SÉMINAIRE N. BOURBAKI

NICOLE MOULIS

Variétés de dimension infinie

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 378, p. 253-267

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__253_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 378 Mai-Juin 1970

VARIÉTÉS DE DIMENSION INFINIE

par Nicole MOULIS

§ 1. Introduction. Position des problèmes.

Dans tout cet exposé, E désignera un espace de Banach de dimension infinie, de type dénombrable, M une variété topologique modelée sur E, paracompacte de type dénombrable.

Nous supposerons que E admet une norme de classe C^∞ sur $E - \{0\}$.

Une carte de M sera notée (U_i, φ_i) où U_i est un ouvert de M et φ_i un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de E.

Soit Λ un pseudo-groupe contenu dans le pseudo-groupe des homéomorphismes définis sur les ouverts de E.

Une structure de Λ-variété sur M est un atlas maximal sur M tel que, quelles que soient les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) de cet atlas, l'homéomorphisme $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ défini sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ appartienne à Λ.

Soient M et N deux Λ-variétés ; $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ et $\{(V_j, \psi_j)_{j \in J}\}$ deux atlas maximaux sur M et N respectivement, définissant une Λ-structure sur M et N. Soit f un homéomorphisme de M sur N ; f est un isomorphisme de Λ-variétés si, quels que soient i et j, $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ appartient à Λ.

Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des Λ-variétés modelées sur E . L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $[\Lambda]$.

Exemples de pseudo-groupes.

1°) Pseudo-groupe $\underline{C}^\infty$ (respectivement $\underline{C}^r$) des difféomorphismes de classe C^∞ (respectivement C^r) définis sur les ouverts de E .

2°) Pseudo-groupe $\underline{F}$ des difféomorphismes f de classe C^∞ définis sur les ouverts de E tels qu'en tout point x de l'ouvert la différentielle $D_x f$ soit

$$D_x f = Id + \alpha_x \qquad \text{où } Id \text{ est l'opérateur identité}$$
$$\alpha_x \text{ est un opérateur compact.}$$

Une $\underline{F}$-variété est appelée variété Fredholm.

3°) Pseudo-groupe $\underline{E}$ des difféomorphismes f , de classe C^∞ , définis sur les ouverts de E , vérifiant la propriété suivante :

Soient V l'ouvert de définition de f et x un point de V . Il existe un voisinage U_x de x contenu dans V tel que l'image de U_x par l'application $f - Id$ soit contenue dans un sous-espace de dimension finie.

Une $\underline{E}$-variété est appelée variété étalée "layer". Notons $[\underline{H}]$ l'ensemble quotient de $[\underline{C}^\infty]$ pour la relation d'équivalence : équivalence d'homotopie. Soit p la projecti $[\underline{C}^\infty] \to [\underline{H}]$. Soit $[\underline{O}]$ le sous-ensemble de $[\underline{C}^\infty]$ formé des classes qui contiennent un ouvert de E , i l'inclusion naturelle de $[\underline{O}]$ dans $[\underline{C}^\infty]$.

Considérons le diagramme suivant (t_1 et t_2 sont les applications canoniques d'affaiblissement de structure) :

$$[\underline{E}] \xrightarrow{t_1} [\underline{F}] \xrightarrow{t_2} [\underline{C}^\infty] \xrightarrow{p} [\underline{H}]$$
$$\uparrow i$$
$$[\underline{O}]$$

Problèmes.

Le premier problème étudié a été celui de l'injectivité de p dans le cas où E est un espace de Hilbert. Une solution partielle en est donnée par N. H. Kuiper et D. Burghelea dans [5]. Jointe au résultat de [8], elle prouve que $p \circ i$ est injective. Pour obtenir une solution complète de ce problème, dans le cas où E est un espace de Hilbert, il faut d'abord démontrer que t_2 est surjective, puis en travaillant sur des variétés munies d'une structure Fredholm [3] et [4], démontrer que l'image de i contient l'image de t_2 [2].

Les résultats sont les suivants (E espace de Hilbert) :

1°) p est bijective ;

2°) i est bijective ;

3°) t_1 est bijective ;

4°) t_2 est surjective.

(On ignore si t_2 est injective.)

Dans le cas où E n'est pas un espace de Hilbert, on obtient des résultats partiels.

§ 2. Etude des variétés hilbertiennes par la méthode des décompositions en anses [5].

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que E est un espace de Hilbert.

DÉFINITION.- Soit M une variété de classe C^∞ modelée sur E , munie d'une métrique riemannienne complète ; une m-fonction f sur M est une fonction de Morse avec minimum absolu vérifiant la condition suivante (condition C de Palais-Smale) :

De toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de M telle que la suite $\{f(x_n)\}$ soit bornée et telle que $\lim_{n \to \infty} \text{gradient } f(x_n) = 0$, on peut extraire une suite $\{x_{n_p}\}$ qui converge

vers un point critique.

D'après [10] si M admet une m-fonction, M admet une décomposition en anses.

THÉORÈME 1.- Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M admet pour une métrique riemannienne complète une m-fonction.

(ii) M est difféomorphe à $M \times E$ (on dit que M est Palais-stable).

(iii) M est difféomorphe à un ouvert de E.

THÉORÈME 2.- Si deux variétés M et N satisfont à une des propriétés ci-dessus et sont homotopes, elles sont difféomorphes.

Principe des démonstrations.

(i) $\Rightarrow$ (ii). La démonstration utilise le théorème suivant, dû à Bessaga [1] et [5].

THÉORÈME 3.- Soient p un point de E, V un voisinage de p dans E ; V est difféomorphe à $V - \{p\}$ par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de V.

COROLLAIRE.- Soient M une variété modelée sur E, N une sous-variété de M, de codimension infinie, T un voisinage tubulaire de N dans M ; M est difféomorphe à $M - N$, par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de T.

Dans toute la suite, nous supposerons M munie d'une métrique riemannienne complète et d'une m-fonction f telle que deux points critiques distincts aient des valeurs distinctes. Nous noterons :

$$f_a = \{ x \; ; \; x \in M \, , \, f(x) \leq a \} \, , \quad \partial f_a \text{ le bord de } f_a \, .$$

Si M et N sont deux variétés difféomorphes, nous écrirons $M \simeq N$.

Tous les angles introduits au cours des démonstrations sont supposés lissés.

LEMME 1.- Supposons que $f^{-1}[a,b]$ contienne un seul point critique p ($f(p) = c$, $a < c < b$) d'indice et coïndice infinis. Le h-cobordisme $(f^{-1}[a,b], \partial f_a, \partial f_b)$ est trivial ; il existe une m-fonction g sur M , qui coïncide avec f en dehors de $f^{-1}[a,b]$, sans point critique sur $g^{-1}[a,b]$.

Démonstration.

Soient D la boule unité de E , S le bord de D . Soit α l'application d'attachement de l'anse associée au point critique p ; α est une application de $S \times D$, dans le bord de f_a , ∂f_a .

$$f_b \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} D \times D .$$

D'après le corollaire 1

$$f_a \underset{\alpha}{\cup} (D \times D) \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} ((D - \{0\}) \times D) .$$

Par un difféomorphisme élémentaire

$$f_a \underset{\alpha}{\cup} ((D - \{0\}) \times D) \simeq f_a - \alpha(S \times \{0\}) .$$

Or $\alpha(S \times 0)$ est une sous-variété de codimension infinie de ∂f_a : $f_a - \alpha(S \times 0) \simeq f_a$.

Sur la figure 1, nous avons représenté la suite de difféomorphismes, en utilisant un modèle pour l'anse. Dans ce modèle, elle est représentée par l'ensemble des points (x_1, x_2) $(x_1 \in D , x_2 \in D)$.

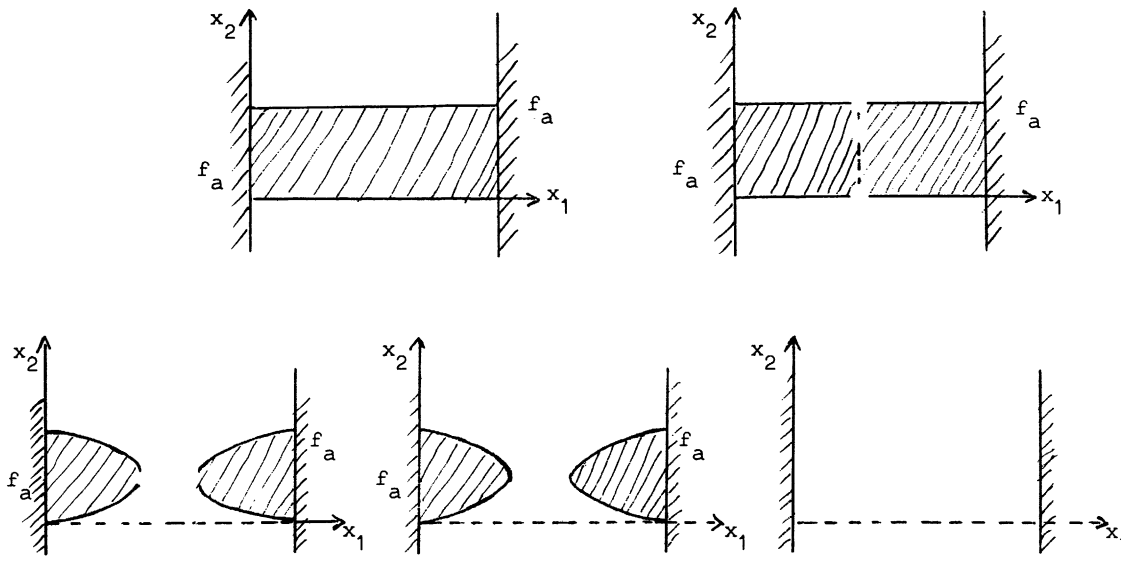

Figure 1

LEMME 2.- Soit M une variété modelée sur E, munie d'une métrique riemannienne complète ds^2 et d'une m-fonction f. Il existe sur M une métrique riemannienne complète ds_o^2 et une m-fonction f_o (pour ds_o^2) telle que tous les points critiques de f_o aient un indice fini.

Principe de la démonstration.

D'après le lemme 1, nous pouvons supposer que f n'admet pas de point critique d'indice et coïndice infinis. Supposons, par récurrence, démontré que, pour une métrique riemannienne complète ds_i^2, il existe sur M une m-fonction f_i dont tous les points critiques ont un coïndice $\geq n$.

Soit p un point critique de coïndice n, tel que $f(p)$ soit minimal.

q étant un point critique quelconque, soit

$W_+(q)$ la variété stable de q (ou nappe ascendante)

$W_-(q)$ la variété instable de q (ou nappe descendante).

Par un lemme de transversalité, nous pouvons supposer que, quel que soit q point critique distinct de p :

$$W_+(p) \cap W_-(q) = \emptyset .$$

Soit T un voisinage tubulaire de $W_+(p)$ ne contenant aucun autre point critique. D'après le théorème de Bessaga :

$$T \simeq T - W_+(p) .$$

Il existe sur $T - W_+(p)$ une métrique riemannienne complète ds^2_{i+1} qui coïncide avec ds^2_i sur un voisinage du bord de T et une m-fonction f_{i+1} (pour ds^2_{i+1}) qui coïncide avec f_i sur un voisinage du bord de T .

LEMME 3.- Soit f une m-fonction sur M , telle que $f^{-1}[a,b]$ contienne un seul point critique p $(f(p) = c$, $a < c < b)$. Supposons p d'indice fini n et de coïndice infini. Si il existe une variété M_a et un difféomorphisme φ_a de f_a sur $M_a \times E$, il existe une variété M_b , un difféomorphisme φ_b de f_b sur $M_b \times E$ et une injection j de M_a dans M_b tels que le diagramme suivant soit commutatif (j_1 est l'injection de f_a dans f_b) :

$$\begin{array}{ccc} f_a & \xrightarrow{\varphi_a} & M_a \times E \\ {\scriptstyle j_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j \times id} \\ f_b & \xrightarrow{\varphi_b} & M_b \times E . \end{array}$$

Principe de la démonstration.

Soient D^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$, S^{n-1} le bord de D^n , D la boule unité de E .

Soit α l'application d'attachement de l'anse associée au point critique p .

$$\alpha : S^n \times D \to \partial f_a$$

$$f_b \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} D^n \times D .$$

Or $$\partial f_a \simeq \partial(M_a \times E) \simeq \partial M_a \times E .$$

Soit α_o la restriction de α à $S^n \times \{0\}$. Après avoir appliqué à l'espace $M_a \times E$ une suite d'isotopies, nous pouvons supposer :

$$(\alpha , \alpha_o) : (S^{n-1} \times D , S^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow (\partial M_a \times E , \partial M_a \times 0) .$$

Soit W un voisinage tubulaire à bord de $\alpha_o(S^{n-1})$ dans $M_a \times \{0\}$. Utilisons un modèle pour $W \times E \underset{\alpha}{\cup} D^n \times D$. Un point de ce modèle est déterminé par trois coordonnées (x_1,x_2,x_3) , $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in D$, $x_3 \in D$

$$\alpha_o(S^{n-1} \times \{0\}) = \{(x_1,x_2,x_3) ; |x_1| = 1 , x_2 = 0 , x_3 = 0\}$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3) ; |x_1| \geq 1 , x_3 = 0\}$$

$$\alpha(S^{n-1} \times D) = \{(x_1,x_2,x_3) ; |x_1| = 1 , |x_2| \leq 1 , |x_3| \leq 1\} .$$

L'anse est l'ensemble des points (x_1,x_2,x_3) tels que $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$.

Soit N la sous-variété du bord de $W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)$ ensemble des points dont la deuxième coordonnée est nulle : $(x_2 = 0)$. N est de codimension infinie

$$W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D) \simeq (W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)) - N .$$

Comme le montre la figure 2, il existe une suite de difféomorphismes élémentaires, permettant de trouver une application β d'attachement d'anse :

$$\beta : S^{n-1} \times D \rightarrow \partial M_a$$

et un difféomorphisme de f_b sur $(M_a \underset{\beta}{\cup} (D^n \times D)) \times E$. Posons $M_b = M_a \underset{\beta}{\cup} D^n \times D$.

M_b est la variété cherchée.

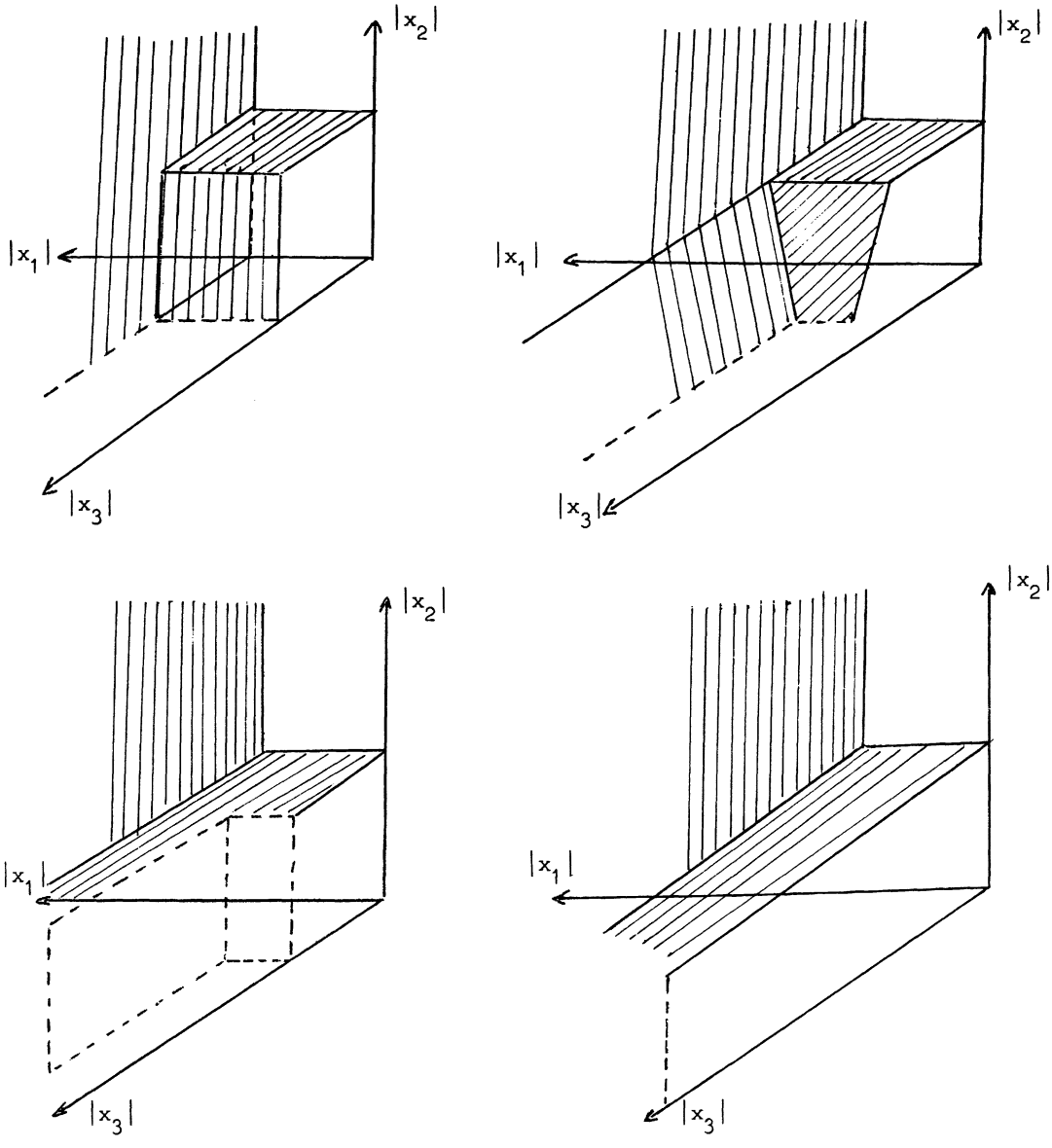

Figure 2

La partie hachurée représente le bord de $W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)$.

Fin de la démonstration du (i) $\Rightarrow$ (ii).

D'après les lemmes 1 et 2, on peut supposer que f, m-fonction sur M n'admet que des points critiques d'indice fini et de coïndice infini. La limite des variétés M_a quand a croît est une variété M' telle que $M \simeq M' \times E$. Donc M est Palais-stable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La démonstration est immédiate en considérant un voisinage tubulaire d'un plongement de M dans E de codimension infinie [6].

(iii) $\Rightarrow$ (i). On construit explicitement sur un ouvert de E, grâce à une partition de l'unité, une métrique riemannienne complète et une m-fonction [8].

La démonstration du théorème 2 est analogue à celle d'un théorème de B. Mazur concernant deux variétés de dimension finie dont les fibrés tangents sont stablement équivalents [7].

§ 3. Variétés munies d'une structure Fredholm.

1. Fibrés Fredholm.

E étant un espace de Banach, nous désignerons par $GL(E)$ le groupe linéaire de E, $GL_c(E)$ le sous-groupe des opérateurs de la forme $Id + \alpha$ où α est un opérateur compact ; $\Phi_n(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ des opérateurs Fredholm d'indice n.

DÉFINITION 1.- Un fibré vectoriel $\underline{G}$ de fibre E admet une structure Fredholm, si son groupe structural admet une réduction à $GL_c(E)$.

DÉFINITION 2.- Soient $\underline{G}$ et $\underline{G}'$ deux fibrés vectoriels. Une application fibrée f de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ est une Φ_o-application fibrée si sa restriction à chaque fibre est un élément de $\Phi_o(E)$.

PROPOSITION 1.- Soit $\underline{G}$ un fibré vectoriel ayant pour base une variété M et pour fibre E .

(i) Une Φ_o-application fibrée f de $\underline{G}$ dans le fibré trivial $M \times E$ induit sur $\underline{G}$ une structure Fredholm unique Σ_f , pour laquelle f est un morphisme de fibrés Fredholm.

(ii) Si Σ est une structure Fredholm sur $\underline{G}$, il existe une Φ_o-application $f : \underline{G} \to M \times E$ telle que $\Sigma_f = \Sigma$.

(iii) Soient f_o et f_1 deux Φ_o-applications fibrées de $\underline{G}$ dans $M \times E$; les structures Fredholm Σ_{f_o} et Σ_{f_1} sur $\underline{G}$ sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme h de $\underline{G}$ sur lui-même tel que la restriction à chaque fibre de $(f_o \circ h - f_1)$ soit un opérateur compact.

Démonstration de (i).

Soient x un point de M , f_x la restriction de f à la fibre de x .

Il existe un opérateur inversible φ_x et un opérateur compact α_x tels que $f_x = \varphi_x + \alpha_x$. Soit V un voisinage d'un point x_o de M , tel que la restriction à V , $\underline{G}_V$, du fibré $\underline{G}$ soit triviale. Si y est un point de V , v un vecteur de E , posons : $\Gamma_V(y,v) = (y , (f_y - \alpha_{x_o}).v)$. Si V est assez petit, $f_y - \alpha_{x_o}$ est un opérateur inversible.

Considérons un recouvrement de M par les ouverts $V(x)$ (x point de M), les applications Γ_V associées définissent sur $\underline{G}$ une structure Fredholm.

Démonstration de (ii).

On recolle, grâce à une partition de l'unité, les applications de M dans E déduites des trivialisations locales du fibré Fredholm.

2. Variétés Fredholm.

Soit TM le fibré tangent à une variété M de classe C^∞ modelée sur E .

DÉFINITION 3.- Soient M et N deux variétés de classe C^∞ , f une application de M dans N de classe C^∞ ; f est une Φ_o-application si l'application tangente $Tf : TM \to TN$ est une Φ_o-application fibrée.

PROPOSITION 2.- Soit M une variété de classe C^∞ modelée sur E .

(i) Une Φ_o-application f de classe C^∞ de M dans E induit sur M une structure Fredholm unique Σ_f pour laquelle Tf est un morphisme de fibrés Fredholm.

(ii) Si Σ est une structure Fredholm sur M , il existe une Φ_o-application f de M dans E , de classe C^∞ , telle que $\Sigma = \Sigma_f$.

Le principe de la démonstration est le même que celui de la démonstration de la proposition 1.

THÉORÈME 1.- La condition nécessaire et suffisante pour que M admette une structure Fredholm est que le fibré TM soit équivalent à un $GL_c(E)$ fibré. [3], [4].

La condition nécessaire est triviale. Pour démontrer la réciproque, on construit une Φ_o-application $f : M \to E$. D'après la proposition 1, il existe une Φ_o-application fibrée $\eta : TM \to M \times E$. Nous déduisons de η une application η_1 de M dans $\Phi_o(E)$. L'application f est construite de proche en proche sur les ouverts d'un recouvrement localement fini de M de sorte que l'application différentielle Df soit homotope à η_1 par une homotopie dont l'image est dans $\Phi_o(E)$.

COROLLAIRE 1.- Si $GL(E)$ est contractile, l'application $[\underline{F}] \to [\underline{C}^\infty]$ est surjective.

Remarque.- Les mêmes raisonnements peuvent se faire en considérant des structures étalées, ce qui montre que l'application $t_1 : [\underline{E}] \to [\underline{F}]$ est bijective.

3. Théorème du plongement ouvert [2].

Nous supposerons désormais que E admet une base $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$.

THÉORÈME 2.- Soit M une variété Fredholm modelée sur E telle que le fibré tangent à M , TM , soit un $GL_c(E)$ fibré trivial. Il existe un difféomorphisme φ de M sur un ouvert Ω de E .

Principe de la démontration.

LEMME 1.- Il existe une famille M_n $(n \in \mathbb{N})$ de sous-variétés de M telles que

(i) M_n est compacte ;

(ii) $M_n \subset M_{n+1}$;

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ est dense dans M .

Soit E_n le sous-espace de E engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Il existe une Φ_o-application f , transversale à tous les E_n , propre et bornée. Cf. [9] et [3].

Posons $M_n = f^{-1}(E_n)$.

LEMME 2.- Il existe une suite de voisinages tubulaires de M_n , Z_n , tels que $Z_n \subset Z_{n+1}$ et tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n = E$.

Considérons sur M une structure étalée compatible avec la structure Fredholm et un atlas dénombrable $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ pour cette structure, tel que les (U_i) forment un recouvrement ouvert, finiment étoilé de M .

Soit $n_i = \inf\{n ; M_n \cap U_i \neq \emptyset\}$. Il est possible de choisir le recouvrement de sorte que :

a) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = Id + \alpha_i$ et Image $\alpha_i \subset E_{n_i}$;

b) $f \circ \varphi_i^{-1} = Id + \beta_i$ et Image $\beta_i \subset E_{n_i}$;

c) $n \geq n_j$ et $z \in E$, $\varphi_j^{-1}(z + E_n) = U_j \cap f^{-1}(z + E_n)$;

d) la restriction de f à $\bar{U}_j$ est propre.

Soit $\{\mu_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement par les ouverts U_i . En considérant les propagateurs ("spray") triviaux dans chaque carte (U_i , φ_i) et en les recollant, grâce aux fonctions μ_i , on obtient un propagateur sur M pour lequel chaque M_n est une sous-variété totalement géodésique. Dans chaque carte (U_i , φ_i) , l'application exponentielle associée à ce propagateur est de la forme :

$$\exp(x,v) = (x , x + v + \gamma_i(x,v)) \qquad \text{où Image } \gamma_i \subset E_{n_i} .$$

Cette application exponentielle permet de construire des voisinages tubulaires de chaque variété M_n . Grâce à la forme explicite de l'application, on montre qu'il existe une fonction r , continue de M dans l'ensemble des réels strictement positifs, telle que chaque M_n admette un voisinage tubulaire X_n de rayon r/M_n . On vérifie que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = M$. Posons $Z_n = \cap \{X_m ; m \geq n\}$.

Les Z_n sont les voisinages cherchés.

Fin de la démonstration du théorème 2.

On construit, par induction, une suite de plongements ouverts φ_n de Z_n dans E, tels que φ_{n+1} coïncide avec φ_n sur Z_n . φ_{n+1} est obtenu à partir de φ_n , en étendant d'abord le plongement à M_{n+1} , puis à Z_{n+1} en utilisant une trivialisation de TM et des théorèmes d'isotopie de voisinages tubulaires.

Remarque.- Très récemment K. D. Elworthy a démontré, en utilisant le même type de méthodes, le théorème de stabilité pour les variétés M modelées sur E $(M \simeq M \times E)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cz. BESSAGA - Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere, Bull. Acad. Pol. Sci. XIV-1 (1966), p. 27-31.

[2] J. EELLS and K.D. ELWORTHY - Open embeddings of certain Banach manifolds, Ann. of Math., 91 (1970), p. 465-485.

[3] K. D. ELWORTHY - Fredholm maps and $GL_c(E)$ structures, Thesis, Annoncement Bull. A. M. S., 74 (1968), p. 582-586.

[4] K. D. ELWORTHY - Structure Fredholm sur les variétés Banachiques, Proceedings du Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal, Juillet 1969, à paraître.

[5] N. H. KUIPER and D. BURGHELEA - Hilbert manifolds, Ann. of Math., 90 (1969), p. 379-417.

[6] N. H. KUIPER and B. TERPSTRA - Differentiable closed embeddings of Banach manifolds, Conference in honor of G. de Rham, Springer-Verlag (1970), p. 118-125.

[7] B. MAZUR - Stable equivalence of differentiable manifolds, Bull. A. M. S., 67 (1961), p. 377-384.

[8] N. MOULIS - Sur les variétés hilbertiennes et les fonctions non dégénérées, Indagationes Mathematicae, 30 (1968), p. 497-511.

[9] K. K. MUKHERJEA - Fredholm structures and cohomology, Thesis, Cornell University, 1968.

[10] R. PALAIS - Morse theory on Hilbert manifolds, Topology 2 (1963), p. 299-340.