dans X dans $\mathbb{C}^p$ tel que $\underline{F}$ soit π-plat. On pose $\mathrm{prof}\, \underline{F} = \inf_{x \in X} \mathrm{prof}_x \underline{F}$.

Pour tout k , notons $S_k(\underline{F})$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathrm{prof}_x \underline{F} \leq k$. C'est un sous-ensemble analytique de X , de dimension $\leq k$. On dit que $\underline{F}$ vérifie la condition (s_k) si l'on a

(s_k) $\qquad \dim S_k(\underline{F}) \leq k - 2$.

3. Enoncé des résultats.

Frisch-Guenot [6] et Siu [9] ont obtenu indépendamment et simultanément le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- *Soient X un espace analytique complexe, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique de dimension $\leq p$ et $\underline{E}$ un faisceau cohérent sur $X - Z$. Supposons que $\underline{E}$*

vérifie (s_k) pour $k \leq p + 2$. Alors i_*E est cohérent et vérifie (s_k) pour $k \leq p + 2$.

En particulier, on voit que tout faisceau de profondeur $\geq \dim Z + 3$ est prolongeable.

Trautmann avait démontré ce résultat dans le cas particulier où Z est de dimension 0 . Les deux démonstrations du Théorème 2 utilisent ce cas particulier.

Nous allons indiquer la démonstration du résultat de Trautmann, puis, très sommairement, celle du Théorème 2 par la méthode de Frisch-Guenot.

4. Cohomologie d'une couronne.

Si E est un espace vectoriel topologique, notons ${}^tE$ son dual. Si X est un espace analytique séparé à base dénombrable, pour tout faisceau analytique cohérent $\underline{F}$ sur X , on définit sur $H^i(X ; \underline{F})$ une topologie (non nécessairement séparée) en identifiant $H^i(X ; \underline{F})$ à $H^i(X , \underline{U} ; \underline{F})$, où $\underline{U}$ est un recouvrement ouvert de Stein dénombrable ; cette topologie ne dépend pas du choix de $\underline{U}$. C'est aussi la topologie que l'on obtient en prenant une résolution fine $\underline{R}^\cdot$ de $\underline{F}$ telle que, pour tout ouvert U de X , les espaces $\underline{R}^i(U)$ soient des Fréchets. Nous noterons $\hat{H}^i(X ; \underline{F})$ le séparé de $H^i(X ; \underline{F})$; c'est un Fréchet. Si $H^i(X ; \underline{F})$ est de dimension finie, il est séparé.

PROPOSITION 1 (Dualité de Serre).- *Soient X une variété analytique de dimension n séparée à base dénombrable et $\underline{M}$ un faisceau localement libre sur X . Si $H^{i+1}(X ; \underline{M})$ est séparé, on a $H^{n-i}_{comp}(X ; \underline{M}') = {}^tH^i(X ; \underline{M})$, où $\underline{M}' = \underline{Hom}(\underline{M} ; \underline{K})$, où $\underline{K}$ est le faisceau des formes différentielles analytiques de degré n .*

Démonstration. Notons $\underline{R}^i$ le faisceau sur X des formes différentielles de type $(0,1)$ de classe C^∞ à valeurs dans le fibré M associé à $\underline{M}$, et $\underline{S}^j$ le faisceau

des courants de type $(0,j)$ à valeurs dans $\underline{M}'$. On a des résolutions fines $\underline{R}^\cdot$ de $\underline{M}$ et $\underline{S}^\cdot$ de $\underline{M}'$, les $\underline{R}^i(X)$ sont des Fréchets et $H^o_{comp}(X ; \underline{S}^{n-i}) = {}^t\underline{R}^i(X)$. Si $H^{i+1}(X ; \underline{M})$ est séparé, $d^i : \underline{R}^i(X) \to \underline{R}^{i+1}(X)$ est un morphisme strict et $H^{n-i}_{comp}(X ; \underline{M}') = H_i({}^t\underline{R}^\cdot(X)) = {}^tH^i(R^\cdot(X)) = {}^tH^i(X ; \underline{M})$, cqfd.

Une norme ayant été choisie sur $\mathbf{C}^n$, notons D_a la boule fermée de rayon a dans $\mathbf{C}^n$. Pour $0 \leq a < b$, posons $R_{a,b} = \overset{\circ}{D}_b - D_a$. Si K est un compact de $\mathbf{C}^n$, on pose $H^i_K(\underline{F}) = H^i_K(U ; \underline{F})$ (cohomologie à support dans K), où U est un voisinage quelconque de K .

PROPOSITION 2.- On a

$$H^i_{D_a}(\underline{O}) = \begin{cases} {}^t\underline{O}(D_a) & \text{pour } i = n \\ 0 & \text{pour } i < n \ . \end{cases}$$

Démonstration. Pour $b > a$, on a $H^i_{comp}(\overset{\circ}{D}_b ; \underline{O}) = {}^t\underline{O}(\overset{\circ}{D}_b)$ pour $i = n$ et 0 pour $i \neq n$ par dualité de Serre. Le résultat s'en déduit par passage à la limite projective. Pour justifier ce passage, il suffit de montrer que $H^i(\mathbf{C}^n - D_a ; \underline{O}) = \varprojlim_{b > a} H^i(\mathbf{C}^n - \overset{\circ}{D}_b ; \underline{O})$, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 1.- Soient X un espace paracompact, (X_n) une suite de fermés de X telle que $X_n \subset \overset{\circ}{X}_{n+1}$ pour tout n et $X = \bigcup X_n$ et soit $\underline{F}$ un faisceau sur X . L'application canonique $H^i(X ; \underline{F}) \to \varprojlim H^i(X_n ; \underline{F})$ est surjective. Elle est bijective si $H^{i-1}(X_{n+1} ; \underline{F}) \to H^{i-1}(X_n ; \underline{F})$ est surjective pour tout n .

COROLLAIRE (Frenkel [4]).- Supposons $n \geq 2$. On a :

$$H^i(R_{a,b} ; \underline{O}) = \begin{cases} {}^t\underline{O}(D_a) & \text{pour } i = n - 1 \\ \underline{O}(\overset{\circ}{D}_b) & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } 0 < i < n - 1 \ . \end{cases}$$

Démonstration : résulte de la suite exacte

$$H^i_{D_a}(\underline{O}) \to H^i(\overset{\circ}{D}_b ; \underline{O}) \to H^i(R_{a,b} ; \underline{O}) \to H^{i+1} \quad \dots \quad .$$

PROPOSITION 3.- Soient $z \in \mathbb{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de z . Posons $Z = \{z\}$. On a

$$H^i_Z(\underline{F}) \begin{cases} = 0 & \text{pour } i < \operatorname{prof}_z \underline{F} \\ \neq 0 & \text{pour } i = \operatorname{prof}_z \underline{F} \end{cases} .$$

Démonstration. Posons $p = \operatorname{prof}_z \underline{F}$.

(a) Cas $p = \infty$; on a $\underline{F}_z = 0$, c'est trivial.

(b) Cas $p = n$; on a $\underline{F} \approx \underline{O}^r$ au voisinage de z , avec $r \neq 0$, d'où $H^i_Z(\underline{F}) \approx {}^t\underline{O}^r_z$ pour $i = n$ et $= 0$ pour $i < n$ d'après la prop. 2.

(c) Cas $p = n - 1$. Soit $0 \to \underline{O}^r \xrightarrow{d} \underline{O}^s \to \underline{F} \to 0$ une résolution de $\underline{F}$ minimale en z , i. e. telle que les coefficients de la matrice d appartiennent à $\underline{m}_z$. Pour $i < n - 1$, la suite exacte $H^i_Z(\underline{O}^s) \to H^i_Z(\underline{F}) \to H^{i+1}_Z(\underline{O}^r)$ donne $H^i_Z(\underline{F}) = 0$. L'application $H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ définie par d n'est pas injective. En effet, c'est l'application ${}^t\underline{O}^r_z \to {}^t\underline{O}^s_z$ définie par la matrice d , et son noyau contient les éléments de la forme $(a_1\delta, \dots, a_r\delta)$, où $\delta \in {}^t\underline{O}_z$ est la mesure de Dirac, et $r \neq 0$ car sinon $\operatorname{prof}_z \underline{F} = n$. La suite exacte $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \to H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ montre que $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \neq 0$.

(d) Cas $p < n - 1$. Soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte au voisinage de z , où $\underline{L}$ est libre. On a $H^i_Z(\underline{F}) = H^{i+1}_Z(\underline{F}_1)$ pour $i < n - 1$, d'où le résultat par récurrence descendante sur p .

COROLLAIRE.- Soient X un espace analytique, $z \in \dot{X}$, notons i l'injection canonique de $X - \{z\}$ dans X et soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Pour que

$\underline{F} = i_* i^* \underline{F}$, il faut et il suffit que $\operatorname{prof}_z \underline{F} \geq 2$.

Démonstration. Pour U voisinage ouvert de Stein de z dans X , on a une suite exacte : $0 \to H^0_Z(\underline{F}) \to H^0(U ; \underline{F}) \to H^0(U - Z ; \underline{F}) \to H^1_Z(\underline{F}) \to 0$, où $Z = \{z\}$, qui montre que $\underline{F}(U) \to \underline{F}(U - Z)$ est un isomorphisme si et seulement si la profondeur de $\underline{F}$ n'est ni 0 ni 1 .

PROPOSITION 4 (Andreotti-Grauert [1]).- Soient a , b , a' , b' tels que $0 \leq a < a' < b' < b$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $R_{a,b}$.

(a) L'application $H^1(R_{a,b} ; \underline{F}) \to H^1(R_{a,b'} ; \underline{F})$ est surjective ; on a $\hat{H}^1(R_{a,b} ; \underline{F}) = \hat{H}^1(R_{a,b'} ; \underline{F})$ et $H^i(R_{a,b} ; \underline{F}) = H^i(R_{a,b'} ; \underline{F})$ pour $i > 1$.

(b) L'application $H^i(R_{a,b} ; \underline{F}) \to H^i(R_{a',b} ; \underline{F})$ est bijective pour $i < \operatorname{prof} \underline{F} - 1$ et injective pour $i = \operatorname{prof} \underline{F} - 1$.

(c) L'espace $H^i(R_{a,b'} ; \underline{F})$ est de dimension finie pour $1 \leq i \leq \operatorname{prof} \underline{F} - 2$.

LEMME 2 (I. Furoncoli).- Soient a , c , c' tels que $0 \leq a < c \leq c'$. Il existe une suite finie $(C_0, \ldots, C_N)$ d'ouverts convexes telle que $\overset{\circ}{D}_c = C_0 \subset \ldots \subset C_N = \overset{\circ}{D}_{c'}$ et que $\overline{C_k - C_{k-1}}$ puisse être séparé de D_a par un hyperplan réel.

(En termes imagés : "suffisamment de piqûres de moustiques provoquent un oedème".)

Démonstration du lemme dans le cas euclidien. On peut supposer $c' < \frac{4c - a}{3}$. Pour $A \subset \mathbb{C}^n$, notons Conv(A) l'enveloppe convexe de A . Soient $x_1, \ldots, x_N$ des points de norme $\frac{4c - a}{3}$ tels que $\bigcup \operatorname{Conv}(\overset{\circ}{D}_c \cup \{x_k\}) \supset D_{c'}$. Définissant les C_k par $C_k = \overset{\circ}{D}_{c'} \cap \operatorname{Conv}(C_{k-1} \cup \{x_k\})$, ça marche.

Démonstration de la proposition 4. (a) Soient $C_0, \ldots, C_N$ comme dans le lemme avec $c = b'$, $c' = b$, posons $G_k = \overset{\circ}{C}_k - D_a$. Soit S un demi-espace ouvert conte-

nant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ et ne rencontrant pas D_a , soit (U_m) un recouvrement de G_k par des ouverts convexes tel que $U_o = S \cap G_k$ et $U_m \subset G_{k-1}$ pour $m \neq 0$, et posons $V_m = U_m \cap G_{k-1}$. On a $U_{m,m'} = V_{m,m'}$ pour $m \neq m'$, d'où $C^i(G_k,(U_m);\underline{F}) = C^i(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$ pour $i > 0$, en notant C^i l'espace des cochaînes alternées. Comme V_o est convexe, l'application $\underline{F}(U_o) \to \underline{F}(V_o)$ est d'image dense, et il en est de même de $C^o(G_k,(U_m);\underline{F}) \to C^o(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$. Par suite $H^1(G_k ; \underline{F}) \to H^1(G_{k-1} ; \underline{F})$ est surjective et devient bijective quand on sépare, et $H^i(G_k ; \underline{F}) = H^i(G_{k-1} ; \underline{F})$ pour $i > 1$, d'où (a).

(b) Soient c et c' tels que $a < c \leq c' < b$, et soient $C_o,\ldots,C_N$ comme dans le lemme. Posons $G_k = D_b - C_k$. Soit S un demi-espace ouvert contenant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ tel que $\bar{S} \cap D_a = \emptyset$, posons $U = S \cap C_k$ et $V = S \cap C_{k-1}$. Par dualité de Serre, on a $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) = H^i_{comp}(V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$, et, l'application $\underline{O}(U) \to \underline{O}(V)$ étant d'image dense, $H^n_{comp}(V) \to H^n_{comp}(U)$ est injective. La suite exacte $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) \to H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(U ; \underline{O})$ montre que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$. D'après le Théorème A de H. Cartan, $\underline{F}$ admet sur $\bar{U}$ une résolution de longueur $n - p$, où $p = \text{prof } \underline{F}$. Il en résulte par récurrence descendante sur p que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) = 0$ pour $i < p$. La suite exacte $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) \to H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F}) \to H^{i+1} \ldots$ montre que $H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F})$ est bijective pour $i < p - 1$ et injective pour $i = p - 1$, et il en est de même de $H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_{c'} ; \underline{F}) \to H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_{c'} ; \underline{F})$. On conclut par passage à la limite projective en faisant tendre c vers a ou vers a' , grâce au lemme 1.

(c) résulte de (a) et (b) par la méthode qui donne le théorème de finitude de Cartan-Serre.

5. Résultats de Trautmann [10].

PROPOSITION 5.- Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $R_{a,b}$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, il existe un faisceau analytique cohérent prolongeant $\underline{F}$ à $\overset{\circ}{D}_b$.

LEMME 3.- Soit b' tel que $a < b' < b$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, l'espace $H^0(R_{a,b'} ; \underline{F})$ engendre $\underline{F}_x$ pour tout $x \in R_{a,b'}$.

Démonstration. Considérons la suite exacte $0 \to \underline{m}_x\underline{F} \to \underline{F} \to C_x \otimes \underline{F} \to 0$. L'espace $H^1(R_{a,b'} ; \underline{F})$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). La suite exacte $C \otimes \underline{F}_x \to H^1(R_{a,b'} ; \underline{m}_x\underline{F}) \to H^1(R_{a,b'} ; \underline{F})$ montre que $H^1(R_{a,b'} ; \underline{m}_x\underline{F})$ est de dimension finie, donc séparé. Soit b'' tel que $a < b'' < \|x\| < b'$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(R_{a,b'} ; \underline{F}) & \xrightarrow{\varepsilon} & C \otimes \underline{F}_x & \to & H^1(R_{a,b'} ; \underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{u} & H^1(R_{a,b'} ; \underline{F}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H^1(R_{a,b''} ; \underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{=} & H^1(R_{a,b''} ; \underline{F}) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes d'après la prop. 4 (a) puisqu'elles partent d'espaces séparés, donc u est un isomorphisme, ε est surjectif, d'où le lemme par Nakayama.

Démonstration de la prop. 5. On peut supposer $n \geq 3$. Soient a', b', b'' tels que $a < a' < b' < b'' < b$. Il résulte du lemme qu'il existe un faisceau libre $\underline{L}_o$ et un morphisme $d_o : \underline{L}_o \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b''}$ surjectif sur $Q = \overline{R_{a',b'}}$. Posons $\underline{F}_1 = \operatorname{Ker} d_o$. On a prof $\underline{F}_1 \geq 3$ sur Q, donc il existe un faisceau libre $\underline{L}_1$ et un morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{F}_1$ défini surjectif au voisinage de Q. Le morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ se prolonge à $D_{b'}$, et on a $d_o \circ d_1 = 0$ sur $R_{a,b'}$. Posons $\underline{G} = \operatorname{Coker} d_1$. On a un morphisme $f : \underline{G} \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b'}$ qui est un isomorphisme sur $R_{a',b'}$. Posons $S = S_1(\underline{G})$ et soit T l'ensemble des $x \in R_{a,b'}$ tels

que f_x ne soit pas un isomorphisme. Les ensembles S et T sont des ensembles analytiques qui ne rencontrent pas $R_{a',b'}$, donc sont de dimension 0 . Par suite S est fini. Mais il résulte du corollaire de la prop. 3 que $T \subset S$, car, si $x \notin S$, on a $\underline{G} = j_* j^* \underline{G} = j_* j^* \underline{F} = \underline{F}$ au voisinage de x , où $j : R - \{x\} \to R$ est l'injection canonique. Par suite, T est fini, donc fermé dans $\overset{\circ}{D}_{b'}$. On obtient un prolongement de $\underline{F}$ en recollant $\underline{F}$ et $\underline{G}\big|_{\overset{\circ}{D}_{b'} - T}$ suivant f .

COROLLAIRE.- Si Z est de dimension 0 , tout faisceau de profondeur ≥ 3 sur $X - Z$ est prolongeable.

PROPOSITION 6.- Supposons Z de dimension 0 et soit $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent de profondeur ≥ 2 sur $X - Z$. Si $\underline{E}$ est prolongeable, $i_*\underline{E}$ est cohérent de profondeur ≥ 2 .

LEMME 4.- Soient $n \geq 3$ et $0 < b' < b$. Posons $X = \overset{\circ}{D}_b$, $X' = \overset{\circ}{D}_{b'}$, $Z = \{0\}$ et $W = X' - Z$. Soit $\underline{E}$ un faisceau cohérent sur $X - Z$ de profondeur ≥ 2 prolongeable. Il existe alors une suite exacte $0 \to \underline{E}_1 \to \underline{L}_o \to \underline{E} \to 0$ sur W où $\underline{L}$ libre et $H^1(W ; \underline{E}_1) = 0$.

Démonstration. Soient $\underline{F}$ un prolongement de $\underline{E}$ et $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{X}'$, où $\underline{L}$ est libre. Dans la suite exacte $H^o(W ; \underline{L}) \to H^o(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{F}_1)$, le faisceau $\underline{F}_1$ est de profondeur ≥ 3 sur $\bar{X}' - Z$, donc $H^1(W ; \underline{F}_1)$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). Il existe donc des sections $f_1, \ldots, f_s \in H^o(W ; \underline{E})$ telles que $H^o(W ; \underline{E})$ soit engendré par $H^o(W ; \underline{L}) \cup \{f_1, \ldots, f_s\}$, d'où, en posant $\underline{L}_o = \underline{L} \oplus \underline{O}_W^s$, un morphisme $\underline{L}_o \to \underline{E}$ tel que $H^o(W ; \underline{L}_o) \to H^o(W ; \underline{E})$ soit surjectif. En notant $\underline{E}_1$ le noyau de ce morphisme, la suite exacte $H^o(W ; \underline{L}_o) \to H^o(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{E}_1) \to H^1(W ; \underline{L}_o)$, où $H^1(W ; \underline{L}_o) = 0$

d'après le cor. de la prop. 2, donne $H^1(W ; \underline{E}_1) = 0$.

Démonstration de la prop. 6. On peut supposer qu'on est dans les conditions du lemme. Le faisceau $\underline{E}_1$ est alors de profondeur ≥ 3 , donc prolongeable d'après la prop. 5, ce qui permet d'itérer la construction. On obtient une suite exacte $0 \to \underline{E}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{E}_1 \to 0$ sur $W' = X'' - Z$, où $X'' = \overset{\circ}{D}_{b''}$, $0 < b'' < b'$. Le morphisme $\underline{L}_1 \to \underline{L}_0$ se prolonge à X'' . Notons $\bar{\underline{E}}$ le conoyau de ce morphisme prolongé. Pour $U = \overset{\circ}{D}_a$, $a \leq b''$, on a des suites exactes $\underline{E}_2(U - Z) \to \underline{L}_1(U - Z) \to \underline{E}_1(U - Z) \to 0$, $0 \to \underline{E}_1(U - Z) \to \underline{L}_0(U - Z) \to \underline{E}(U - Z) \to 0$, d'où $\underline{E}(U - Z) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U - Z) \to \underline{L}_0(U - Z)) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U) \to \underline{L}_0(U)) = \bar{\underline{E}}(U)$. Par suite $\bar{\underline{E}} = i_*\underline{E} = i_*i^*\bar{\underline{E}}$, et $\bar{\underline{E}}$ est de profondeur ≥ 2 à l'origine d'après le cor. de la prop. 3.

6. Introduction de paramètres.

Le corollaire de la prop. 3 admet la généralisation suivante :

PROPOSITION 7 [7].- *Soient* X *un espace analytique,* $Z \subset X$ *un sous-ensemble analytique de dimension* p , *soit* $\underline{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X *et notons* i *l'injection canonique* $X - Z \to X$. *Si* $\underline{F}$ *vérifie* (s_k) *pour* $k \leq p+1$, *on a* $\underline{F} = i_*i^*\underline{F}$.

LEMME 5.- *Soient* $U = U' \times U'' \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ *un polydisque ouvert,* $\underline{F}$ *un faisceau cohérent de profondeur* $\geq p + k$ *au voisinage de* $\bar{U}$. *Posons* $Z = U' \times \{0\}$. *On a* $H^0(U - Z ; \underline{F}) = H^0(U ; \underline{F})$ *si* $k \geq 2$, *et* $H^i(U - Z ; \underline{F}) = 0$ *pour* $1 \leq i \leq k - 2$.

Démonstration par récurrence descendante sur k : On a

$$H^i(U - Z ; \underline{O}) = \underline{O}(U') \hat{\otimes} H^i(U'' - \{0\} ; \underline{O}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq q - 2 \\ \underline{O}(U) & \text{pour } i = 0 \end{cases}$$

d'où le résultat pour $k = q$. Si $k < q$, soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{U}$, où $\underline{L}$ est libre. On a $\operatorname{prof} \underline{F}_1 \geq p + k + 1$. La suite exacte $H^i(U - Z ; \underline{L}) \to H^i(U - Z ; \underline{F}) \to H^{i+1}(U - Z ; \underline{F}_1)$ donne le résultat pour $i > 0$. Si $k \geq 2$, on a $H^1(U - Z ; \underline{F}_1) = 0$, d'où

$\underline{F}(U - Z) = \operatorname{Coker}(\underline{F}_1(U - Z) \to \underline{L}(U - Z)) = \operatorname{Coker}(\underline{F}_1(U) \to \underline{L}(U)) = \underline{F}(U)$.

Démonstration de la proposition par récurrence sur p : Posons $Z' = \operatorname{sing}(Z) \cup (Z \cap S_{p+1}(\underline{F}))$. Au voisinage de chaque point de $Z - Z'$, on est dans la situation du lemme, d'où etc.

Pour continuer, il nous faut des espaces de Banach et des complexes directs.

Soient $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ et $L = L_1 \times \ldots \times L_n$ deux polydisques concentriques dans $\mathbb{C}^n$ tels que $\mathring{L} \neq \emptyset$ et $L \subset \mathring{K}$. Posons $Q = K - \mathring{L}$, $Q_i = K_i - \mathring{L}_i$, $T_i = K_1 \times \ldots \times Q_i \times \ldots \times K_n$ et $T_{i_o,\ldots,i_q} = T_{i_o} \cap \ldots \cap T_{i_q}$. Notons $B(T_{i_o,\ldots,i_q})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $T_{i_o,\ldots,i_q}$ holomorphes à l'intérieur. Posons $C_B^q(Q ; \underline{O}) = \prod_{i_o < \ldots < i_q} B(T_{i_o,\ldots,i_q})$. On a un complexe $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$, où les $d : C_B^q(Q ; \underline{O}) \to C_B^{q+1}(Q ; \underline{O})$ sont les différentielles de Čech. Notons $H_B^q(Q ; \underline{O})$ son homologie.

PROPOSITION 8.- Si $n \geq 2$, le complexe $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$ est direct. On a

$$H_B^q(Q ; \underline{O}) = \begin{cases} B(K) & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } 1 \leq q \leq n - 2 . \end{cases}$$

Pour la démonstration, on se ramène par $\hat{\otimes}_\varepsilon$ à l'étude du cas $n = 1$.

Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de K . On dit que Q est une couronne privilégiée pour $\underline{F}$ si, quels que soient q et $(i_o,\ldots,i_q)$, le compact $T_{i_o,\ldots,i_q}$ est $\underline{F}$-privilégié [3]. On montre, comme dans [3], que pour tout

faisceau $\underline{F}$ analytique cohérent sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, il existe une couronne privilégiée Q pour $\underline{F}$ de centre 0 contenue dans U. De plus, si (s_n) est une suite de points de U tendant vers 0, on peut choisir Q ne contenant aucun des s_n.

Si Q est une couronne privilégiée pour $\underline{F}$, on définit comme ci-dessus le complexe $C_B^\bullet(Q\,;\underline{F})$. On dit qu'un complexe $E^\bullet$ d'espaces de Banach est direct en degré i si $d^{i-1} : E^{i-1} \to E^i$ et $d^i : E^i \to E^{i+1}$ sont des morphismes directs (en particulier on exige que $\operatorname{Im} d^i$ soit facteur direct topologique dans E^{i+1}).

PROPOSITION 9.- Soit $Q = K - \overset{\circ}{L}$ une couronne privilégiée pour $\underline{F}$, où $\underline{F}$ est un faisceau cohérent au voisinage de K. Posons $p = \operatorname{prof}_Q \underline{F}$ et $p' = \operatorname{prof}_K \underline{F}$. Le complexe $C_B^\bullet(Q\,;\underline{F})$ est direct en degré $p-2$. On a

$$H_B^q(Q\,;\underline{F}) = \begin{cases} B(K\,;F) & \text{pour } q = 0 \text{ si } p' \geq 2 \\ 0 & \text{pour } 1 \leq q \leq p'-2 \\ \text{est de dimension finie pour } & 1 \leq q \leq p-2 . \end{cases}$$

Longueur de la démonstration : 3 pages dans [6].

La démonstration du théorème 2 va maintenant résulter de trois lemmes.

LEMME 6.- Soient $U = U' \times U''$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, notons $\pi : U \to U'$ la projection, soient Z un sous-ensemble analytique de U tel que $\pi|_Z$ soit fini et $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $U - Z$ vérifiant (s_k) pour $k \leq p+2$. Posons $S = S_{p+2}(\underline{E})$. On suppose que les fibres de $\pi|_S$ sont de dimension 0 et que $\underline{E}|_{U-Z-S}$ est π-plat. Il existe alors un voisinage U_1 de 0 dans U et un sous-ensemble analytique $Z_1 \subset Z \cap U_1$ de dimension $\leq p-1$ tels que, en notant i l'injection canonique $X - Z \to X - Z_1$, le faisceau $i_*\underline{E}$ soit cohérent et vérifie (s_k) pour $k \leq p+2$.

Démonstration. Pour $t \in U'$, posons $Z(t) = Z \cap \pi^{-1}(t)$. On peut supposer que $Z(0) = \{0\}$ et que $S(0)$ est l'ensemble des points d'une suite tendant vers 0 . Soit $Q = K - \overset{\circ}{L} \subset U''$ une couronne privilégiée pour $\underline{E}(0)$ ne rencontrant pas $S(0)$. Il existe un voisinage U_1' de 0 dans U' tel que, pour tout $t \in U_1'$, la couronne Q ne rencontre pas $S(t)$ et soit privilégiée pour $\underline{E}(t)$. Les complexes $C_B^\cdot(Q ; \underline{E}(t))$ sont les fibres d'un complexe $C_B^\cdot(Q ; \underline{E})$ de fibrés vectoriels banachiques sur U_1' . Pour tout $t \in U_1'$, le faisceau $\underline{E}(t)$ est de profondeur ≥ 3 sur Q , et il existe en vertu des prop. 5 et 6 un faisceau $\underline{F}(t)$ de profondeur ≥ 2 sur K qui coïncide avec $\underline{E}(t)$ sur Q . D'après la prop. 8, le complexe $C_B^\cdot(Q ; \underline{E}(t)) = C_B^\cdot(Q ; \underline{F}(t))$ est direct en degré 1 et son homologie est de dimension finie. Cette dimension dépend de façon analytiquement semi-continue supérieurement de t , donc il existe un ensemble analytique $T \subset U_1'$ de dimension $\leq p - 1$ tel que $\dim H_B^1(Q ; \underline{E}(t))$ soit constante sur $U_1' - T$. Sur cet ouvert, les $H_B^0(Q ; \underline{E}(t))$ sont les fibres d'un fibré $H_B^0(Q ; \underline{E})$. A ce fibré correspond par la méthode de ([3], § 8, n° 5) un faisceau sur $(U_1' - T) \times \overset{\circ}{K}$, π-plat, et on montre grâce à la prop. 7 que ce faisceau coïncide avec $\underline{E}$ là où ils sont tous deux définis, d'où le lemme avec $U_1 = U_1' \times \overset{\circ}{K}$ et $Z_1 = Z \cap \pi^{-1}(T)$.

LEMME 7.- *Soient V un ouvert de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$, Z un sous-ensemble analytique de V , Y un sous-ensemble analytique de $V - Z$ et $\pi : V \to \mathbf{C}^p$ la projection canonique. On suppose les fibres de $\pi|_Z$ de dimension 0 et les fibres de $\pi|_Y$ de dimension ≥ 1 en chaque point. Alors l'adhérence $\bar{Y}$ de Y dans V est un sous-ensemble analytique de V . Si $\pi|_Y$ n'est ouverte en aucun point, $Z \cap \bar{Y}$ est de dimension $\leq p - 1$.*

Longueur de la démonstration : 3 $\frac{1}{2}$ pages, en introduisant une filtration analytique (Y_k) sur Y telle que $\pi|_{Y_k - Y_{k+1}}$ soit "de rang constant" $p - k$.

LEMME 8.- Soient V un ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, F un faisceau cohérent sur V et $\pi : V \to \mathbb{C}^p$ la projection. Soit Y l'ensemble des points où F n'est pas π-plat. Alors Y est un sous-ensemble analytique de V et $\pi|_Y$ n'est ouverte en aucun point. Si prof $F \geq p + k$, les fibres de $\pi|_Y$ sont de dimension $\geq k + 1$ en chaque point.

La première assertion constitue l'un des buts de [5]. La seconde est démontrée dans [6] en deux pages.

Démonstration du théorème 2 par récurrence sur p. Le résultat est local. Soit $z \in Z$. On peut plonger un voisinage de z dans X dans un ouvert $U = U' \times U''$ de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, de façon que $\pi|_{Z \cap U}$ soit fini. Posons $S = S_{k+2}(E)$. Soient Y_1 l'ensemble des points de S où la fibre de $\pi|_S$ est de dimension ≥ 1, Y_2 l'ensemble des points de $U - Z - S$ où E n'est pas π-plat et posons $Y = Y_1 \cup Y_2$. Il résulte des lemmes 7 et 8 que l'adhérence $\bar{Y}$ de Y dans U est un sous-ensemble analytique de U qui rencontre Z suivant un sous-ensemble analytique Z_1 de dimension $\leq p - 1$. Au voisinage de chaque point de $Z - Z_1$, on est dans les conditions du lemme 6, donc l'image directe de E dans $U - Z_1$ est un faisceau cohérent vérifiant (s_k) pour $k \geq p + 2$. Il en est de même de son image directe dans U en vertu de l'hypothèse de récurrence, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. S. M. F., 90 (1962), p. 193-259.

[2] A. BOREL et J.-P. SERRE - Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. S. M. F., 86 (1958), p. 97-136.

[3] A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 1-98.

[4] J. FRENKEL - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. S. M. F., 85 (1957), p. 135-220.

[5] J. FRISCH - Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, Inv. Math., 4 (1967), p. 118-138.

[6] J. FRISCH et J. GUENOT - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Inv. Math., 7 (1969), p. 321-343.

[7] G. SCHEJA - Fortsetzungssätze der complex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung, Math. Ann., 157 (1964), p. 75-94.

[8] J.-P. SERRE - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 363-374.

[9] Y.-T. SIU - Extending coherent analytic sheaves, Ann. of Math., 90 (1969), p. 108-143.

[10] G. TRAUTMANN - Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben, Arch. Math., 19 (1967), p. 188-196.