SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MORIN

Champs de vecteurs sur les sphères

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 233, p. 163-189

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__163_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 233

Février 1962

CHAMPS DE VECTEURS SUR LES SPHÈRES D'APRÈS J. F. ADAMS

par Bernard MORIN

Depuis les travaux de JAMES [7] et d'ATIYAH [3], on sait ramener le problème de déterminer le nombre maximum de champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère S_{n-1} (cf. définition 1) à une question de théorie de l'homotopie concernant les espaces projectifs tronqués (cf. définition 8 et théorème 2). Pour obtenir le résultat souhaité, il suffirait de montrer que l'anneau de "cohomologie extraordinaire" [4] $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ de dimension 0 du CW-complexe X défini au théorème 3 n'admet pas de décomposition de la forme :

$$\mathbb{Z} + K' \qquad . \tag{1}$$

Malheureusement, la structure multiplicative ne suffit pas en général pour mettre en évidence l'impossibilité d'une telle décomposition (cf. proposition 12 (c)), et on doit faire appel pour cela à la λ-structure [6] de cet anneau de cohomologie (cf. définition 9). (L'opérateur λ_i est l'extension à $K_\Lambda(X)$ de la puissance extérieure i-ième définie pour tout fibré vectoriel ξ de base X.) Or on n'a pu jusqu'ici parvenir à calculer les λ_i dans le cas qui nous occupe. Toutefois ADAMS [2], définit à partir des λ_i (cf. définition 11) des opérations cohomologiques

$$\psi_K^\Lambda : K_\Lambda(X) \to K_\Lambda(X) \qquad (\Lambda = \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

que l'on peut calculer (cf. proposition 17) et qui suffisent à mettre en évidence l'impossibilité de la décomposition (1) (cf. théorème 3, § 6).

1. Champs de vecteurs sur les sphères.

DÉFINITION 1.

a. Soit V une variété différentiable. Un champ de vecteurs sur V est une section continue du fibré tangent $\tau(V) \to V$ de V. Lorsque V est la sphère unité S_{n-1} de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, un champ v peut se définir par la donnée d'une application $v' : S_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ telle que le produit scalaire $\langle x , v'(x) \rangle$ soit nul pour tout $x \in S_{n-1}$.

b. On dit que r champs de vecteurs v_1 , v_2 , ... , v_r sur V sont linéairement indépendants, si les vecteurs $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... , $v_r(x)$ sont linéairement indépendants pour tout $x \in V$. (En particulier, la condition pour qu'un champ de vecteurs v soit linéairement indépendant est que $v(x) \neq 0$. pour tout $x \in V$.)

PROPOSITION 1. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. il existe r champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère S_{n-1} .

b. il existe une section de la variété de Stiefel

$$O_{n,r+1} = O_n / O_{n-r-1}$$

des $(r + 1)$-repères de $\mathbb{R}^n$ pour la fibration

$$O_{n,r+1} \to O_{n,1} = S_{n-1}$$

(où O_k désigne le groupe orthogonal réel de dimension k).

(a) entraîne (b) par les procédés classiques d'orthogonalisation.

PROPOSITION 2. - S'il existe r champs de vecteurs v_1 , v_2 , ... , v_r linéairement indépendants sur la sphère S_{n-1} , alors, pour tout entier p , on peut construire r champs de vecteurs $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ... , $\bar{v}_r$ linéairement indépendants sur la sphère S_{pn-1} . En effet, on pose

$$\mathbb{R}^{pn} = \bigoplus^p \mathbb{R}^n$$

et l'on met chaque $x \in S_{pn-1}$ sous la forme :

$$x = (\alpha_1 x_1 , \alpha_2 x_2 , \ldots , \alpha_p x_p) \quad (\alpha_i \in \mathbb{R} \text{ et } x_i \in S_{n-1}) \quad .$$

On a alors

$$\bar{v}_j(x) = (\alpha_1 v_j(x_1) , \alpha_2 v_j(x_2) , \ldots , \alpha_p v_j(x_p)) \qquad (1 \leq j \leq r)$$

DÉFINITION 2. - Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$n = (2a(n) + 1)2^{b(n)}$$

et

$$b(n) = c(n) + 4d(n)$$

où les valeurs des fonctions a , b , c , d sont des entiers positifs ou nuls et $0 \leqslant c \leqslant 3$. On définit alors la fonction $\rho(n)$ en posant :

$$\rho(n) = 2^{c(n)} + 8d(n) \quad .$$

THÉORÈME 0 (HURWITZ, RADON, ECKMANN). - Soit $\mathcal{G}_r$ le groupe engendré par les r générateurs a_1 , a_2 , ... , a_r (r entier $\geqslant 1$) assujettis aux relations :

$$a_r^2 = 1 \ , \quad a_k^2 = a_r \ , \quad a_r a_k = a_k a_r \ , \quad a_k a_\ell = a_r a_\ell a_k \quad (1 \leqslant k, \ \ell \leqslant p-1 \ , \ k \neq \ell).$$

Pour qu'il existe une représentation orthogonale

$$\varphi : \mathcal{G}_r \to \mathcal{O}_n \qquad (n \text{ entier } \geqslant 1)$$

de $\mathcal{G}_r$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\varphi(a_r) = - I$$

il faut et il suffit que $r \leqslant \rho(n)$, où $\rho(n)$ est la fonction de la définition 2.

On trouvera la démonstration de ce théorème dans [5].

COROLLAIRE. - Quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, il existe $\rho(n) - 1$ champ de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère de dimension $n - 1$. En effet, si $\varphi : \mathcal{G}_{\rho(n)} \to \mathcal{O}_n$ est une représentation vérifiant les propriétés du théorème 0, les $\rho(n) - 1$ fonctions

$$v_i'(x) = \varphi(a_i)\, x \qquad (1 \leqslant i \leqslant \rho(n) - 1)$$

définissent des champs de vecteurs linéairement indépendants sur S_{n-1} , car, pour tout $x \in S_{n-1}$, on a

$$\langle v_i'(x) \ , \ v_j'(x) \rangle = \delta_{ij} \qquad \text{(symbole de Kronecker)} \qquad (1 \leqslant i \ , \ j \leqslant \rho(n)) \quad .$$

THÉORÈME 1 (ADAMS). – Quel que soit l'entier $n \geq 1$, soit $\rho(n)$ la fonction de la définition 2 ; alors il n'existe pas $\rho(n)$ champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère de dimension $n - 1$.

Le but de cet exposé est de donner le plan de la démonstration de ce théorème qui sera une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3.

2. Type d'homotopie stable des complexes de Thom.

DÉFINITION 3.

a. Soient X et Y deux espaces topologiques, on désigne par $[X , Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans Y et par $\{X , Y\}$ la limite inductive $\varinjlim [S^n X , S^n Y]_{(n \to \infty)}$ où $S^n X$ désigne la n-ième suspension de X. Les éléments de $\{X , Y\}$ s'appellent des S-applications. L'image d'un élément $\varphi \in [X , Y]$ dans $\{X , Y\}$ est noté $\{\varphi\}$.

b. On appelle catégorie stable la catégorie $\mathcal{S}$ dont les objets sont des espaces topologiques (ici des CW-complexes finis) et les morphismes des S-applications.

c. On dit que X et Y ont même S-type s'il existe deux entiers j et k tels que $S^j X$ ait même type d'homotopie que $S^k Y$.

Remarque.

1° Si $\dim X \leq 2 \operatorname{conn} Y$, où $\operatorname{conn} Y$ désigne la connectivité de Y alors

$$[X , Y] \to [SX , SY]$$

est un isomorphisme.

Si $\dim X = 2 \operatorname{conn} Y + 1$, alors l'application :

$$[X , Y] \to [SX , SY]$$

est surjective.

2° Toute S-application $f : X \to Y$ définit de façon évidente des applications

$$f_* : H_n(X , Z) \to H_n(Y , Z)$$

$$f^* : H^n(Y , Z) \to H^n(X , Z)$$

et

$$f_* : \Sigma_n(X) \to \Sigma_n(Y)$$

où $\Sigma_n(X)$ est le groupe d'homotopie stable

$$\lim_{\to} \pi_{n+m}(S^m X)_{(m\to\infty)} \quad .$$

DÉFINITION 4.

a. Soit X un sous-polyèdre de la sphère S_n, on dit que le sous-polyèdre X^* de $S_n - X$ est un n-dual au sens fort de X, si X^* est un S-rétracte par déformation de $S^n - X$, c'est-à-dire si l'inclusion $X^* \subset S_n - X$ est une S-équivalence.

b. Soient X et X^* des CW-complexes finis, X' et X'^* des sous-polyèdres de S_n, tels que X'^* soit un n-dual au sens fort de X' et $f : X \to X'$, $f^* : X'^* \to X^*$ des S-équivalences, on dit que X'^* est un n-dual au sens faible de X relativement à f et à f^*.

Remarque. - Si X^* est un n-dual de X, on a les isomorphismes

$$H^p(X , Z) \xrightarrow{d_n} H_{n-p-1}(H^* , Z^*) \qquad \text{(dualité d'Alexander)} \quad .$$

PROPOSITION 3.

a. Tout CW-complexe fini admet un n-dual pour n assez grand.

b. Si les complexes X' et X'' sont respectivement m-dual et n-dual à X, alors X' et X'' ont même S-type.

c. Si X^* est un n-dual de X, alors X est un n-dual de X^*, de plus SX^* est un $n+1$-dual de X et X^* un $n+1$-dual de SX.

d. Si X^* et Y^* sont des n-duals des complexes X et Y respectivement, il existe un homomorphisme unique

$$D_n : \{X , Y\} \to \{Y^* , X^*\}$$

jouissant des propriétés suivantes

(i) Si $i : X \to Y$ et $i' : Y^* \to X^*$ sont des inclusions, alors

$$D_n\{i\} = \{i'\} \quad .$$

(ii) Si Z^* est un n-dual du complexe Z et si $f \in \{X , Y\}$ et $g \in \{Y , Z\}$ alors

$$D_n(gf) = (D_n f)(D_n g) \quad .$$

(iii) L'application $D_n : \{Y^* , X^*\} \to \{X , Y\}$ est inverse de l'application $D_n : \{X , Y\} \to \{Y^* , X^*\}$.

(iv) Si l'on prend SX^* et SY^* pour n + 1 dual de X et Y respectivement, alors

$$SD_n = D_{n+1} : \{X , Y\} \to \{SY^* , SX^*\} \quad .$$

(v) Si l'on prend X^* et Y^* pour n + 1-duals de SX et SY respectivement, alors

$$D_{n+1} S = D_n : \{X , Y\} \to \{Y^* , X^*\} \quad .$$

(vi) Pour tout $f \in \{X , Y\}$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^p(X) \\ \downarrow{\scriptstyle d_n} & & \downarrow{\scriptstyle d_n} \\ H_{n-p-1}(D_n Y) & \xrightarrow{(D_n f)} & H_{n-p-1}(D_n X) \end{array}$$

On trouvera une démonstration de la proposition 3 dans [8].

DÉFINITION 5. - Soit X un espace muni d'un point-base x .

a. On dit que X est <u>réductible</u> (resp. S-<u>réductible</u>) s'il existe un entier n et une application (resp. une S-application)

$$f : (S_n , s) \to (X , x) \qquad (\text{ s point-base de la sphère } S_n)$$

qui induise un isomorphisme de l'homologie réduite en toute dimension $q \geqslant n$.

b. On dit que X est <u>coréductible</u> (resp. S-<u>coréductible</u>) s'il existe un entier m et une application (resp. une S-application)

$$g : (X , x) \to (S_m , s)$$

qui induise un isomorphisme de la cohomologie réduite en toute dimension $q \leq m$.

Remarque. - Il est clair que la réductibilité et la coréductibilité (resp. la S-réductibilité et la S-coréductibilité) sont des propriétés du type d'homotopie (resp. S-type) et qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X soit S-réductible et que son dual X^* soit S-coréductible.

DÉFINITION 6. - Soient X un CW-complexe fini, α un fibré vectoriel réel sur X , $\overline{\alpha}$ et (α) respectivement les fibrés en boules et en sphères associés à une réduction orthogonale de α , on appelle complexe de Thom de α l'espace $X^\alpha = \overline{\alpha}/(\alpha)$ obtenu en identifiant le sous-espace (α) de $\overline{\alpha}$ à un point.

Ainsi pour le fibré trivial de dimension 0 , on a :

$$X^0 = X \cup \{p\} \qquad (\ p \text{ point-base extérieur à } X\ ) \quad .$$

Si n désigne le fibré trivial de dimension n , on a

$$X^n = S^n(X^0) \quad .$$

Comme X est fini, tout élément $x \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ du groupe de Grothendieck réel de X peut se représenter par un fibré vectoriel. On peut donc définir le S-type du complexe de Thom de tout $\alpha \in K_{\mathbb{R}}(X)$.

DÉFINITION 7. -

a. On dit que deux espaces fibrés E et E' de base X ont même type d'homotopie fibrée s'il existe des applications préservant les fibrés :

$$f : E \to E' \quad \text{et} \quad f' : E' \to E$$

telles que $f \circ f'$ et $f' \circ f$ soient homotopes à l'identité par des homotopies préservant les fibrés.

b. Soient (α) et (β) des fibrés en sphère associés aux fibrés orthogonaux α et β sur X ; on dit que (α) et (β) ont même type d'homotopie fibrée stable s'il existe deux entiers m et n tels que $(\alpha \oplus m)$ et $(\beta \oplus n)$ aient même type d'homotopie fibrée (où $(\alpha \oplus m)$ désigne le fibré en sphère associé à la somme directe de α et du fibré trivial de dimension m .)

c. On définit ainsi une relation d'équivalence sur les éléments $K_{\mathbb{R}}(X)$. La classe de l'élément $\alpha \in K_{\mathbb{R}}(X)$ sera notée $J(\alpha)$, et l'ensemble des $J(\alpha)$ pour tout $\alpha \in K_{\mathbb{R}}(X)$ sera noté $J(X)$.

PROPOSITION 4. – La somme de Whitney induit sur $J(X)$ une structure de groupe abélien fini.

PROPOSITION 5. – Soient α et β des éléments de $K_{\mathbb{R}}(X)$ tels que $J(\alpha) = J(\beta)$, alors X^{α} et X^{β} ont même S-type. De plus si le complexe X est connexe alors $J(\alpha) = 0$ si et seulement si X^{α} et X^{0} ont même S-type.

PROPOSITION 6. – Soit X une variété différentiable, compacte, sans bord, soit τ le fibré tangent à X ; alors, pour tout $\alpha \in K_{\mathbb{R}}(X)$, le complexe $X^{-\alpha-\tau}$ est un dual du complexe X^{α}.

Des démonstrations des propositions 4, 5 et 6 se trouvent dans [3].

3. Espaces projectifs tronqués.

DÉFINITION 8. – Pour tout entier $n \geqslant -1$, soit ΛP_n l'espace projectif de dimension n sur le corps Λ ($\Lambda P_{-1} = \emptyset$, $\Lambda = \mathbb{R}$ réel ou $\mathbb{C}$ complexe) ; on appelle espace projectif tronqué de type (n, k) $(-1 \leqslant k \leqslant n)$ l'espace

$$\Lambda P_{n,k} = \Lambda P_n / \Lambda P_k$$

obtenu en identifiant dans la somme $\Lambda P_n \cup \{p\}$ un sous-espace projectif de dimension k au point-base p.

PROPOSITION 7. – Soit ξ le fibré vectoriel, réel, de dimension 1, non trivial sur l'espace projectif $\mathbb{R}P_{k-1}$ de dimension $k-1$.

a. si τ désigne le fibré tangent à la variété P_{k-1}, alors

$$\tau \oplus 1 \backsim k\xi \qquad (1 \text{ désignant le fibré trivial de dimension } 1) \ .$$

b. L'espace projectif tronqué $\mathbb{R}P_n / \mathbb{R}P_{n-k}$ est isomorphe au complexe de Thom :

$$\mathbb{R}P_{k-1}^{(n-k+1)\xi} \qquad \text{(cf. [3])} \ .$$

Remarque. – La proposition 7 permet de définir le S-type des espaces projectifs tronqués $\mathbb{R}P_{n,n-k}$ pour tout couple d'entiers $n, k \in \mathbb{Z}$ tels que $k \geqslant 0$.

D'après la proposition 5, si r désigne l'ordre de $J(\xi)$ dans $J(\mathbb{R}P_{k-1})$ pour tout entier q tel que $n + qr > 0$, l'espace $P_{n+qr,n-k+qr}$ représente le S-type de $\mathbb{R}P_{n,n-k}$.

COROLLAIRE. - Pour tout couple d'entiers n, $k \geqslant 0$, $k \leqslant n$, le S-type d'un dual de l'espace projectif tronqué $\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_k$ est de la forme $\mathbb{R}P_{-k-2,-n-2}$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate des propositions 6 et 7 et de la remarque précédente.

Soit O_n le groupe orthogonal réel de dimension n. L'application qui fait correspondre à chaque hyperplan de $\mathbb{R}^n$ la symétrie par rapport à cet hyperplan, se prolonge en une injection :

$$\mathbb{R}P_{n-1,-1} = \mathbb{R}P_{n-1} \cup \{p\} \to O_n$$

qui applique p sur l'identité. Par passage au quotient, on obtient alors pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ une application également injective

$$\mathbb{R}P_{n-1,n-k-1} \to O_{n,k} = O_n/O_k$$

de l'espace projectif réel tronqué de type $n-1$, $n-k-1$ dans la variété de Stiefel réelle de type n, k, telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P_{n-1,n-k-1} & \xrightarrow{\ i\ } & O_{n,k} \\ \Big\downarrow \rho & & \Big\downarrow \pi \\ \mathbb{R}P_{n-1,n-2} = S_{n-1} & = & O_{n,1} \end{array}$$

PROPOSITION 8. - Soient n et k des entiers positifs tels que $n \geqslant 2k$ ou $k = 1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. la fibration de la variété de Stiefel :

$$O_{n,k} \to S_{n-1}$$

admet une section.

b. l'espace projectif tronqué $\mathbb{R}P_{n-1,n-k-1}$ est réductible.

Cette proposition est démontrée dans [7] en s'appuyant sur le fait que

$$\pi_i(\mathcal{O}_{n,k}\ ,\ \mathbb{R}P_{n-1,n-k-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n - 2k \quad .$$

THÉORÈME 2 (JAMES, ATIYAH). - Soient n un entier $\geqslant 1$, et $\rho(n)$ la fonction de la définition 2 ; s'il existait $\rho(n)$ champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère de dimension $n - 1$, alors il existerait un entier $m \geqslant 1$ avec

$$\rho(m) = \rho(n)$$

tel que l'espace projectif tronqué

$$\mathbb{R}P_{m+\rho(m)}/\mathbb{R}P_{m-1}$$

soit coréductible.

Démonstration. - Supposons les hypothèses du théorème vérifiées. Alors, pour tout entier p, il existe $\rho(n)$ champs de vecteurs sur S_{pn-1} (proposition 2), et par suite la fibration

$$\mathcal{O}_{pn}/\mathcal{O}_{pn-\rho(n)-1} \to S_{pn-1}$$

($\mathcal{O}_k$ groupe orthogonal de dimension k) admet une section (proposition 1). Si $pn \geqslant 2(\rho(n) + 1)$, l'espace projectif tronqué (définition 8) $\mathbb{R}P_{pn-1}/\mathbb{R}P_{pn-\rho(n)-2}$ est réductible (définition 5 et proposition 8).

Le S-type (définition 3(c)) d'un dual (définition 4) de cet espace est donné par le symbole $\mathbb{R}P_{\rho(n)-pn,-pn-1}$ (corollaire de la proposition 7).

Soit ξ le fibré vectoriel réel de dimension 1, non trivial sur $\mathbb{R}P_{(n)}$, et soit r l'ordre de l'élément $J(\xi)$ du groupe $J(\mathbb{R}\ ,\ P_{\rho(n)})$ (proposition 4) ; pour tout entier q tel que $qr - pn \geqslant 1$, l'espace projectif tronqué $\mathbb{R}P_{m+\rho(n)}/\mathbb{R}P_{m-1}$ (où l'on a posé $m = qr - pn$) est un dual de $\mathbb{R}P_{pn-1}/\mathbb{R}P_{pn-\rho(n)-2}$ (remarque de la proposition 7), et par suite il est S-coréductible (définition 5 (b) et remarque).

Si $m \geqslant \rho(n) + 3$, c'est-à-dire si q est assez grand, l'espace $\mathbb{R}P_{m+\rho(n)}/\mathbb{R}P_{m-1}$ est S-coréductible, si et seulement s'il est coréductible (cf. remarque 1 suivant

la définition 3). Si p est impair et si q est divisible par $2n$, alors $\rho(m) = \rho(n)$, ce qui achève la démonstration.

4. Les anneaux de Grothendieck des espaces projectifs tronqués.

Les détails des démonstrations données dans les paragraphes 4, 5 et 6 (b) se trouvent dans [2]. Dans tout ce qui suit, Λ désigne soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pour tout CW-complexe fini X, on note $K_\Lambda(X)$ l'anneau des fibrés vectoriels sur Λ de base X. Lorsque X est connexe (ce qui sera toujours le cas ici) on a l'homomorphisme d'anneaux à élément unité

$$rg : K_\Lambda(X) \to \mathbb{Z}$$

qui associe à chaque fibré son rang, et l'on pose

$$\tilde{K}_\Lambda(X) = \ker(rg) \quad .$$

On a la décomposition naturelle

$$K_\Lambda(X) = \tilde{K}_\Lambda(X) \oplus \mathbb{Z} \quad . \tag{2}$$

LEMME 1. — Soient $c : K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X)$ l'homomorphisme d'anneaux défini par la complexification des fibrés vectoriels,

$$r : K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$$

l'homomorphisme de groupes obtenu en considérant la structure réelle sous-jacente à chaque fibré complexe, et

$$t : K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X)$$

l'homomorphisme d'anneaux défini par la conjugaison dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$cr = id + t \quad \text{et} \quad rc = 2id \quad .$$

Nota Bene. — Les homomorphismes r, c, t sont compatibles avec la décomposition (2).

PROPOSITION 9.

a. Si X est sans torsion, l'homomorphisme d'anneaux

$$ch : K_{\mathbb{C}}(X) \to H^*(X , \mathbb{Q}) \qquad \text{(caractère de Chern)} \qquad (\mathbb{Q} \text{ corps des rationnels})$$

est injectif.

b. Si ch^q désigne la composante de degré $2q$ du caractère de Chern ch, alors :

$$ch^q : \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S_{2q}) \to H^{2q}(S_{2q} , \mathbb{Q}) \qquad (S_{2q} \text{ sphère de dimension } 2q)$$

applique $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S_{2q})$ biunivoquement sur l'image de $H^{2q}(S_{2q} , \mathbb{Z})$.

Si Y est un sous-complexe de X on pose :

$$K_{\Lambda}^{-n}(X , Y) = \tilde{K}_{\Lambda}(S^n(X/Y))$$

(S^n n-ième suspension, X/Y complexe obtenu en identifiant Y à un point).

On a alors les isomorphismes de Bott

$$(3) \qquad \begin{aligned} K_{\mathbb{C}}^{-n}(X , Y) &\xrightarrow{I} K_{\mathbb{C}}^{-n-2}(X , Y) \\ K_{\mathbb{R}}^{-n}(X , Y) &\xrightarrow{J} K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X , Y) \end{aligned} \qquad (n \geq 0)$$

qui permettent de définir les groupes $K_{\Lambda}^{n}(X , Y)$ pour tout entier n et les anneaux :

$$K_{\Lambda}^{*}(X , Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_{\Lambda}^{n}(X , Y) \quad .$$

On pose

$$K_{\Lambda}^{*}(X) = K_{\Lambda}^{*}(X , \emptyset) \quad .$$

Ces anneaux vérifient tous les axiomes d'une théorie de la cohomologie sauf l'axiome de dimension (cf. [4], ainsi que l'exposé 177 du Séminaire Bourbaki) ; en effet si X est réduit à un point x_o on a :

(4) $$K_{\mathbb{C}}^{n} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et, pour

(5) $$n \equiv 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7 \qquad (\text{mod } 8)$$

$$K_{\mathbb{R}}^{-n}(x_o) = \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0 \quad .$$

LEMME 2. – L'homomorphisme $c_n : K_{\mathbb{R}}^{n}(x_o) \to K_{\mathbb{C}}^{n}(x_o)$ défini par la complexification est alors donné par

$$c_n = \begin{cases} \pm\, \mathrm{id} & \text{si } n \equiv 0 \mod 8 \\ \pm\, 2\mathrm{id} & \text{si } n \equiv 4 \mod 8 \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \mod 4 \end{cases}$$

de même $r_n : K_{\mathbb{C}}^{n}(x_o) \to K_{\mathbb{R}}^{n}(x_o)$ (passage à la structure réelle sous-jacente) est donné par

$$r_n = \begin{cases} \pm\, 2\mathrm{id} & \text{si } n \equiv 0 \mod 8 \\ \pm\, \mathrm{id} & \text{si } n \equiv 4 \mod 8 \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \mod 4 \end{cases}$$

et $t_n : K_{\mathbb{C}}^{n}(x_o) \to K_{\mathbb{C}}^{n}(x_o)$ (conjugaison) est donné par

$$t_n = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{si } n = 0 \mod 4 \\ -\,\mathrm{id} & \text{si } n = 2 \mod 4 \\ 0 & \text{si } n = 1 \mod 2 \end{cases} \quad .$$

Si X^p désigne le p-squelette de X, les groupes

$$H(p\ ,\ q) = K_{\Lambda}^{*}(X^{q-1}\ ,\ X^{p-1})$$

constituent les données d'une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par

$$E_2^{p,q} = H^p(X\ ,\ K_\Lambda^q(x_o))$$

et qui converge vers $K_\Lambda^*(X)$ filtré par les images des groupes $K_\Lambda^*(X\ ,\ X^{p-1})$ (cf. [4], ainsi que l'exposé 223 du présent séminaire).

Remarque. - Soit $x \in \tilde{K}_\Lambda(X/X^{p-1})$, son image dans $\tilde{K}_\Lambda(X^{p+r-1}/X^{p-1})$ définit un élément $x_r \in E_r^{p,q}$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ tel que $d_r\, x_r = 0$ dont la classe de cohomologie est x_{r+1} . Pour calculer $x_1 \in \tilde{K}_\Lambda(X^p/X^{p-1})$, il suffit de calculer son caractère de Chern (cf. proposition 9 (b)) puisque X^p/X^{p-1} est un bouquet de sphères.

Exemple. - Les espaces projectifs tronqués (définition 8) $\Lambda P_{n,m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ sont des CW-complexes, dont les cellules sont déterminées par les injections :

$$\Lambda P_k \to \Lambda P_n \qquad (m \leqslant k \leqslant n)$$

et dont les groupes de cohomologie sont donnés par

(6) $H^i(\mathbb{C}P_{n,m}\ ,\ \mathbb{Z})$

$$= \ldots\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ \ldots\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \ldots$$

pour $i = \ldots\ ,\ 2m\ ,\ 2m+1,\ 2m+2,\ 2m+3,\ 2m+4,\ 2m+5,\ \ldots\ ,\ 2n-1,\ 2n\ ,\ 2n+1,\ 2n+2,\ \ldots$

(7) $H^i(\mathbb{R}P_{n,m}\ ,\ \mathbb{Z})$

$$= \ldots,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \mathcal{K}\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ 0\ ,\ \ldots,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ \mathcal{K}'\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \ldots$$

pour $i = \ldots,\ 2s\ ,2s+1,2s+2,2s+3,2s+4,2s+5,\ \ldots,2t-2,2t-1,\ 2t\ ,2t+1,2t+2,2t+3,\ \ldots$

avec $\mathcal{K} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 2s+1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } m = 2s \end{cases}$ et $\mathcal{K}' = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 2t+1 \\ 0 & \text{si } n = 2t \end{cases}$

(8) $H^i(\mathbb{R}P_{m,n}\ ,\ \mathbb{Z}_2) = \ldots\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbb{Z}_2\ ,\ \mathbb{Z}_2,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \ldots$

pour $i = \ldots\ ,\ m\ ,\ m+1\ ,\ m+2\ ,\ \ldots\ ,\ n-1\ ,\ n\ ,\ n+1\ ,\ n+2\ ,\ \ldots$

Notations. - Soient $\xi \in K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_m)$ et $\eta \in K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$ les fibrés en droites canoniques sur $\mathbb{R}P_m$ et $\mathbb{C}P_n$ respectivement. On pose

$$\lambda = \xi - 1 \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_m)$$

$$\mu = \eta - 1 \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$$

$$\nu = c\lambda \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_m) \quad .$$

LEMME 3. - Soit $\pi : \mathbb{R}P_{2n+1} \to \mathbb{C}P_n$ la fibration canonique de l'espace projectif complexe, on a alors avec les notations précédentes :

$$c\xi = \pi^* \eta$$

et par suite

$$c\lambda = \pi^* \mu = \nu$$

(on le voit en remarquant que les fibrés $c\xi$ et $\pi^* \eta$ sont non-triviaux et par conséquent isomorphes puisqu'ils sont caractérisés par leurs classes de Chern $c_1 \in H^2(\mathbb{R}P_{2n+1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$) .

LEMME 4. - Avec les notations précédentes, on a

$$\xi^2 = 1$$

et par suite

$$\lambda^2 = -2\lambda , \qquad \nu^2 = -2\nu \quad .$$

PROPOSITION 10.

a. L'anneau $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$ $(n \geq 0)$ est un anneau de polynômes tronqués sur $\mathbb{Z}$ à un générateur μ et une relation $\mu^{n+1} = 0$.

b. La projection $\mathbb{C}P_n \to \mathbb{C}P_n/\mathbb{C}P_m$ $(0 \leq m \leq n)$ applique bijectivement $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n/\mathbb{C}P_m)$ sur l'idéal de $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$ engendré par μ^{m+1} . On note $\mu^{(m+1)}$ l'image réciproque de μ^{m+1} par cette application.

On démontre (a) en observant que la suite spectrale associée à $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$ (dont le terme E_2 est donné par (4) et (6)) dégénère. La structure multiplicative de $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P_n)$ s'obtient par récurrence sur n en utilisant les propriétés d'injectivité du caractère de Chern (cf. proposition 9 (a)) ; (b) s'obtient au moyen de la suite exacte de la paire $(\mathbb{C}P_n , \mathbb{C}P_m)$.

PROPOSITION 11. - Soient

$$\bar{\omega} : \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s+1} \to \mathbb{C}P_t/\mathbb{C}P_s$$

et $(n = 2t + 1 , \ 0 \leqslant s \leqslant t)$

$$\omega : \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s} \to \mathbb{C}P_t/\mathbb{C}P_s$$

les applications déduites de la projection

$$\pi : \mathbb{R}P_n \to \mathbb{C}P_t \quad .$$

Soient i , j les projections standard :

$$\mathbb{R}P_n \xrightarrow{j} \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s} \xrightarrow{i} \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s+1} \quad .$$

On pose :

$$\bar{\nu}^{(s+1)} = \bar{\omega}\mu^{(s+1)} \quad \text{et} \quad \nu^{(s+1)} = \omega^* \mu^{(s+1)}$$

et l'on a

$$i^* \bar{\nu}^{(s+1)} = \nu^{(s+1)} \quad \text{et} \quad j^* \nu^{(s+1)} = \nu^{s+1}$$

(ce qui permet de définir $\bar{\nu}^{(s+1)}$ et $\nu^{(s+1)}$ pour des valeurs entières de n).

Soit $\chi(n , m)$ $(n \geqslant m)$ le nombre d'entiers pairs k tels que $m < k \leqslant n$

a. Le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n)$ est engendré par ν et est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^f}$ $(f = \chi(n , 0))$; Sa structure multiplicative est donnée par $\nu^2 = -2\nu$.

b. Si $m = 2s$, le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m)$ est engendré par $\nu^{(s+1)}$ et l'application j^* est un isomorphisme de $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s})$ sur l'idéal engendré par ν^{s+1} . Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^f}$ avec $f = \chi(n , m)$.

c. Si $m = 2s + 1$, le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m)$ est isomorphe à la somme directe $\mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{m+1})$ où le premier facteur est plongé par l'application :

$$\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m \to \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{m+1} \quad .$$

Démonstration. – On remarque d'abord que la suite spectrale associée à $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m)$ dont le terme E_2 est donné par (5) et (6) dégénère, car les

générateurs des termes $E_2^{2(s+i,-2s+i)}$ ($m = 2s$ ou $2s+1$, $1 \leqslant i \leqslant \chi(n, m)$) proviennent des éléments

$$\overline{\nu}^{(t+i)} \in \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s+2i-1})$$

ce qui implique que tous les d_r sont nuls (cf. la remarque après le lemme 2).

(a) et (b) résultent alors de la définition des $\overline{\nu}^{(s+i)}$ et du lemme 4 ; (c) s'obtient en considérant la suite exacte

$$0 \to \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s+2}) \to \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{2s+1}) \to \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_{2s+2}/\mathbb{R}P_{2s+1}) \sim \mathbb{Z} \to 0 \quad .$$

LEMME 5. — Si $n \equiv 6, 7, 8 \bmod 8$ alors l'application

$$c : \widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n) \to \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n) \qquad \text{(complexification)}$$

est un isomorphisme.

En effet c est toujours un épimorphisme puisque $\widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n)$ est engendré par $\nu = c\lambda$ (proposition 11). Or la suite spectrale associée à $\widetilde{K}(\mathbb{R}P_n)$, dont le terme E_2 est donné par les formules (5), (7), (8) montre que ce groupe contient au plus 2^f éléments ($f = \varphi(n, 0)$) ; le lemme suit de ce que $n \equiv 6, 7, 8 \bmod 8$

$$\varphi(n, 0) = \chi(n, 0)$$

(cf. proposition 11 et 12 pour les définitions de χ et φ).

PROPOSITION 12. — Soient $\varphi(n, m)$ ($0 \leqslant m \leqslant n$) le nombre d'entiers k tels que $m < k \leqslant n$ et $k \equiv 0, 1, 2$ ou $4 \bmod 8$, et soient i et j les projections canoniques

$$\mathbb{R}P_n \xrightarrow{j} \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m \xrightarrow{i} \mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{m+1}$$

a. le groupe $\widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n)$ est engendré par λ et est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^f}$ ($f = \varphi(n, 0)$). Sa structure multiplicative est donnée par

$$\lambda^2 = -2\lambda \quad .$$

b. Si $m \not\equiv -1 \bmod 4$, l'application i^* est un isomorphisme du groupe $\widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m)$ sur l'idéal de $\widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n)$ engendré par λ^{g+1} $(g = \varphi(m , 0))$. Ce groupe est par suite isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^f}$ $(f = \varphi(n , m))$. L'image réciproque de λ^{g+1} sera notée $\lambda^{(g+1)}$.

c. Si $m = 4t - 1$ $(t \geq 1)$ le groupe $\widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_m)$ est isomorphe à la somme directe $\mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{m+1})$ où le deuxième facteur est plongé par i^* et où le premier facteur est engendré par un élément $\overline{\lambda}^{(g+1)}$ $(g = \varphi(m , 0))$, tel que

$$\begin{cases} c\overline{\lambda}^{(g+1)} = \overline{\nu}^{(g+1)} & \text{si } t = 2u \\ \overline{\lambda}^{(g+1)} = -r\overline{\nu}^{(g)} & \text{si } t = 2u + 1 \end{cases}$$

de sorte que

$$cj^*\lambda^{(g+1)} = \nu^{g+1} \in \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n)$$

et

$$j^*\overline{\lambda}^{(g+1)} = \lambda^{g+1} \quad .$$

Démonstration. – (a) et (b) sont des conséquences des lemmes 4 et 5. Pour montrer (c), on établit que la suite :

$$\widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{4t}) \to \widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{4t-1}) \to \widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_t/\mathbb{R}P_{4t-1}) \sim \mathbb{Z}$$

se décompose en somme directe puisque

LEMME 6. – Si $n \equiv 6$, 7 ou $8 \bmod 8$, alors

$$c : \widetilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{4t-1}) \to \widetilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}P_n/\mathbb{R}P_{4t-1}) \qquad \text{(complexification)}$$

est un isomorphisme pour t pair et une injection pour t impair (ce qui s'obtient en comparant les fonctions $\varphi(n , m)$ et $\chi(n , m)$ et en utilisant les propriétés de c données au lemme 2).

5. λ-anneaux et opérations ψ.

DÉFINITION 9. – Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif avec élément unité. On dit que $\mathcal{A}$

est un λ-anneau s'il est muni d'applications

$$\lambda_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \quad (i \text{ entier } \geq 0)$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$\lambda_0(x) = 1$$

$$\lambda_1(x) = x$$

et, pour tout $n \geq 0$

$$\lambda_n(x + y) = \sum_{i+j=n} \lambda_i(x)\, \lambda_j(y) \qquad (i , j \geq 0) \quad (x , y \in \mathfrak{A}) \quad .$$

Exemples.

1° L'anneau de Grothendieck $K_\Lambda(X)$ sur le CW-complexe fini X est un λ-anneau pour les opérateurs λ_i définis comme suit : si x désigne la classe d'un fibré vectoriel, $\overline{x}$ sur Λ de base X, alors $\lambda_i(x)$ est la classe du fibré de la puissance extérieure i-ième $\Lambda^i(\overline{x})$ du fibré $\overline{x}$. De même l'anneau $K^!_\Lambda(G)$ des représentations virtuelles d'un groupe topologique G sur Λ est muni d'une structure de λ-anneau au moyen des puissances extérieures de représentations.

2° A tout anneau commutatif avec élément unité $\mathfrak{A}$ on associe l'anneau $\hat{\mathfrak{A}} = 1 + \mathfrak{A}[[t]]^+$ dont les éléments sont les séries formelles en t à coefficients a_i $(a_i \in \mathfrak{A})$ $(i \geq 0)$ tels que $a_0 = 1$, dont l'addition est donnée par la multiplication usuelle des séries formelles et dont la multiplication notée $\circ$ associative et commutative est définie comme suit :

$$(1 + \sum_{i\geq 1} a_i\, t^i) \circ (1 + \sum_{i\geq 1} b_i\, t^i)$$

$$= 1 + \sum_{i\geq 1} P_i(a_1 , a_2 , \cdots , a_i , b_1 , b_2 , \cdots , b_i)\, t^i \qquad (a_h , b_h \in \mathfrak{A}) \ (1 \leq h \leq i)$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ indépendants de l'anneau $\mathfrak{A}$ choisi, tels que $P_1(a_1 , b_1) = a_1\, b_1$. Sur $\hat{\mathfrak{A}}$, on définit une structure de λ-anneau en posant :

$$\lambda_j\ (1 + \sum_{i\geq 1} a_i\, t^i) = 1 + \sum_{i\geq 1} P_{i,j}(a_1 , a_2 , \cdots , a_k)\, t^i$$

$(a_1 , a_2 , \dots , a_k \in \mathfrak{A} , \ j \geqslant 0 , \ k = \sup(i , j))$ où les $P_{i,j}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ indépendants de l'anneau $\mathfrak{A}$ choisi, tels que

$$P_{1,j}(a_1 , 0 , 0 , \dots , 0) = 0 , \quad \text{pour tout } j \geqslant 2$$

$$P_{i,1}(a_1 , a_2 , \dots , a_i) = a_i \quad \text{pour tout } i \geqslant 1$$

$$P_{i,0}(a_1 , a_2 , \dots , a_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i \geqslant 2 \end{cases} .$$

3° Si $\mathfrak{A}$ est un λ-anneau, l'application $\lambda_t : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ définie par

$$\lambda_t(x) = \sum_{i \geqslant 0} \lambda_i(x) \, t^i$$

est additive $(x \in \mathfrak{A})$. On a en effet

$$\lambda_t(x + y) = \lambda_t(x) \ \lambda_t(y)$$

pour tout $x , y \in \mathfrak{A}$ d'après la définition 9.

DÉFINITION 10. - On dit que le λ-anneau $\mathfrak{A}$ est un λ-anneau spécial si l'application $\lambda_t : \mathfrak{A} \to \hat{\mathfrak{A}}$ qu'on vient de définir est un homomorphisme de λ-anneaux, c'est-à-dire tel que

$$\lambda_t(1) = 1 + t \qquad (\text{unité de } \hat{\mathfrak{A}}) , \quad \lambda_t(x , y) = \lambda_t(x) \circ \lambda_t(y)$$

et

$$\lambda_t(\lambda_i(x)) = \lambda_i(\lambda_t(x)) \qquad (x , y \in \mathfrak{A} , \ i \geqslant 0) .$$

PROPOSITION 13. - L'anneau $K'_\Lambda(\mathfrak{GL}(n , \Lambda) \times \mathfrak{GL}(m , \Lambda))$ ($n , m \geqslant 0$, $\mathfrak{GL}$ groupe linéaire) des représentations analytiques du groupe $\mathfrak{GL}(n , \Lambda) \times \mathfrak{GL}(m , \Lambda)$ est un λ-anneau spécial.

Il suffit de la montrer lorsque $\Lambda = \mathbb{C}$ car l'application :

$$K'_{\mathbb{R}}(\mathfrak{GL}(n , \mathbb{R}) \times \mathfrak{GL}(m , \mathbb{R})) \to K'_{\mathbb{C}}(\mathfrak{GL}(n , \mathbb{C}) \times \mathfrak{GL}(m , \mathbb{C}))$$

est injective (deux représentations réelles équivalentes sur les complexes sont équivalentes sur les réels). Or l'application de restriction :

$$K'_{\mathbb{C}}(\mathfrak{gl}(n , \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(m , \mathbb{C})) \to K'_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m)$$

est injective ($\mathcal{U}_n$ groupe unitaire de dimension n , et $K'_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m)$ groupe des représentations de $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m$). Un élément $\gamma \in K'$ est déterminé par son caractère

$$\chi(\gamma) : \mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m \to \mathbb{C} \quad ;$$

comme $\chi(\gamma)$ est invariant par automorphisme intérieur, il suffit par suite de le connaître sur un tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m$ (puisque la réunion des conjugués de $\mathcal{T}$ est $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_m$ tout entier). Finalement on a une injection

$$K'_{\mathbb{C}}(\mathfrak{gl}(n , \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(m , \mathbb{C})) \to K'_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}^{n+m})$$

(algèbre sur $\mathbb{Z}$ du groupe $\mathbb{Z}^{n+m}$ qui est visiblement un λ-anneau spécial).

PROPOSITION 14. - Le λ-anneau $K_\Lambda(X)$ est un λ-anneau spécial.

Ceci se voit en remarquant que tout fibré principal de groupe G et de base X définit un homomorphisme de λ-anneaux $K'_\Lambda(G) \to K_\Lambda(G)$.

DÉFINITION 11. - Sur tout λ-anneau $\mathcal{A}$, on définit des opérations $\psi_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (pour tout entier $k \geqslant 1$) au moyen de l'identité suivante

$$\sum_{k \geqslant 1} - 1^{k(-1)} \psi_k(x)\ t^{k-1} = \left(\frac{d}{dt}\ \lambda_t(x)\right) (\lambda_t(x))^{-1} \quad . \tag{9}$$

Si Q_k est le polynôme tel que

$$Q_k(\sigma_1 , \sigma_2 , \dots , \sigma_k) = \sum_{i=1}^{n} t_i^k \qquad (n \geqslant k)$$

où $\Sigma_j(t_1 , t_2 , \dots , t_n)$ est la i-ième fonction symétrique élémentaire en $t_1 , t_2 , \dots , t_n$, alors

$$\psi_k(x) = Q_k(\lambda_1(x) , \lambda_2(x) , \dots , \lambda_k(x))$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$.

PROPOSITION 15. – Soit $\mathcal{A}$ un λ-anneau spécial, alors les opérations ψ_k $(k \geq 1)$, définies par la λ-structure de $\mathcal{A}$, sont des homomorphismes d'anneaux à élément unité, et l'on a :

$$\psi_\ell \circ \psi_k = \psi_{k\ell} \quad .$$

Cette proposition est purement formelle (cf. [1]) puisque l'application λ_t de l'exemple 3 est injective.

Application. – Soit K_Λ le foncteur défini sur la catégorie de CW-complexes de dimension finie à valeurs dans la catégorie des λ-anneaux spéciaux, les $\psi_k : K_\Lambda(X) \to K_\Lambda(X)$ définissent des transformations naturelles de foncteurs $K_\Lambda \to K_\Lambda$, compatible avec la décomposition (2), telles que

$$\psi_k \, c = c \, \psi_k \qquad (c \text{ complexification}, \ k \geq 1) \quad .$$

On pose

$$\psi_o = rg \quad (\text{rang})$$

et

$$\begin{cases} \psi_{-k} = \psi_k \circ t & (t \text{ conjugaison}) \text{ pour } \Lambda = \mathbb{C} \\ \psi_{-k} = \psi_k & \text{pour } \Lambda = \mathbb{R} \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

et l'on vérifie que la proposition 15 est vraie pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 16. – Sur l'anneau $K_\Lambda(X)$, les opérations ψ_k $(k \in \mathbb{Z})$ ont en outre les propriétés suivantes

a. $\psi_k(x) = x^k$ lorsque x est l'image dans $K_\Lambda(X)$ d'un fibré vectoriel de dimension 1 (puisque $\lambda_i(x) = 0$ pour tout $i \geq 2$).

b. Si ch^q est la composante de dimension $2q$ du caractère de Chern, alors $ch^q(\psi_k(x)) = k^q \, ch^q(x)$ (pour tout $x \in K_{\mathbb{C}}(X)$) (comme on le vérifie sur le classifiant du tore).

c. $\psi_k(x) = k^q \, x$ pour tout $x \in \widetilde{K}_\Lambda(S_{2q})$ (S_{2q}, sphère de dimension $2q$) (cf. proposition 9, (b).

d. $\psi_k I = k I\psi_k$ et $\psi_k J = k^4 J\psi_k$ où I et J désignent les isomorphismes de Bott (cf. (3)) (c'est une conséquence du (c) qui montre qu'on peut définir ψ_k sur les éléments de degré négatif de $K^*_\Lambda(X)$ mais qu'on ne peut le faire sur les éléments de degré positif).

PROPOSITION 17. — On pose

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} .$$

Pour les espaces projectifs tronqués avec les notations des propositions 10, 11 et 12, les opérations ψ_k sont données pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par les formules suivantes :

$$\psi_k(\mu^s) = ((1+\mu)^k - 1)^s \qquad (s \geq 1) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \psi_k(\nu^{(s)}) &= \varepsilon\nu^{(s)} \\ \psi_k(\overline{\nu}^{(s)}) &= k^s\ \overline{\nu}^{(s)} + \tfrac{1}{2}(k^s - \varepsilon)\ \nu^{(s+1)} \end{aligned} \qquad (s \geq 1) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \psi_k(\lambda^{(g+1)}) &= \varepsilon\lambda^{(g+1)} \qquad (g = \varphi(m,0),\ m \geq 0,\ m \not\equiv -1 \mod 4) \\ \psi_k(\lambda^{(g')}) &= k^{2t}\,\overline{\lambda}^{(g')} + \tfrac{1}{2}(k^{2t} - \varepsilon)\ \lambda^{(g'+1)} \qquad (g' = \varphi(4t,0),\ m = 4t-1,\ t \geq 1) . \end{aligned} \tag{12}$$

On démontre (10) en appliquant la proposition 16 (a) au fibré $n = 1 + \mu$.

Pour obtenir (11) on applique π^* à (10) dans le cas $m = 0$. Enfin, lorsque $n \equiv 6$, 7 et $8 \mod 8$, (12) s'obtient à partir de (11), en remarquant que dans ce cas, d'après les lemmes 5 et 6, l'application c (complexification) est injective. Le cas $n \geq m$ quelconque se déduit de la naturalité des opérations ψ_k.

6. Coréductibilité des espaces projectifs tronqués.

THÉORÈME 3 (ADAMS). — Soit m un entier ≥ 1 et $\rho(m)$ la fonction de la définition 2, alors l'espace projectif tronqué (définition 8)

$$X = \mathbb{R}P_{m+\rho(m)}/\mathbb{R}P_{m-1}$$

n'est pas coréductible. En d'autres termes, il n'existe aucune application

$$f : \mathbb{R}P_{m+\rho(m)}/\mathbb{R}P_{m-1} \to S_m \qquad (S_m \text{ sphère de dimension } m)$$

telle que

$$S_m = \mathbb{R}P_m/\mathbb{R}P_{m-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}P_{m+\rho(m)}/\mathbb{R}P_{m-1} \xrightarrow{f} S_m$$

soit de degré 1 .

Démonstration. - S'il existait une telle application f , alors la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(X , \mathbb{Z}_2)$ (resp. le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$) admettrait une décomposition de la forme :

$$\tilde{H}^*(X , \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 + H' \quad (\text{resp. } \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{Z} + K')$$

compatible avec les carrés de Steenrod (resp. avec les opérations ψ_k) .

a. Si $b(m) = 0$, 1 (cf. définition 2), l'impossibilité d'une telle décomposition pour $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(x)$ suit immédiatement dd la proposition 12 (b).

b. Si $b(m) > 3$, l'entier est divisible par 8 et l'on pose $n = \frac{m}{2}$.

Le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{2^{b+1}}$, les facteurs étant engendrés respectivement par $\overline{\lambda}^{(n)}$ et $\lambda^{(n+1)}$. On a :

$$i^*(\lambda^{(n+1)}) = 0$$

$$i^*(\overline{\lambda}^{(n)}) = \gamma$$

où γ désigne un générateur de $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S_n) = \mathbb{Z}$.

Si X était coréductible, on devrait avoir

$$f^*(\gamma) = \overline{\lambda}^{(n)} + N\lambda^{(n+1)} \quad ,$$

pour un entier N , qui d'après (12) devrait vérifier pour tout entier k la relation

$$(N - \tfrac{1}{2})(k^n - \varepsilon) \equiv 0 \mod 2^{b+1} \qquad \left(\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}\right)$$

Or si $k = 3$ on a :

$$k^n - \varepsilon = 3^n - 1 \equiv 2^{b+1} \mod 2^{b+2}$$

(où $b = b(m)$ et $n = m/2$ comme ci-dessus), comme on le voit en montrant par récurrence sur $b \geq 2$ que $3^{2^{b-1}} - 1 \equiv 2^{b+1} \mod 2^{b+3}$, ce qui achève la démonstration du théorème 3 dans ce cas.

Nota Bene. – Le procédé échoue pour $b(m) = 2$.

c. si $b(m) = 2$, on considère le groupe

$$\tilde{H}^*(X , \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 + H'$$

où $\mathbb{Z}_2$ est engendré par l'élément $w^{(m)}$ défini par $w^m = j^*(w^{(m)})$ où w est le générateur de l'allgèbre

$$\mathbb{Z}_2[w] = H^*(\mathbb{R}P_{m+\rho(m)} , \mathbb{Z}_2)$$

et où j désigne la projection canonique

$$j : \mathbb{R}P_{m+\rho(m)} \to X \quad .$$

Si X était coréductible, on devrait avoir $Sq^i(w^{(m)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Or, comme j^* est injective, les carrés de Steenrod dans $\tilde{H}^*(X , \mathbb{Z}_2)$ sont donnés par ceux de $H^*(\mathbb{R}P_{m+\rho(m)} , \mathbb{Z}_2)$ et l'on a :

LEMME 7. – Avec les notations précédentes

$$Sq^i(w^q) = \binom{q}{i}_2 w^{q+i} \qquad \text{(WHITEHEAD-STEENROD)}$$

où $\binom{q}{i}_2$ est la réduction mod 2 du coefficient binomial $\binom{q}{i}$. En effet,

$$Sq^i(w) = \begin{cases} w & \text{pour } i = 1 \\ 0 & \text{pour } i \geq 1 \end{cases}$$

et puisque

$$Sq^i(w) = w^2 \quad ,$$

on a, par récurrence :

$$Sq^i(w^q) = Sq^i(w \smile w^{q-1}) = w \smile Sq^i(w^{q-1}) + Sq^1(w) \smile Sq^{i-1}(w^{q-1})$$

$$= (\binom{q-i}{i} + \binom{q-i}{i-1})\, w^{q+i} = \binom{q}{i}\, w^{q+i} \qquad \text{(d'après la formule de Cartan)}$$

d'où le lemme.

D'autre part,

LEMME 8. — Soient

$$i = \sum_{j=0}^{k} a_j\, 2^j$$

et

$$q = \sum_{j=0}^{k} b_j\, 2^j \qquad (a_j\,,\ b_j \in Z_2\,,\ k \text{ entier assez grand})$$

les développements diadiques des entiers i et q. La condition nécessaire et suffisante pour que $\binom{q}{i}_2 = 1$ est que $b_j = 0$ entraîne $a_j = 0$ pour tout entier j tel $0 \leqslant j \leqslant k$.

En effet pour q fixé les $\binom{q}{i}_2$ sont les coefficients du polynôme $(1 + w)^q$, et comme on a $(1 + w)^{2j} = 1 + w^{2j}$, on peut écrire :

$$(1 + w)^q = \prod_{j=0}^{k} (1 + b_j\,, w^{2j}) \qquad .$$

Pour que le coefficient $b_{j_1}\, b_{j_2} \ldots b_{j_p}$ de w^j soit égal à 1, il faut et et il suffit que $j_1\,,\ j_2\,,\ \ldots\ j_p$ soient les valeurs de j pour lesquelles $a_j = 1$, ce qui démontre le lemme.

Comme on a

$$m = 2^2(1 + \sum_{j=3}^{k} c_j\, 2^{j-2})$$

et comme

$$\rho(m) = 4$$

on voit que

$$Sq^4(w^m) = w^{m+\rho(m)} \quad ,$$

et par suite

$$Sq^4(w^{(m)}) \neq 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.

Nota Bene. – Le procédé du (c) réussit lorsque $\rho(m) = 2^{b(m)}$, c'est-à-dire pour $0 \leq b(m) \leq 3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). – λ-rings and ψ-operations (non publié).

[2] ADAMS (J. F.). – Vector fields on spheres (à paraître).

[3] ATIYAH (M. F.). – Thom-complexes, Proc. London math. Soc., t. 11, 1961, p. 291-310.

[4] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). – Vector bundles and homogeneous spaces, Proceedings of symposia in pure mathematics, Volume 3 : Differential geometry ; p. 7-38. – Providence, American mathematical Society, 1961.

[5] ECKMANN (B.). – Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, Comment. Math. Helvet., t. 15, 1942, p. 358-366.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). – La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 137-154.

[7] JAMES (I. M.). – Spaces associated with Stiefel manifolds, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 9, 1959, p. 115-140.

[8] SPANIER (E. H.) and WHITEHEAD (J. H. C.). – Duality in homotopy theory, Mathematika, t. 2, 1955, p. 56-80.