SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL DEMAZURE

Sous-groupes arithmétiques des groupes algébriques linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 235, p. 209-220

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__209_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 235

Mai 1962

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES DES GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

par Michel DEMAZURE

Ceci est l'exposé des résultats de A. BOREL et HARISH-CHANDRA exposés, ou annoncés dans [1], [2], [3], et un aperçu des méthodes de démonstration.

1. Énoncé des résultats.

Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur le corps $\underset{\sim}{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire un sous-groupe défini sur $\underset{\sim}{Q}$ d'un $GL(n, \underset{\sim}{C})$. Si B est un sous-anneau de $\underset{\sim}{C}$, on désignera par G_B le sous-groupe de G formé des éléments dont les coefficients sont dans B et le déterminant inversible dans B, c'est-à-dire $G_B = G \cap GL(n, B)$. Si B est un corps, G_B n'est autre que le groupe des éléments de G rationnels sur B.

En particulier, $G_{\underset{\sim}{R}}$ est un groupe de Lie réel et $G_{\underset{\sim}{Z}}$ en est un sous-groupe discret. On notera que si G est un groupe affine défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et f (resp. f') un isomorphisme rationnel sur $\underset{\sim}{Q}$ de G sur un groupe linéaire, alors $f^{-1}(f(G)_{\underset{\sim}{Z}})$ et $f'^{-1}(f'(G)_{\underset{\sim}{Z}})$ sont commensurables (i. e. leur intersection est d'indice fini dans chacun d'eux) de telle sorte que les théorèmes énoncés ci-dessous sont encore vrais pour un groupe affine, le sous-groupe $G_{\underset{\sim}{Z}}$ étant défini "à la commensurabilité près" par la méthode précédente.

Si G est un groupe algébrique (défini sur $\underset{\sim}{Q}$), on notera $X(G)$ (resp. $X_{\underset{\sim}{Q}}(G)$, resp. $\mathfrak{g}$, resp. G^u) le groupe des caractères de G (resp. le groupe des caractères de G rationnels sur $\underset{\sim}{Q}$, resp. l'algèbre de Lie de G, resp. l'ensemble des éléments unipotents de G). Toutes les représentations linéaires envisagées seront des représentations à droite.

Les principaux résultats de [3] sont les théorèmes 1 à 3 ci-dessous.

THÉORÈME 1. - *Soient G un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et $f : G \to GL(V)$ une représentation linéaire rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$. Soient Γ un réseau de $V_{\underset{\sim}{Q}}$ (i. e. un sous-groupe de $V_{\underset{\sim}{Q}}$ tel que l'application canonique $\Gamma \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q} \to V_{\underset{\sim}{Q}}$ soit bijective) invariant par $G_{\underset{\sim}{Z}}$ et X une orbite fermée de G. Alors X est la réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_{\underset{\sim}{Z}}$.*

COROLLAIRE. - Soit $f : G \to G'$ une isogénie rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ de groupes linéaires. Alors $f(G_{\underset{\sim}{Z}})$ et $G'_{\underset{\sim}{Z}}$ sont commensurables.

On se ramène aisément (cf. § 2) au cas où G est réductif connexe. On peut même supposer $f(G_{\underset{\sim}{Z}}) \subset G'_{\underset{\sim}{Z}}$. Si $G' \subset GL(m, \underset{\sim}{C})$, faisons opérer G sur $\underset{\sim}{M}(m, \underset{\sim}{C})$ par translations à droite par l'intermédiaire de f. Alors $G'_{\underset{\sim}{Z}}$ est l'intersection de l'orbite fermée G' de G et du réseau $\underset{\sim}{M}(m, \underset{\sim}{Z})$ invariant par $G_{\underset{\sim}{Z}}$.

Définition. - Un ouvert fondamental du groupe linéaire connexe G défini sur $\underset{\sim}{Q}$ est un sous-ensemble ouvert (pour la topologie ordinaire) U de $G_{\underset{\sim}{R}}$ tel que :

(i) $G_{\underset{\sim}{R}} = U.G_{\underset{\sim}{Z}}$;

(ii) Il existe un sous-groupe compact maximal K de $G_{\underset{\sim}{R}}$ tel que $K.U = U$;

(iii) Pour $x, y \in G_{\underset{\sim}{Q}}$, l'intersection $U^{-1}.U \cap x.G_{\underset{\sim}{Q}}.y$ est finie.

(L'interprétation d'un tel U dans l'espace symétrique $K \backslash G_{\underset{\sim}{R}}$ est évidente.)

THÉORÈME 2. - Tout groupe algébrique linéaire connexe G défini sur $\underset{\sim}{Q}$ possède un ouvert fondamental U. Si $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) = \{1\}$ (alors $G_{\underset{\sim}{R}}$ est unimodulaire, cf. [8], chapitre 2), l'ouvert U est de volume fini pour la mesure de Haar de $G_{\underset{\sim}{R}}$. En particulier $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ est de volume invariant fini. Si réciproquement $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ est de volume fini, alors $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) = \{1\}$.

COROLLAIRE. - Le groupe $G_{\underset{\sim}{Z}}$ est de type fini.

Soit en effet $(G_R)^\circ$ la composante connexe du groupe de Lie $G_{\underset{\sim}{R}}$. Alors les indices $[G_{\underset{\sim}{R}} : (G_{\underset{\sim}{R}})^\circ]$ et $[G_{\underset{\sim}{Z}} : G_{\underset{\sim}{Z}} \cap (G_{\underset{\sim}{R}})^\circ]$ sont finis. D'après (iii), $U^{-1}.U \cap G_{\underset{\sim}{Z}}$ est fini, et le corollaire résulte du lemme élémentaire suivant :

Si un groupe H opère sur un espace topologique connexe M et si U est un ouvert de M tel que $U.H = M$, le groupe H est engendré par les $h \in H$ tels que $U.h \cap U \neq \emptyset$.

THÉORÈME 3. - Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$. L'espace homogène $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ est compact si et seulement si $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) = \{1\}$ et si $G_{\underset{\sim}{Q}} \cap G^u$ (ou, ce qui revient au même $G_{\underset{\sim}{Z}} \cap G^u$) est contenu dans le radical de G.

Ces trois théorèmes se généralisent aisément au cas de groupes définis sur des corps de nombres algébriques, cf. [3]. Ils ont également une formulation adélique

([1]) ; notons G_A le groupe des points adéliques de G muni de la topologie habituelle (le sous-groupe $G_A^0 = G_{\underset{\sim}{R}} \times (\prod G_{\underset{\sim}{Z}_p})$ est ouvert).

THÉORÈME 4. - Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$. Alors l'espace de classes doubles $G_A^0 \setminus G_A/G_{\underset{\sim}{Q}}$ est fini. Pour que l'espace $G_A/G_{\underset{\sim}{Q}}$ soit de volume fini (resp. compact), il faut et il suffit que $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) = \{1\}$ (resp. $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) = \{1\}$ et $G_{\underset{\sim}{Q}} \cap G^u \subset$ radical de G).

THÉORÈME 5. - Soient G un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et $f : G \to GL(m, \underset{\sim}{C})$ une représentation rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$. Soit v un point de $\underset{\sim}{Q}^m$ dont l'orbite sous $f(G)$ est fermée. Alors $v.f_A(G_A) \cap \underset{\sim}{Q}^m$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_{\underset{\sim}{Q}}$.

On tire aisément du théorème 5 le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Soit G comme dans le théorème 5 ; alors les espaces homogènes principaux de G définis sur $\underset{\sim}{Q}$ qui ont des points rationnels dans toutes les complétions de $\underset{\sim}{Q}$ forment un nombre fini de classes d'isomorphisme.

Nous nous proposons de démontrer (approximativement) les théorèmes 2 et 3.

2. Préliminaires de géométrie algébrique.

On rappelle qu'un groupe algébrique linéaire connexe, défini sur un corps de caractéristique 0, est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif connexe par un sous-groupe invariant unipotent connexe, tous deux définis sur le corps de base du groupe. De même un groupe réductif connexe G est produit de son tore central $T = Z(G)^0$ et de son sous-groupe dérivé G' qui est semi-simple connexe. En outre, $X(G) \to X(T)$ et $X_{\underset{\sim}{Q}}(G) \to X_{\underset{\sim}{Q}}(T)$ sont injectifs et de conoyau fini.

Si N est un groupe unipotent défini sur $\underset{\sim}{Q}$, l'espace homogène $N_{\underset{\sim}{R}}/N_{\underset{\sim}{Z}}$ est compact ; si N n'a pas d'élément unipotent rationnel autre que 1, alors $N = \{1\}$.

Si T est un tore défini sur $\underset{\sim}{Q}$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $T_{\underset{\sim}{R}}/T_{\underset{\sim}{Z}}$ est de volume fini,
- $T_{\underset{\sim}{R}}/T_{\underset{\sim}{Z}}$ est compact,
- $X_{\underset{\sim}{Q}}(T) = \{1\}$.

Il résulte "élémentairement" des remarques précédentes qu'il suffit de démontrer les théorèmes 2 et 3 pour des groupes semi-simples, soit :

THÉORÈME 2 bis. - Tout groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$ possède un ouvert fondamental de volume fini.

THÉORÈME 3 bis ("conjecture de Godement"). - Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$. Pour que l'espace homogène $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ soit compact, il faut et il suffit que G n'ait pas d'élément unipotent rationnel autre que l'unité.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$. Si H est un sous-groupe fermé de G, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le groupe H est réductif et défini sur $\underset{\sim}{Q}$;

(ii) Il existe une représentation rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ de G dans un espace vectoriel V et un point $v \in V_{\underset{\sim}{Q}}$ tels que l'orbite v.G soit fermée et que le groupe d'isotropie de v soit $\tilde{H}$.

Celle-ci résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 1 (caractéristique 0). - Soient G un groupe algébrique linéaire réductif connexe et H un sous-groupe fermé de G. Le groupe H est réductif si et seulement si la variété G/H est affine.

La démonstration de [3] est transcendante (cohomologie singulière) et démontre plus généralement que (avec $\underset{\sim}{C}$ comme corps de base), si G/H est une variété de Stein, alors H est réductif. Voir aussi la note ci-dessous.

LEMME 2 (caractéristique quelconque). - Soient G un groupe algébrique affine connexe et H un sous-groupe fermé, tous deux définis sur k. Supposons $H \backslash G$ affine. Il existe une représentation rationnelle sur k de G dans un espace vectoriel V et un point $v \in V_k$ dont le groupe d'isotropie est H et dont l'orbite sous G est fermée.

Soit A (resp. B) l'algèbre affine sur k de G (resp. $H \backslash G$). Alors $B \otimes \overline{k}$ est l'algèbre des invariants de $A \otimes \overline{k}$ dans la représentation régulière droite de G. Soient $b_1, \ldots, b_s$ des générateurs de B, et P_i un sous-espace vectoriel de dimension finie de A contenant b_i tel que $P_i \otimes \overline{k}$ soit stable par G. Alors $V = \sum_i P_i \otimes \overline{k}$ et $v = (b_i)$ satisfont aux conditions exigées.

Note sur la proposition 1. - Sous la forme écrite ci-dessus, cette proposition est nécessaire dans la démonstration du théorème 1. Si on ne cherche à démontrer que les cas particuliers de ce théorème, nécessaires au corollaire sur les isogénies et à la démonstration des théorèmes 2 et 3, on s'aperçoit que l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est en fait la seule utilisée. A ce moment-là, le lemme 1 peut être remplacé par le résultat suivant :

En caractéristique 0, si le groupe H semi-simple opère "bien" sur la variété affine G (par exemple comme sous-groupe fermé du groupe affine G) alors la variété quotient G/H est affine.

3. Décomposition d'Iwasawa et domaines de Siegel.

Soit G_1 le groupe $SL(n, \underset{\sim}{C})$ considéré comme groupe algébrique défini sur $\underset{\sim}{Q}$. Soit K_1 (resp. A_1, resp. N_1) le sous-groupe de $G_{1\underset{\sim}{R}} = SL(n, \underset{\sim}{R})$ formé des matrices orthogonales (resp. diagonales, resp. unipotentes supérieures). On a la décomposition d'Iwasawa "standard" :

$$G_{1\underset{\sim}{R}} = K_1 \cdot A_1 \cdot N_1 \quad .$$

Si G est un sous-groupe algébrique semi-simple défini sur $\underset{\sim}{R}$ de $GL(n, \underset{\sim}{C})$, alors $G \subset G_1$, et MOSTOW (voir, par exemple, [6]) a montré qu'il existe $a \in G_{1\underset{\sim}{R}}$ tel que $a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1}$ soit stable par l'involution de Cartan $x \rightsquigarrow {}^t x^{-1}$ de $G_{1\underset{\sim}{R}}$ autour de K_1. Alors la restriction de cette involution à $a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1}$ est une involution de Cartan de $a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1}$, ce qui fait que $K_1 \cap a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1}$ est un sous-groupe compact maximal de $a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1}$.

On peut même raffiner un peu cette construction : on dira que le sous-groupe G de G_1 satisfait à la condition (a) si :

(a) en notant $K = K_1 \cap G_{\underset{\sim}{R}}$; $A = A_1 \cap G_{\underset{\sim}{R}}$; $N = N_1 \cap G_{\underset{\sim}{R}}$, $G_{\underset{\sim}{R}} = K \cdot A \cdot N$ est une décomposition d'Iwasawa de $G_{\underset{\sim}{R}}$ et les restrictions à α des racines positives de α_1 sont positives (pour les ordres définis par N et N_1).

On a alors le

LEMME 3. - Soit G un sous-groupe algébrique semi-simple de G_1. Il existe $a \in G_{1\underset{\sim}{R}}$ tel que $a \cdot G \cdot a^{-1}$ satisfasse à la condition (a).

Démonstration (facile) dans [3].

Soit G un groupe algébrique semi-simple défini sur $\underset{\sim}{R}$ et $G_{\underset{\sim}{R}} = K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa. Notons $\Sigma \subset \alpha^*$ l'ensemble des racines simples de $G_{\underset{\sim}{R}}$ par rapport à A et $\log : A \to \alpha$ l'application inverse de l'application exponentielle.

Définition. - Un domaine de Siegel de G est un ensemble $\mathfrak{S} = K.A_t.\omega$, t réel positif, où ω est un sous-ensemble compact de N et où

$$A_t = \{a \in A, \ \alpha(\log a) \leqslant t, \ \alpha \in \Sigma\} .$$

Les domaines de Siegel de G forment un ensemble filtrant croissant dont la limite est $G_{\underset{\sim}{R}}$.

Dans la fin de ce paragraphe, nous étudierons certaines propriétés des domaines de Siegel de $G_1 = SL(n, \underset{\sim}{C})$ relativement à la décomposition "standard" introduite ci-dessus. Il est classique (réduction des formes quadratiques) qu'un domaine de Siegel suffisamment grand de G_1 satisfasse à $G_{1\underset{\sim}{R}} = \mathfrak{S}_1.G_{1\underset{\sim}{Z}}$. Un tel domaine de Siegel de G_1 sera appelé standard. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - L'intérieur d'un domaine de Siegel standard de G_1 est un ouvert fondamental de G_1.

La condition (i) résulte de ce que l'intérieur d'un domaine de Siegel standard contient un domaine de Siegel standard. La condition (ii) est évidente. Quant à (iii), ce n'est autre que la traduction du classique théorème de Siegel, [7].

Le lemme suivant joue un rôle important dans la démonstration du théorème 2. Nous renvoyons à [3] pour la démonstration.

LEMME de finitude. - Soit $f : G_1 \to GL(m, \underset{\sim}{C})$ une représentation rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$. Soit $v \in \underset{\sim}{R}^m$ un point dont l'orbite sous $f(G_{1\underset{\sim}{R}})$ est fermée (pour la topologie ordinaire) et dont le groupe d'isotropie dans $G_{1\underset{\sim}{R}}$ est stable par $x \rightsquigarrow {}^t x$. Soit $\mathfrak{S}_1$ un domaine de Siegel de G_1 (pour la décomposition standard). Alors $v.f(\mathfrak{S}_1) \cap \underset{\sim}{Z}^m$ est fini.

4. Le volume fini. Démonstration du théorème 2.

PROPOSITION 3. - Soient G un sous-groupe semi-simple connexe de G_1 défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et $a \in G_{1\underset{\sim}{R}}$ tel que $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$ soit stable par $x \rightsquigarrow {}^t x$. Soit $\mathfrak{S}_1$ un domaine de Siegel standard de G_1. Il existe un nombre fini d'éléments $b_1, \ldots, b_m \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$ tels que l'intérieur U de $\overline{U} = \left(\bigcup_{i=1}^{m} a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_i\right) \cap G_{\underset{\sim}{R}}$ soit un ouvert fondamental de G.

Les groupes G et G_1 étant réductifs connexes définis sur $\underset{\sim}{Q}$, on peut appliquer la proposition 1. On peut même s'arranger pour trouver une représentation $f : G_1 \to GL(r, \underset{\sim}{C})$ rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ telle que $f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \subset SL(r, \underset{\sim}{Z})$ et $v \in \underset{\sim}{Z}^m$ tels que l'orbite $v.f(G_1)$ soit fermée et que le groupe d'isotropie de v soit H. On peut alors voir que $v.f(G_{1\underset{\sim}{R}})$ est fermée pour la topologie ordinaire. Soit $v' = v.f(a^{-1})$. L'orbite $v'.f(G_{1\underset{\sim}{R}}) = v.f(G_{1\underset{\sim}{R}})$ est fermée et le groupe d'isotropie de v' dans $G_{1\underset{\sim}{R}}$ est $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$ stable par $x \rightsquigarrow {}^t x$. On peut alors appliquer le lemme de finitude et en déduire que $v.f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \cap v.f(a^{-1}.\mathfrak{S}_1)$ qui est contenu dans $\underset{\sim}{Z}^m \cap v'.f(\mathfrak{S}_1)$ est fini. Il existe donc des $b_1, \ldots, b_m \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$ tels que

$$v.f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \cap v.f(a^{-1}.\mathfrak{S}_1) = \{v.f(b_1^{-1}), \ldots, v.f(b_m^{-1})\} .$$

Soit alors

$$H = a.G_{\underset{\sim}{R}} = \{x \in G_{1\underset{\sim}{R}}, \quad v.f(a^{-1}).f(x) = v\} .$$

Soit $h \in H$; par la théorie de la réduction, on peut écrire $h = s.b$, $s \in \mathfrak{S}_1$, $b \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$. Mais

$$v.f(a^{-1}).f(s) = v.f(b^{-1}) ,$$

ce qui par le résultat précédent, montre que

$$v.f(b^{-1}) = f(b_i^{-1}) ,$$

pour un certain i. On a alors

$$b_i^{-1}.b \in G \cap G_{1\underset{\sim}{Z}} = G_{\underset{\sim}{Z}} ,$$

c'est-à-dire $b \in b_i \cdot G_{\underset{\sim}{Z}}$, d'où

$$h = s \cdot b \in \mathfrak{S}_1 \cdot b_i \cdot G_{\underset{\sim}{Z}} \quad .$$

Si on note

$$\overline{U} = (\cup\, a^{-1} \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot b_i) \cap G_{\underset{\sim}{R}} \quad ,$$

on vient de démontrer que $H \subset a \cdot \overline{U} \cdot G_{\underset{\sim}{Z}}$, c'est-à-dire $G_{\underset{\sim}{R}} \subset \overline{U} \cdot G_{\underset{\sim}{Z}}$.

Appliquant ce résultat à un domaine de Siegel standard contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{S}_1$, on voit que $G_{\underset{\sim}{R}} = U \cdot G_{\underset{\sim}{Z}}$, soit (i). D'autre part, $a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1} \cap K_1$ est un sous-groupe compact maximal de H , donc $K = a^{-1} \cdot (a \cdot G_{\underset{\sim}{R}} \cdot a^{-1} \cap K_1) \cdot a$ un sous-groupe compact maximal de $G_{\underset{\sim}{R}}$ qui vérifie (ii).

Démontrons (iii). Soient x , $y \in G_{\underset{\sim}{Q}}$ et $u \in U^{-1} \cdot U \cap x \cdot G_{\underset{\sim}{Z}} \cdot y$. Il existe i et j tels que $u \in (a^{-1} \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot b_i)^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot b_j)$, ce qui entraîne

$$b_i \cdot u \cdot b_j^{-1} \in \mathfrak{S}_1^{-1} \cdot \mathfrak{S}_1 \cap b_i \cdot x \cdot G_{\underset{\sim}{Z}} \cdot y \cdot b_j^{-1}$$

qui est fini par le théorème de Siegel.

PROPOSITION 4. - Soit G un sous-groupe semi-simple connexe de G_1 défini sur $\underset{\sim}{Q}$ satisfaisant à la condition (a) du § 3. Soient $\mathfrak{S}_1$ un domaine de Siegel de G_1 et $x \in G_{1\underset{\sim}{R}}$. Il existe un domaine de Seigel $\mathfrak{S}$ de G et un nombre fini d'éléments x_1 , ... , x_q de $G_{\underset{\sim}{R}}$ tels que

$$\mathfrak{S}_1 \cdot x \cap G_{\underset{\sim}{R}} \subset \bigcup_{i=1}^{q} \mathfrak{S} \cdot x_i \quad .$$

Reprenons les notations du § 3 et soit M_1^* le normalisateur de A_1 dans K_1 . D'après le théorème de Bruhat, on peut écrire $x = a \cdot u \cdot m \cdot v$; $a \in A_1$; u , $v \in N_1$; $m \in M_1^*$. Comme il existe un domaine de Siegel de G_1 contenant $\mathfrak{S}_1 \cdot a \cdot u$, on peut se contenter de démontrer le théorème lorsque $x = m \cdot v$. Remarquons de plus que si $n \in N$, alors

$$\mathfrak{S}_1 \cdot x \cdot n \cap G_{\underset{\sim}{R}} = (\mathfrak{S}_1 \cdot x \cap G_{\underset{\sim}{R}}) \cdot n \quad .$$

La proposition résultera alors du

LEMME 4. - Soit M^* (resp. M) le normalisateur (resp. le centralisateur) de A dans K. Soient $x_i \in M^*$ des représentants du groupe de Weyl M^*/M de G_R. Il existe un sous-ensemble $N' \subset N_1$ tel que $N_1 = N' \cdot N$ et que, si $x \in M_1^* \cdot N'$ et si $\mathfrak{S}_1$ est un domaine de Siegel de G_1, il existe un domaine de Siegel $\mathfrak{S}$ de G tel que

$$\mathfrak{S}_1 \cdot x \cap G_R \subset \bigcup \mathfrak{S} \cdot x_i \quad .$$

Ce lemme résulte des deux faits suivants :

1° Les domaines de la forme $K \cdot a_o \cdot A^- \cdot \omega$ où $a_o \in A$, ω est un sous-ensemble compact de N et A^- l'exponentielle de la chambre de Weyl négative, forment un ensemble cofinal à l'ensemble des domaines de Siegel.

2° Le groupe de Weyl est transitif sur les chambres de Weyl.

Pour la démonstration, voir [3].

Démonstration du théorème 2 bis. - Soit G un sous-groupe semi-simple connexe de G_1 défini sur Q et $a \in G_{1R}$ tel que $a \cdot G \cdot a^{-1}$ satisfasse à (a) [lemme 3]. L'existence d'un ouvert fondamental a été démontrée dans la proposition 3. Il ne reste plus qu'à prouver que celui-ci est de volume fini ; on doit donc voir que $a^{-1} \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot b_i \cap G_R$ est de volume fini dans G_R. Il suffit de voir que

$\mathfrak{S}_1 \cdot b_i \cdot a^{-1} \cap a \cdot G_R \cdot a^{-1}$ est de volume fini dans $a \cdot G_R \cdot a^{-1}$, ce qui, vue la proposition 4, découlera du lemme suivant.

LEMME 5. - Soit G un groupe semi-simple défini sur R. Tout domaine de Siegel de G est de mesure finie dans G_R.

Si dg, dk, da, dn désignent les mesures de Haar de G_R, K, A, N et si s est la somme des racines positives de G_R par rapport à A, on sait ([4], lemme 35), que

$$dg = \exp s(\log a)\, dk \cdot da \cdot dn \quad .$$

Il suffit donc de montrer que $\int_{A_t} \exp s(\log a)\, da$ est finie ; or ceci résulte

de ce que les $\alpha(\log a)$, $\alpha \in \Sigma$ forment un système de coordonnées dans $\mathbf{A}$, et que

$$s = \Sigma\, m_\alpha \cdot \alpha \,, \quad m_\alpha > 0 \qquad .$$

5. Conjecture de Godement. Démonstration du théorème 3.

LEMME 6. - Soit G un groupe algébrique semi-simple défini sur k ($k = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$). Si $x \in G_k$ (resp. $y \in g_k$), la classe de conjugués de x dans G_k (resp. Ad $G(y)$) est fermée (pour la topologie ordinaire) si et seulement si x (resp. y) est semi-simple.

La démonstration de ce lemme, que l'on trouvera dans [3], utilise le théorème de Jacobson-Morosow.

On démontre aisément, d'autre part, le résultat suivant de topologie générale :

LEMME 7. - Soit G un groupe localement compact opérant continuement à droite dans un espace topologique localement compact M. Soit $m \in M$. Si H est un sous-groupe fermé de G tel que $m.H$ soit fermé et $H \backslash G$ compact, alors $m.G$ est fermé.

Soit alors G un groupe algébrique linéaire semi-simple défini sur $\underset{\sim}{R}$. Soit H un sous-groupe discret de $G_{\underset{\sim}{R}}$ tel que $H \backslash G_{\underset{\sim}{R}}$ soit compact. Faisons opérer G sur lui-même par automorphismes intérieurs. Comme H est discret, toute classe de conjugués dans H est fermée ; les deux lemmes précédents montrent alors que tout élément de H est semi-simple, ce qui entraîne la nécessité de la condition de Godement.

Soit réciproquement G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe tel que tous les éléments de $G_{\underset{\sim}{Q}}$ (ou de $g_{\underset{\sim}{Q}}$) soient semi-simples. Nous voulons montrer que $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ est compact. Dans la représentation adjointe de G , tous les points de $g_{\underset{\sim}{Q}}$ ont des orbites fermées d'après le lemme 6. On peut, d'autre part, et toujours à l'aide du théorème de Jacobson-Morosow, démontrer que tout sous-groupe de G est réductif et satisfait aux conditions du théorème 3. Procédant par récurrence sur la dimension de G , il suffit de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Soit G un groupe linéaire algébrique semi-simple connexe défini sur $\underset{\sim}{Q}$. Supposons que $H_{\underset{\sim}{R}}/H_{\underset{\sim}{Z}}$ soit compact pour tout sous-groupe algébrique

propre H de G. Supposons également qu'il existe une représentation linéaire rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ et de noyau fini $f : G \to GL(V)$ telle que tous les points de $V_{\underset{\sim}{Q}}$ aient des orbites fermées. Alors $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ est compact.

Comme f est complètement réductible, on peut en retirer la partie triviale et supposer que le groupe d'isotropie d'un point quelconque est distinct de G. La démonstration consiste alors à construire, à l'aide des hypothèses sur G uniquement, un compact $L \subset V$ (par le lemme de Minkowski) et un nombre fini de $v_i \in V_{\underset{\sim}{Q}}$ (par le théorème des invariants) tels que si $g \in G_{\underset{\sim}{R}}$, il existe i et $b \in G_{\underset{\sim}{Z}}$ tels que $v_i \cdot f(b \cdot g) \in L$.

Si on note alors

$$X_i = \{g \in G_{\underset{\sim}{R}}, \quad v_i \cdot f(g) \in L\} \quad ,$$

on a

$$G_{\underset{\sim}{R}} = \bigcup_i G_{\underset{\sim}{Z}} \cdot X_i \quad .$$

Si G_i est le groupe d'isotropie de v_i, G_i est défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et distinct de G ; il existe donc un compact $B_i \subset G_{\underset{\sim}{R}}$ tel que $G_{i\underset{\sim}{R}} = G_{i\underset{\sim}{Z}} \cdot B_i$. D'après un théorème de topologie des groupes (voir par exemple [5], p. 65), il existe d'autre part un compact $B'_i \subset G_{\underset{\sim}{R}}$ tel que $X_i = G_{i\underset{\sim}{R}} \cdot B'_i$. On a alors

$$G_{\underset{\sim}{R}} = G_{\underset{\sim}{Z}} \cdot \left(\bigcup_i B_i \cdot B'_i\right) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.). - Some properties of adele groups attached to algebraic groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 583-585.

[2] BOREL (A.) and HARISH-CHANDRA. - Arithmetics subgroups of algebraic groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 579-583.

[3] BOREL (A.) et HARISH-CHANDRA (à paraître).

[4] HARISH-CHANDRA. - Representations of a semi-simple lie group on a Banach space, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 185-243.

[5] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). - Topological transformation groups. - New York, London, Interscience Publishers, 1955 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 1).

[6] MOSTOW (G. D.). - Self-adjoint groups, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 44-55.

[7] SIEGEL (Carl Ludwig). - Einheiten quadratischer Formen, Abh. math. Sem. Univ. Hamb., t. 13, 1939, p. 209-239.

[8] WEIL (André). - Adeles and algebraic groups. Notes by M. Demazure and T. Ono. - Princeton, Institute for advanced Study, 1961.